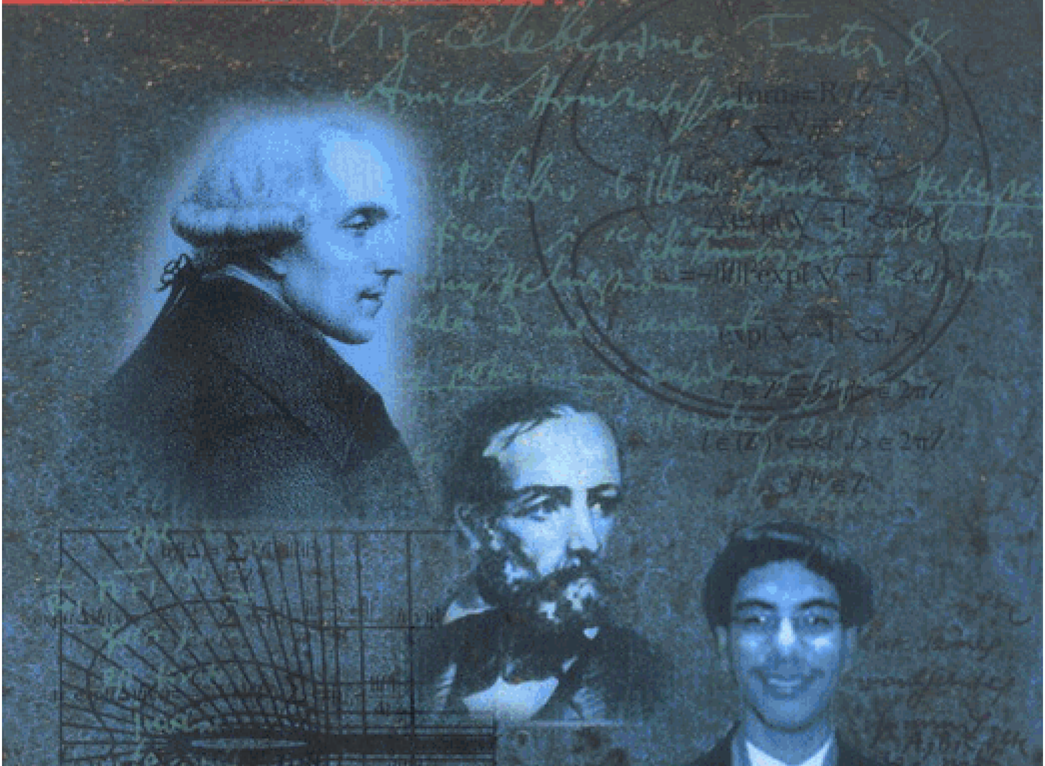
世界著名数学猜想丛书



拉普拉斯——拿破仑之师，势利小人，决定论鼓吹者
提出拉普拉斯方程
迪利克雷——高斯、黎曼双星增映之下的超级巨星
德国数学领袖，命名边值问题
维斯卡尔迪——软件工程师与拥有哲学博士学位的家庭主妇
共同培育出的天才少年，辍学在家破解百年
经典数学难题，获十万美金西屋科学大奖

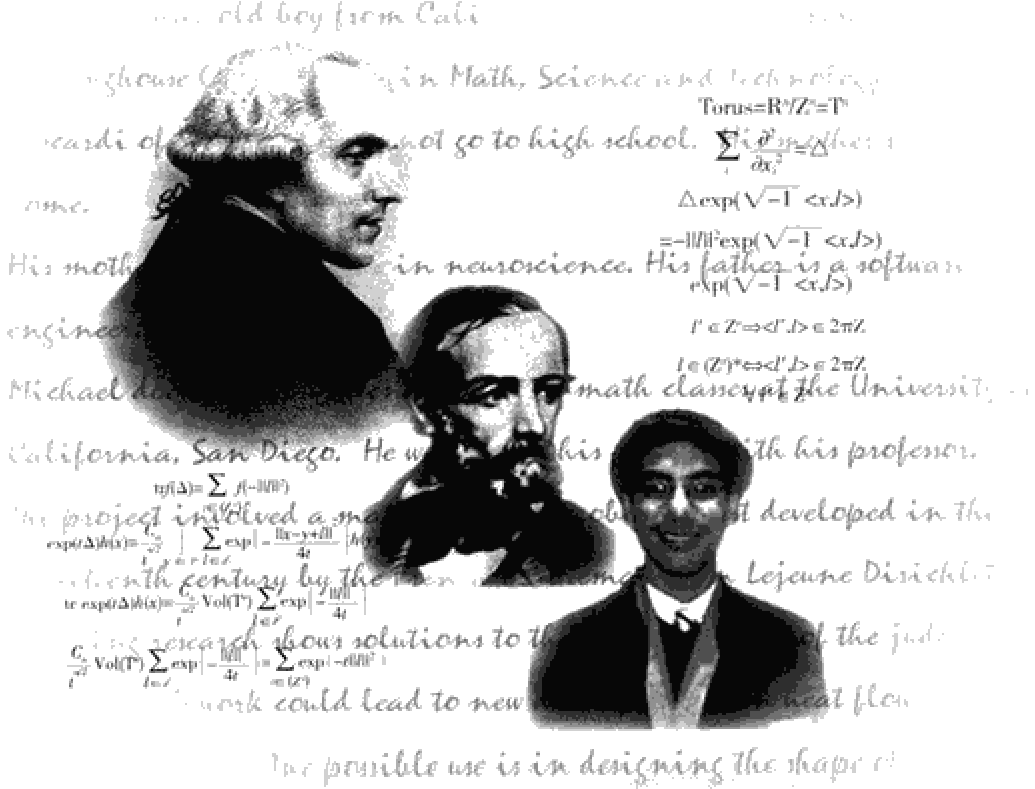
主编　刘培杰

从迪利克雷到维斯卡尔迪

From Dirichlet to Viscardi

哈尔滨工业大学出版社

世界著名数学猜想丛书



从迪利克雷到维斯卡尔迪

From Dirichlet to Viscardi

主编 刘培杰

副主编 王兰新 郭梦舒

哈尔滨工业大学出版社

内容提要

本书是对美国加州天才少年迈克尔·维斯卡尔迪(Michael Viscardi)在2006年1月5日摘取全美高中科学大奖——"西门子西屋科学奖"桂冠,并斩获高达10万美元的奖学金这一事件的深度解读。

其中包含两部分内容。第一部分是通过这一事件对我国现行数学教育制度的反思和其形成的历史原因的追溯及产生根源的探究,以期建立人性化、科学化的天才少年的发现机制和培养机制,相信会对从事教育工作的人士及学生家长有所帮助。第二部分是对维斯卡尔迪所解决的迪利克雷问题的历史及与数学各分支的联系和最新研究进展所做的回顾与综述,对从事高等数学学习和研究的大学师生是一种寓教于史的新的尝试.

图书在版编目(CIP)数据

从迪利克雷到维斯卡尔迪/刘培杰主编.—哈尔滨:
哈尔滨工业大学出版社,2007.8
ISBN 978-7-5603-2452-4

Ⅰ.从…　Ⅱ.刘…　Ⅲ.高等学校-高等数学-
教学研究-中国　Ⅳ.013-4

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第001860号

策划编辑　刘培杰
责任编辑　李广鑫　王勇钢
封面设计　卞秉利
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　黑龙江省教育厅印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张31.25　字数575千字
版　　次　2007年11月第1版　2007年11月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-2452-4
印　　数　1-3 000册
定　　价　48.00元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

⊙前言

在数学发展史上，虚数的出现充满着戏剧性，几位数学大师对虚数的评价也各有千秋，如意大利的卡尔丹（Carden，1501—1576）说："（虚数是）又精致又不中用。"法国的笛卡尔（Descartes，1596—1650）说："虚数是不可思议的。"德国的莱布尼兹（Leibniz，1646—1716）则说："虚数是神灵美妙与神奇的避难所。"最有趣的要数瑞士的欧拉（Euler，1707—1783），他说："虚数既不是什么都不是，也不比什么都不是多些什么，更不比什么都不是少些什么，它们纯属虚构。"

以上的评价都颇具大家风范，既玄妙，又滴水不露，串联起来借用一下其句式作为本书特点的介绍：这本书是既精彩又不中用，以通常的著书方式看是不可思议的。这本书是天才情结与英雄崇拜的混合体。这本书既不是什么都不是，也不比什么都不是多些什么，更不比什么都不是少些什么，它纯属不伦不类。

这是一部"啥也不是"的书。

这样说一是因为虽然它叙述了一个数学天才少年的获奖事件，但它并不是报告文学；虽然它探讨了数学天才的成长方式，但它并不是教育文集；虽然它涉及众多的著名数学家，但它不是

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2}=0$$

数学家传记；虽然它包含了美国数学竞赛与数学天赋测试题，但它并不是奥数题集；虽然它横贯了若干现代数学分支，但它并不是数学专著。

二是因为它涉及太广难以归类，它既是方程又是分析，既是复变又是泛函，既是代数又是数论，既是概率又是几何，既是经典数学又是现代数学，既是纯粹数学又是应用数学。既可应用于飞机制造，又可应用于鼓声识别，既可应用于天体物理，又可应用于医疗器械。

至于为什么故意将一本书“制造”成如此不伦不类，其指导思想如下：

据波士顿咨询公司创始人布鲁斯·亨德森教授当年撰文称，1934年，莫斯科大学的一位科学家高斯(G.F.Gause)曾经作过如下的一系列比较实验：把两个非常小的动物(原生物)放在一个瓶子里，给予适量食物。如果二者是不同类的动物，它们可以共同生存下去；如果它们来自同类，则无法共生。高斯于是得出了“竞争性排他原理”：两个活法相同的物种不可能持久共生。亨氏将此原理引入商业竞争之中，提出了uniqueness(独特性)的概念，即要想生存就必须与众不同。

不伦不类或许也是一种独特，但更是一种无奈。目前数学类图书市场被三大类图书所占据：一曰专著类，其作者皆为学界泰斗或学术新贵，其规模多为高文大册，其内容皆壁立千仞常人难及。第二类曰教材类，其作者皆为明星教授，学界大佬，具振臂一挥，应者云集之影响力，其出身皆为名门，其封面多标注以“十X五”系列，非圈内人士断难分其一杯羹。三曰科普类，其籍贯皆为欧美，其作者皆学富五车，精数学兼通文史哲。其旁征博引，妙语连珠，一般人难望其项背。

以此分析似乎会得出数学书不可为的结论，但知其不可为而为之是进取之道，要有为就必须避重就轻，避实就虚。别家内容求专，我们就求广，别家文理分开，我们就文理合一，别家初高另设，我们就熔于一炉，别家仅限一家之言，我们就博采众长。总之，“逆反”与“另类”是这本书的两大特征，虽然，这可能很难让人接受，有一种大杂烩的感觉，但这是我们的刻意而为。南宋姜夔论诗，说：

> “作者求与古人合，不若求与古人异，求与古人异，不若不求与古人合而不能不合，不求与古人异而不能不异。彼惟有见乎诗也，故向也求与古人合，今也求与古人异，及其无见乎诗已，故不求与古人合而不能不合，不求与古人异而不能不异。其来如风，其止如雨，如印印泥，如水在器，其苏子所谓不能不为者乎?”
>
> (《白石诗集，自叙二》)

但这种汇集稍有不慎会有堆砌之感。这是大忌。中国物理学泰斗吴大猷

对此种无骨架的陈列曾表示过担忧与不满，他说：

> "写(物理)发展史是一件费力而不讨好的事。写发展史总不能是巨细不分地编写电话簿，如对发展一个'学系'或研究单位。若对'发展的方向'，'人才的评估'，'设备的计划'等均无高明评估，对成果无公允评量，则此等叙述是无价值的！看电话簿是难对其国家社会得到有意义的正确了解的。"
>
> (吴大猷述.黄伟彦，叶铭汉，戴念祖整理.柳怀祖编.早期中国物理发展之回忆.上海：上海科学技术出版社，2006年)

基于以上原因，本书充其量只能是供"小众"传播的矿石原料，美国《时代》杂志估计在未来10年内随科技发展，会产生10种吃香行业，其中之一为"资料矿工"，他们负责从如山的资料中寻找有用的东西。如果是全社会都感兴趣的话题倒也值得，关键是怕只有极少数人对此感兴趣，所以我们只好充当"小众传播人"为他提供个性化的资讯，这就是本书的目的。如果说还有更进一步的野心，那么我们还希望编成一部数学概念思想史，因为怀特海说：

> "甚至一直到现在，数学作为思想史中的一个要素来说，实际上应占有什么地位，人们的理解也还是摇摆不定。假如有人说：编著一部思想史而不深刻研究每一个时代的数学概念，就等于是在《哈姆雷特》这一剧本中去掉了哈姆雷特这一角色。这种说法也许太过分了，我不愿说得这样过火。但这样做却肯定地等于是把奥菲莉这一角色去掉了。这个比喻是非常确切的。奥菲莉对整个剧情来说，是非常重要的，她非常迷人，同时又有一点疯疯癫癫，我们不妨认为数学的研究是人类性灵的一种神圣的疯癫，是对咄咄逼人的世事的一种逃避。"
>
> (A.N.怀特海.科学与近代世界.向钦，译.北京：商务印书馆，1989)

提到思想史就不能不涉及人物。

本书的主人公之一，德国著名数学家迪利克雷是一个被数学史家低估了的人物。他是高斯和黎曼之间最伟大的数学家之一，但是他的名声往往被这两位数学家所掩盖，没有得到应有的注意(生活在伟人出没的时代对平凡人是一种幸运，但对另一个伟人的人生却是一个悲剧)。实际上他在数学研究的深度、广度及个人影响方面都是巨大的。他与雅可比一起像耀眼的双星照亮了整个德

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2}=0$$

国数学界，彻底扭转了德国数学在教学与研究上的落后局面，开创了德国数学在其后100年的领先局面。

迪利克雷作为一个邮政局长的第7个孩子成名于名人堆中。从1822年5月到1826年秋天他居住在巴黎，在法兰西学院及巴黎大学理学院听课，结识了拉克鲁瓦、傅里叶及泊松(这似乎与迪利克雷在分析方面的工作方向有某种联系)。1823年夏，他被福瓦将军聘为家庭教师，1825年夏，他结识了亚历山大·冯·洪堡，并通过他结识了许多法国著名科学家。同年，勒让德及拉克鲁瓦代表巴黎科学院接受了他的第一篇关于五次不定方程的论文，他在文中证明了费马大定理 $n=5$ 的情形。1825年冬，福瓦将军去世，他离开福瓦家。1826年5月，他致函普鲁士文化部长史泰因申请工作，并附上亚历山大·冯·洪堡的介绍信，1829年夏，他在度假时结识了雅可比，两人结下了终身友谊，后来在洪堡的介绍下，他结识了著名音乐家门德尔松(Felix Mendelsohn，1809—1847)一家，1832年娶其妹瑞贝卡(Rebecca，1811—1858)为妻，他的家庭成为柏林文化界的社交中心。1855年高斯去世后，迪利克雷被选为高斯的继任者。

本书的另一位主要人物是皮埃尔·西蒙·拉普拉斯。

18世纪的法兰西百科全书派设想，用物理与力学的原理终极地解释宇宙间万事万物的日子，已经为时不远了。拉普拉斯就是这个充满自信时代的代表，这个时代的特征是乐观地过高估计了新出现的物理——力学思想的能力。

拉普拉斯1749年生于诺曼底的昂诺日博蒙。他的父亲小有资财。他16岁时进入冈市大学，很快就显露出数学才能。在只有18岁时就被任命为巴黎军事学校的数学教授。

他很快就名声大噪，原因是在1773年，他研究了一个著名的问题：为什么木星的轨道看上去不断在缩小，而土星的轨道却在不断地扩大，这个问题人们一直无法用牛顿的引力学说作出解释。牛顿曾经担心，为了使太阳来保持住目前的秩序，需要上帝的力量不时地进行干预，拉普拉斯去掉了这个假设，证明了这是一种周期现象，而且是每隔929年就会重复一遍。

拉普拉斯论述天体引力的不朽之作《天体力学》，从1799年1825年间分5卷出版。这是一本极为抽象的著作，文风晦涩，在论述中常常用"易于理解"一词衔接推理上的跳跃。它的写作也不完全诚实。他有意略去引述别人著作的痕迹，把上三个世纪中数学家辛勤钻研的成果，掠为己有。尽管如此，它仍是一部举世公认的巨著。

拉普拉斯在概率论方面的贡献，是无与伦比的。《概率论的解析理论》(1812年)描述了一种算法，可以给讲述偶然性事件的命题赋予"合理的信任程

度"。在这个范围内,信念似乎是个格格不入的不科学概念。我们每个人都怀着明天太阳照样会升起的坚定信念,安排我们的日常事务,但这样的想法并不意味着信念可以指派以确定的量。但是拉普拉斯却说:信念是可以度量的,并且规定了度量的算法。

拉普拉斯认为概率的原理影响所及遍布人类生活的各个方面。什么事都是可以度量的。在拉普拉斯眼里,人类理解力的面前不存在技术上的禁区,哪怕是宇宙的过程,也可以不可移易的准确性,洞察秋毫之末。他的时代正是人类智能高视阔步的时代,一点也不曾感到,会有力有不逮的情况。

现代的科学则要谦逊得多,今天的宇宙在某些方面要比以往任何时代都更神秘莫测。大自然再也不仅仅是用运动与物质就能考察的对象了。拉普拉斯的天体机器,确实在宇宙中建立起了很长时间的稳定,但决不像他所宣称的那样,适用于"永恒的世代"。18 世纪在思想史中是个独一无二的时代。在这以前及之后,人类对于自己理解整个宇宙的能力,都不是那样地信心十足的。

拉普拉斯于 1827 年去世。在晚年,他在自己周围吸引了许多的天文学家、物理学家、博物学家和数学家。既忙碌又愉快,他接见全球各地杰出的来访者。他的科学天赋为他赢得了"法兰西的牛顿"的殊荣。

拉普拉斯一生都在顺应着政治环境的变化,他也一直为此受后人诟病。他的同时代人戏谑地称他"驯顺"。在法兰西革命的动乱时代,他不仅保全了首级,而且还事业昌盛。他的著作一版接着一版,只是导言内容紧随时代潮流而变化。例如《概率论的解析理论》1812 年版是奉献给"拿破仑大帝"的;但在 1814 年的版本中,他不仅删去了这段颂词,而且还写道:"一个掌握了或然性之算法的人,能以很高的概率预言,渴求统治全世界的帝国,必败无疑。"

另外本书还希望成为讲述应用数学与数学的应用的科普书。

应用数学对于普通人来讲有两个含义:一个是数学的应用,即理论联系实际,再一个才是我们常说的应用数学。对于理论联系实际,一个好的例子是抗日战争时期,我国出了一本名为《抗日数学》的教材,教材中的选例大多都是与抗日有关的素材,如地雷的杀伤力,就是与圆的面积相关;投掷手榴弹出手的角度,就是与抛物线联系,那些材料真正体现了数学的现实性,值得借鉴。

M.L.Cartwright 说:"在把纯数学区分于应用数学时,看来存在着两个问题。一项工作是否真是抽象的并且与所有的应用相分离?如果它的确是一项抽象的工作,所追求的目的完全是其自身的,那么它还是不是一项数学工作?我相信在严格的数学抽象思维和那种依靠现实世界的思维之间绝对没有明确的分界线,而且数学中的某些主要发展,像微积分,就多多少少是依靠现实世界思考

出来的。进一步的抽象并不一定使数学变得更好。"

那么什么是应用数学呢？没有一个统一的定义，用 H. O. Pollack 的话说："应用数学是我碰巧知道其一个应用的数学。我认为这包括了数学中的几乎每一件事。"用 C. C. Lin 的话说则是："应用数学家的努力导致新的数学思想和理论的创造，并且由于这种数学理论的来源，它们更适合于其他科学分支。"R. Courant则说："应用数学的任务是面向外部提出的问题，适合这些问题的形式，把它们翻译成数学语言，分析其模型表示的抽象问题，然后是最后的也是最主要的一步，从理论分析转回现实语言并使之合于使用。"G. F. Carrier 则对学生提出这样的要求，他说："应用数学专业的学生在学成时应对相关领域有广泛的了解，对其中的几个领域有深刻的理解，对大量定量问题中的某些问题有着高度激发的好奇心以及做出有意义的贡献的愿望。"为了使读者对应用数学的特点及边界有一个感性认识，我们举一个有趣的例子——自由下落猫的研究。众所周知猫四肢朝上从空中自由落下时四脚能够先安全着地，这一现象的解释可追溯到 19 世纪末，Guyou 和 Marey 首先用角动量守恒原理解释了猫在空中的转体运动对其质心的角动量保持守恒，即等于 0。（贾书惠．从猫的下落谈起．北京：高等教育出版社，1990）McDonald 从生理学的角度也阐述了这一论点，他们认为猫先收缩前肢，伸开后肢并转动前半身，由于前半身对纵轴的转动惯量小于后半身，根据角动量守恒原理，同时前半身转过的角度比后半身向相反方向转过的角度要大。然后，猫伸开前肢，收缩后肢并转动后半身，同理后半身也转过较大的角度。这一解释虽然符合力学原理，但由实验观察猫的自由下落过程看不到这种明显的四肢开合运动。Лойнцкий 用猫尾巴旋转提出另外一种解释，即不用四肢的伸缩动作，而是将尾巴向一个方向急速旋转，猫的身体就能沿相反的方向翻转过来，但实验证明无尾猫同样能完成转体而否定这一论点。Kane 和 Scher 利用猫的弯曲脊柱解释转体，假定猫的前后脊柱以腰部为顶点作圆锥运动，将猫简化为由两个轴对称刚体组成的多体模型，解释了猫的转体运动，Kane 对由两个轴对称刚体组成的猫的力学模型建立了运动方程并作数值积分，计算结果与实验摄影记录十分吻合，我国力学家刘延柱考虑猫的躯干的非轴对称性导出猫转体的动力学方程，进而讨论了猫下落转体运动的一般规律。（刘延柱．自由下落猫的转体运动．力学学报，1982，14(4)：388-393）

进入上世纪 90 年代，随着载人航天技术的发展和探索失重状态下人的转体规律而对猫落体问题进行了广泛和深入的研究。猫落体的姿态运动方程首次积分可化为非完整约束方程，它是由角速度不可积引起的。非完整控制系统是一类特殊的非线性系统，其控制方程的特点表现为构成系统的广义坐标的维数多于控制输入维数。Brockett 最早系统地研究了无漂移非完整系统的最优控制问题，用控制目标函数构造拉格朗日函数及拉格朗日方程，分别得到最优输

入为正弦函数和椭圆函数的结论。Murray 和 Sastry 利用 Brockett 的一些成果将正弦输入用于非完整链式系统的控制。Royhanoglu 对非完整系统的动力学模型，利用 Stokes 定理和 Taylor 级数展开等工具提出一种类似的运动规划算法。Leonard 等基于平均理论研究了非完整控制系统的运动规划问题。还有一些应用数学家在非完整控制系统中构造优化路径或轨迹的各种数值方法中也取得了一系列重要研究结果。特别是 Fernandes 对双刚体耦合系统提出的最优控制问题的 Ritz 近似方法。(戈新生，陈立群．自由浮漂浮的非完整运动规划最优控制研究．应用数学和力学，2007，28(5)，539-540)由此我们可见应用数学家工作之方法与风格之一斑。

另一个有趣的例子来自于生物学。在生物学中，相似理论是一个十分重要的问题。它是把对一种动物获得的实验数据用于另一种动物的基础，对医学研究有极为重要的意义。长期以来，它一直是人们十分关心的议题之一。1927 年，Lambert 与 Teissier 对哺乳类动物给出了两个著名的假设：一是对应器官的密度相等，二是对应时间比等于对应系统的长度比。在此基础上提出了著名的生物相似理论，为近代生物相似论奠定了基础。1979 年，在仔细的实验与观察基础上，Noordergraaf 等进一步考虑了对不同哺乳动物血流波速的差别，得到波长与动物系统长度之比为一不变量，即 $\frac{\lambda_{max}}{L}\approx 6.1$，这里 λ_{max} 为基波波长，L 为主动脉根部到髂动脉的距离，设 C 为波速，T 为心搏周期，则 $\lambda_{max}=CT$，故有 $\frac{CT}{L}\approx 6.1$。如果忽略波速 C 对不同哺乳动物的区别，即得 $\frac{T}{L}\approx\frac{6.1}{C}=$ 常量，这正是 Lambert 等的假设。

一个自然的问题是：为什么对不同的哺乳动物会有这个不变量？现在生物是 20 亿年自然选择的结果，一个自然的猜想是这种不变量应有其进化论的意义。我国应用数学院家兰州大学的牛培平教授从力学意义上进行了探讨，设左心室射血时间为 T_1，他从理论上证明了当 $\frac{2T}{C}=T_1$ 时，亦即当 $\frac{\lambda_{max}}{L}=\frac{2T}{T_1}$ 时，在正常的有生理意义的波反射条件下，左心室关于振荡流的周期平均功率为极小，它的直观意义是，假设左心室发出一个矩形流量波，那么当这个波在功能反射位置反射到主动脉根部时，恰当主动脉瓣关闭。由于哺乳动物心脏构造相似，$\frac{2T}{T_1}$ 近似为常量 6.1，所以有 $\frac{\lambda_{max}}{L}\approx 6.1$，这正是 Noordergraaf 等的结果。

在本书中我们希望在弘扬核心数学价值的同时也彰显应用数学的不可替代的价值。《美国数学月刊》主编哈尔莫斯说：

"许多应用数学具有非常大的价值。如果，一个思维的方法教给我

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2}=0$$

们一些有关血液是怎么输送的，波是怎么传播的，银河系是如何扩张的等方面的知识，那么它给了我们科学和知识。顾名思理应受到至上的尊敬。立法文章的伟大的起草者们(以他们严谨正宗的句法和文风)深邃，精辟，一丝不苟，对社会功德无量，说他们所写的法律是坏的文学不是一种侮辱。同样，伟大的应用数学家洞察明鉴，巧法如神，对科学劳苦功高，说他们有着血液、波以及银河系的发现是第一流的应用数学，但是，通常来说，照样，应用数学是坏数学，这么说，也不是一种侮辱。"

(P.R.哈尔莫斯.应用数学是坏数学.北京:北京大学出版社,1990)

关于应用数学对社会贡献的方式，有一个有趣的类比：

美国人约翰·布罗克曼为了编写《过去2000年最伟大的发明》一书，在互联网上提出："什么是过去2000年最伟大的发明"的讨论，从中他挑出一百份来集结成书。但与众不同的是布罗克曼在问题的后面还有一个"为什么"，这就要求回答者言之成理了，清华大学科学史教授刘兵认为在这100个答案中最奇特的，也是最刺激的莫过于邓肯·斯蒂尔的答案，竟是——"英国新教33年历法"。原因是：1582年由罗马教皇格里高利13世颁布的历法，也就是今天全球通用的公历，并非是最完善的历法——事实上这样的历法至今也未产生。就单纯这个问题而言，相传公元1079年波斯诗人欧玛尔·海亚姆(以抒情四行诗《鲁拜集》名垂后世)提出的33年8闰的周期更为合理，英国的新教徒出于宗教目的，极力鼓吹采用这种周期的历法，为此就需要寻求一条新的本初子午线来证明这种历法的优越性。由于这条假想的本初子午线约在西经77°处——靠近北美大陆东岸，所以英国向北美派出了多支探险队。最后的结论是：如果没有新教33年历法，英国就不会向北美探险，也就不会有今天的美国，世界历史将会大大不同了。

(江晓原，刘兵.南腔北调——科学与文化之关系的对话.北京：北京大学出版社,2007)

数学对世界的贡献非常像"英国新教33年历法"之于美国的发现，纯属意外、偶然，是微不足道的副产品。

本书更想成为引导数学天才成长及社会如何发现数学少年天才的励志之书。

在韩国围棋界有一个术语叫"穿鼻"。这是指初次进军职业棋赛为本选舞台。牛犊如果长大成牛，必须穿过鼻中隔，戴上鼻环，所以常常用穿鼻来比喻新锐职业棋手初次进军本选舞台。这从字面理解似乎成长伴随着痛苦(穿鼻之

痛)。本书用一定的篇幅论及了数学天才在"穷鼻"之前的特征及表现，以及相应的发现和培养方式。

俗话说"英雄惜英雄"，也许天才需要天才才能早期发现。我们或许可以以诺贝尔奖得主为例。I.I.拉比偶然遇到年轻的朱利安·施温格的故事，颇具说服力：

1936年，18岁的施温格当时是纽约市立学院的肄业生，碰巧陪同一位朋友去哥伦比亚大学，那位朋友想要转学到那儿的物理系，当时距离获得诺贝尔奖还有八年之遥的拉比，同这两个年轻人谈了话，而且很快就把注意力主要转向施温格而不是他那促成这次会晤的朋友身上，拉比发现施温格在物理学方面的知识，远远超出他当时年龄应有的水平。更重要的是，他注意到施温格具有有条不紊的思考能力和有条不紊的阐发天才。拉比很快就安排施温格进入哥伦比亚学院并终于在该大学获得博士学位。他的天才对任何关心他的人来说都是显而易见的了。正如他的同学米切尔·威尔逊1969年在《大西洋月刊》(224号)上所写的《诺贝尔奖金获得者是怎样成长起来的》一文中所撰写的，施温格"很快就在班里表现得非常突出，以致没有人想要嫉妒他。我们每个人都彼此肯定这样一件事：他终究会获得诺贝尔奖金。"

他山之石，可以攻玉。当我们把目光集中于我们的中学生时，往往有种失望的感觉。这可以由我们的中学教育的产品——大学生那里发现一点问题。人们惊讶地发现本应求知若渴的大学生竟然有许多是厌学的。在分析中国大学生厌学的原因时，社会学家郑也夫说：

> "第一位的因素还是中学的时候学生心理上受了伤，学得太累了。听说日本大学学习的动力跟中学比也是大不如前。中学时候那都是拼命，冲刺，厕所里都印着高考的知识：全世界最高的山是什么山，最长的河……那真是寝食不安。这种情况造成的结果必然是到大学里要松一口气，要长休那么一阵子。这在中国是第一要紧的因素。我看到过一个哲学家写过这么一段话，非常生动：'叫一个孩子在非兴趣的基础上去学习，就是在春天的时候摇晃一棵苹果树，你不但不能摇下苹果来，相反使得苹果花纷纷落地，以至于到了秋天应该收获的时候，你不再能收获到苹果了。'我觉得这句话非常凄美。我们这些家长、教师在联手扼杀我们的孩子，我们到秋天的时候收不到果子了，是因为我们犯了一个大错。我们用自己的双手造就了这样一个悲哀的事实，我们所最钟爱的下一代成不了大器。"
>
> (《博览群书》，2005年第5期)

所以我们希望，通过本书的阅读使数学教育工作者能发现我们的教学方法之弊病，并加以改变。

全美华人协会第一届会长，美国波士顿学院化学系教授潘毓刚在谈到人才培养时说：

"中国的教学方法，必须加以改进。

"中国现在美国的留学生很多，我接触到的外国教授都说中国学生很用功，考试成绩都很突出。但做起科研来，开始时往往不如美国学生。在这一点台湾的情况也一样，因为台湾的教学方法与大陆一样，是填鸭式的，是大人抱小孩走路式的教学。

"科研就是要从不同角度考虑问题，不拘一格，突破老的框框，而我们的学生从小习惯于从一个角度，按老师的思路去思考问题，有的老师不喜欢甚至不准学生提问题。

"美国青年不同，他们不那么迷信权威，习惯于提问题，同教授争论，在美国经常有些教授被学生问得哑口无言，但并不为此而难为情。"

（潘毓刚，也谈中国科技教育体制的改革，原载《大自然探索》1984年第4期）

通过阅读本书我们也希望使考生及其家长认清目前国内高考的弊端，了解选拔方式的多样性。

美国伯克利加州大学校长，中国科学院外籍院士田长霖在一次讲话中指出：

在国内有高考，一次考试就决定你是否能进大学。在国外也有，叫统考，他们叫 SAT(Scholastic Aptifude Test)，就是学能测验，其实，这种统考与国内的高考并不相同。国内的高考很多地方可以凭记忆，凭背，凭猜题。这次，我在武汉参观，有人对我讲，有几所中学，升学率高得不得了，有许多学生从来没有见过化学试管或任何化学方面的实物，但是，可以把化学实验方面的题目答得非常完善。他们的老师有三个很好的办法：管，关，灌。先管他，再关起来，最后再灌。但是，这样训练出来的学生，恐怕将来的发展不会很大。我宁愿收一点调皮捣蛋的学生。在美国，全部高中毕业生都要参加统考。但是，这是智力测验，比较灵活，预备几天就可以，使你了解是怎样一种性质的测验。了解后，再死背的话，就没有多大的帮助。即使像这样一种考试，在美国，也有好几所大学认为不合理，取消了统考分数。当然，在国内，我不是说要废除高考。

没有高考,问题可能更大。我们学校和哈佛大学最近的入学标准,就是统考。我们的想法是,怎样训练一个灵活的人,或者训练天才、尖端的领导人。统考有两部分,一是语文分析能力,一是数学分析能力。我们有一条,就是入学标准。统考中,语文拿满分,比如说800分,不管你高中分数是多少,不管你数学分析能力怎样,自动地进入大学。如果你的数理分析拿满分,也是自动进入大学,这种人可能是数学或科学的天才,虽然语文差一点,其他如地理、历史差一点,没有问题,让他进去。

菲尔兹奖获得者日本数学家小平邦彦在《懒惰的数学家的书》中指出数学教育的弊端时说过:"数学考试越来越难,在没有掌握试题模式的情况下回答问题是相当困难的。"小平邦彦曾全力以赴做小学六年级的50分钟的测试题,结果没有能够全部做出来。训练考试技巧的数学教育的特点就是:"调查了入学考试中要出的问题的模式之后,教给学生对某种模式的问题应该采用什么方法来解答,学生在考试中,首先观察问题的模式来判断自己是否能够解答,如果能够解答就立即去解答;如果不能解答,由于时间不够,因此连考虑都不用考虑就跳到下一个问题。……如果不是这样,小学生是不可能在限定时间内能够解答连数学家都不能解答的问题的。"这种数学教育就像"给猴子教把戏一样"没有什么创造性思维能力的培养。

对于数学天才的培养还要切忌不顾实际情况的一味鼓励,努力对于低智商者成为中等程度的人才是一定有效的,但对于想成为天才却是必要而非充分的。

在世界CYBER棋院事业本部长孙仲洙所写的《逃避不如享受》(长江文艺出版社,2007年)中有一段文字:

"仅仅凭借努力并不能成为最高的职业棋手,但是如果没有努力,也不可能成为最高的职业棋手。所谓的努力就是在才华的基础上一针一针地刺绣,是一项非常烦琐的工作。这种所有人都可以拥有的公平的才华(努力),使无数普通人认识到了'自己也可以成为最好'的自身潜力,这才是李昌镐真正的价值。"

某些励志名言如此蛊惑道:"只要有百分之一的希望,就要尽百分之百的努力。"没错,当一个拥有无限资源并且一天到晚只干一件事儿的时候,这种鼓励似乎无可厚非。对于一个资源(时间、金钱、能力、自律)有限并且每天要应对多种任务和挑战的真实世界中的凡夫俗子来说,这种不计后果,不顾可能,不负责任的说教无异于恶意怂恿和戕害。

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2}=0$$

所以，当我们再听到类似"世上无难事，只怕有心人"(只要你用心，世上就无难事：Nothing is too difficult if you put your heart into it)的豪言壮语时，最好不要过分激动。世界上很多事，不管你用不用心，都是很难的(看看本书后半部分就知道了，编者语)。有些事，并不因为你用心与否，就能改变其难度。这时候，还是多想想另外一组说法，比如"别在一棵树上吊死""不要一条道走到黑"等等。

没人能保证一个人付出努力就一定有成就。"只要我们努力学习，我们就问心无愧"的说法恐怕还有些道理。有没有成就不是完全由我们决定的，而问心无愧是我们自己可以做到的。

还有，想当然地将某种可能的因果关系固执己见地当成公理，极很容易混淆对前提条件和结果本身的把握和定义。比如说，如果我们坚信"只要我们努力学习，就一定能够取得好成绩"是一条公理，一个人如果付出最大努力，只差没有累死，仍然没有取得好成绩，我们便可以义正词严地推断说："还是你没有真正努力，或者努力得不够。""如果努力了，怎么会没好成绩呢？"应该说，这种逻辑近乎无赖，而这种无赖的逻辑是我们的教育中所大量充斥的。

本书是一曲数学天才维斯卡尔迪成名的赞歌。

说到数学天才的培养最得到公认的途径就是通过数学竞赛(西屋科学大赛也是一种广义的竞赛)，奥尔森说：在美国，初中孩子对数学竞赛产生兴趣的途径通常是全国中学生数学竞赛。但是如果老师不知道全国中学生数学竞赛，而且没有激发起学生对于数学的兴趣，那么许多潜在的竞赛高手就会永无出头之日了。

"在中国，有非常多的老师对数学竞赛感兴趣，而且可以研究与其相关的数学课题。实际上，在整个中国范围内有一个教练网，用来选拔培养有数学天赋的学生。每年有1 000万中国学生参加数学竞赛，而在美国，每年参加AMC考试的只有大约50万人。"

([美国]史蒂夫·奥尔森，著．美国奥数生．金马，译．北京：中国商务出版社，2005)

在两个完全不同的数量级的选手口产生了水平相当的队员，不能不使我们关注美国数学教育。在美国，每年有数千名初中学生和高一年级学生会参加全国中学生数学竞赛(Mathcounts)。这项竞赛是在1983年由国家专业工程师协会(National Society of Professional Engineers)，国家数学教师委员会(National Society of Teachers of Mathematics)和CNA保险公司共同创立的。比赛的目的是为孩

子们创造一个机会，来磨砺他们的数学技艺，并与其他孩子相互竞争，就像拼字比赛(Spelling bees)一样，是要奖励那些在压力之下成绩出众的人。在全国中学生数学竞赛中，每所学校派出由四名学生组成的代表队，首先参加地区级比赛，通常包括一个城市及其郊区。得分最高的队伍和个人再参加州级比赛，然后每个州成绩最好的四名选手组成一支队伍，进入到全国范围的角逐。尽管那些不太关注数学的人们对这项竞赛知之甚少，但在对此高度重视的学生和老师的圈子里，这项比赛会引起人们极大的兴趣。

本书主人公维斯卡尔迪是美国不拘一格选拔数学人才的多元化道路的硕果。这是除学校教育、数学竞赛之外的第三条道路，如果说学校教育是工业化整齐划一的培养模式，数学竞赛则是杂技式的小众培养模式，而西屋科学奖则是个性化的定制行为，从中胜出者更具数学家潜质。因为攻克数学难题与数学竞赛选手做竞赛题有两点区别，前者是自己找未解决问题，不受时间与地点的限制，而后者是做别人给出的已知解法的问题且规定时间和地点，所以就解决问题的方式而言，前者更像数学家。

我们从逻辑上很容易想象，这些数学少年天才在成年之后会像在高中时一样出类拔萃，最好的例子就是埃里克·兰德。在1974年参加了美国有史以来第一届国际数学奥林匹克竞赛之后，他进入大学学习数学，在普林斯顿拿到了学士学位，并在牛津大学得到了博士学位。20世纪80年代兰德在哈佛商学院任教，其间他对生物学又产生了兴趣，部分原因是他曾与身为神经系统学家的兄弟交谈的结果。他自学了分子生物学，成为麻省理工学院怀特海德学院的一名教员，并在1990年为学院创立了基因组研究中心，而这个中心迅速在人类基因排序的研究中占据了领先地位。

据专门追踪美国奥林匹克竞赛参赛队员的詹姆斯·坎贝尔(在长达25年的时间里，坎贝尔一直是青少年科学和人文研讨会大纽约分区的负责人，这是一项为在科学、工程学和数学上进行过独创研究的高中学生设立的地区性及全国性的竞赛，他的目的是为了弄清竞赛究竟会不会改变学生的一生)的研究报告披露的一些信息我们可以看到在进入人生的黄金年华以后，大多数奥林匹克队员都逐渐开始崭露头角。例如，彼得·肖尔是1977年美国奥林匹克数学代表队的队员，那支队伍当年在南斯拉夫夺了第一名。他现在是美国新泽西州AT&T实验室中的一名数学家，正在主持量子计算机的研究，目的是用原子的量子性质来制造比现在强大数个数量级的计算机。还有两名前奥赛队员成立了软件公司。其中一个至今还担任着公司的首席工程师。更有意思的是还有两名奥赛队员成为了研究犹太教法典的学者，甚至还有一个前奥赛队员作为乐团成员在卡耐基大厅里进行过演出。

再看看我国的竞赛优胜者，他们又都在哪里？

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2}=0$$

那么导致其间差异的原因何在呢？大会学家郑也夫在同其母校北京八中的演讲中这样一段讲话：

我同数学家杨乐先生曾经有过一次谈话。杨乐先生坚决反对我们现在的数学奥校。杨乐说，少年时代不要逼得太紧，不要揠苗助长，要重视兴趣，搞数学是个马拉松。前一段跑得快什么也不说明，后面什么结果，鹿死谁手不好说，前面千万不要着急。我为了让杨先生能把道理说得充分点，故意反驳他，我说："杨先生您这话说得刻薄了。听说50年代的时候，报纸上介绍您，说您高二、高三的时候做的数学题不计其数。那你做了上千道数学题今天成了数学家，然后为什么告诉别人不做这么多题呢？"他愣了一下说："我是做题做得挺多的，但没有人逼我，我自找，我有兴趣，以苦为乐，我高兴。"我觉得这里面蕴涵着一个非常大的真理成分，就是你不能从一个少年选手的出汗来判断，你不能从一个学生的做题来判断，要紧的是，这个事情必须是他自己由衷地热爱，无法按捺的一种兴趣，甚至家长说该睡觉了，别再做了，他还在那里干呢。这和逼迫是两个劲。你表面上看是相同的，但实质上是完全不同的。有的人大器晚成，在这个时候不怎么用功，那你只好听其自然。还有的孩子像杨乐，少年时候就不疲倦，就干，好！也挺好！但是这时候你不能让不愿干的人拼命干，你不能把他的元气耗尽，使他兴趣衰竭。把苹果树的花都摇掉了，以后就结不了果了。其实人是不相同的，有的人早熟有的人晚熟。大家学过数学都知道伽罗瓦，十六七岁就不得了了，17岁搞的题目是很多大数学家一辈子都搞不出来的东西。这样的天才少年是极其稀少的。我们要逼迫全民族的孩子做成人都不能负荷的劳动，最后的悲剧是必然的。

另外文化上的差异也是一个重要原因。美国奥林匹克数学领队来自罗马尼亚的移民提图·安德烈斯库说：

"在罗马尼亚，每一个学习数学的人都会热爱数学，或者至少90%的人是这样，当人们知道你是一个数学家之后，他们会说，'我数学就非常好。'而一个出租车司机会对你说，'数学是我最喜欢的学科。'这就是东欧的参赛队成绩如此优秀的原因之一，数学是那里文化的一部分。

"而在这儿（美国），小学和初中的很多老师就讨厌数学。如果你讨厌数学，你又怎么能教数学？在这个国家，当人们知道我是一个数学家之后十有八九会说，'嘿，我的数学可是一塌糊涂。'"

（[美]史蒂夫·奥尔森，著．美国奥数生．全马，译．北京：中国商务出版社，2005）

这是一本只有付出巨大努力才能全部读懂的书。

如果说本书的前半部分谈师论教尚且可读，因为毕竟都是文字，可能观点你不同意，但意思还可明白。但后半部则门槛较高，非有一定数学素养者不可读，从销售角度看是大忌。

美国作家汤姆·拉伯在《嗜书瘾君子》中对这类书冷嘲热讽，他说：

"学者编写的书的标题不外乎《早发环境向度之探索》或《狂喜的香蕉蛞蝓：以后达尔文辩证法分析后殖民农奴解放舞蹈》。不消说，压根没有人会那么想不开真拿来读(学者们之所以撰写那些东西，纯粹也只是为了保住饭碗)……

"学者们不仅专写没人要读的书，他们平日也阅读没有其他人想读的书。他们的阅读取向异常偏狭，这样子可以令他们自我感觉良好，窝在小圈圈里和区区几名同侪相濡以沫。"

（[美]汤姆·拉伯，著．嗜书瘾君子．陈建铭，译．上海：上海人民出版社，2007.）

对于读书我们一直有一个误区即要读，就读懂，不懂还读是自欺欺人，其实这里面有一个二律背反。不懂之懂方为真懂，还是拿名家说事。

杨振宁教授说：

"我在西南联大念书的时候，王竹溪先生刚从英国回来。他作了一系列关于相变(Phase Transition)的演讲。那个时候英国、美国有很多人搞这个东西，搞得非常热闹。记得当时听王先生演讲的人很多，我也去听了。可是我大学还未毕业，没有听懂。是不是白听了呢？不然，因为从那以后我就不时地对这个问题注意。听王先生的演讲是在1940年前后，我后来写的第一篇关于相变的文章是在1951年，即是十年以后。这十年期间断断续续地对这类问题的注意，最后终于开花结果了。以后几十年相变工作是我的主要兴趣之一，所以，1940年前后听王先生的演讲这个经历对我的研究工作有了长远的决定性的影响。"

（杨振宁．关于做学问方法的几点建议．原载孙幼夫主编《海外学者论中国》．北京：华夏出版社，1994）

其实这就是所谓渗透法，你总在一个不懂的问题场中泡着，总有一天你会顿开茅塞，恍然大悟，这里面要素有三个，一是问题要大，要重要有价值，二是坚持时间要长，不能半途而废，那样的话你可能就真的永远不会懂了，三是要扩大战果，因为这时的懂会是呈片状的，可能就此精通了某一领域。

另一个例子是我国著名理论物理学家周培源先生，用吴大猷的话说："周培源念的是理论物理，也是一位真正念相对论的人。"他1928年曾在德国莱比锡大学随海森伯从事科学研究。1929年赴瑞士苏黎世联邦工业大学，随泡利(W. Pauli)从事研究。

周培源先生的女儿在回忆他的父亲时曾有一段文字：

> "他刻苦学习，成绩优良，特别是对物理、数学上的难题，经过苦心钻研后，都能解出答案，这愈发增加了他学习理论物理的信心，而且最后选定相对论为自己奋斗的目标。当时北大开设了很多相对论的讲座，尽管从清华园进城的交通很不方便，只能坐人力车、骑驴或走路，但是父亲还是积极建城到位于马神庙的北大理科去听报告。他说：'即使听不懂，也要去听。'
>
> (杨舰，戴吾三．清华大学与中国近现代科技．北京：清华大学出版社，2006)

据管理学者马浩撰文介绍：

著名领导学大家沃伦·本尼思教授也有类似的经历。他当年在麻省理工学院听诺贝尔奖得主萨缪尔森讲数理经济学博士课程的时候就听不太懂。

据本尼思教授自己回忆，萨缪尔森讲一阵子，就会停下来，问他："沃伦，你听懂了么？"只有沃伦点头后，他才接着往下讲。因为，如果反应最慢的沃伦听懂了，全班同学就肯定都听懂了。

在能否读懂这个问题上，首先要顾及的是数学中严格性和内容的丰富性是此消彼长的，数学哲学泰斗拉卡托斯曾说："在数学领域中，严格性长一分，内容就减一寸。"(伊姆雷·拉卡托斯．证明与反驳．方刚，兰钊，译．上海：复旦大学出版社，2007)

所以我们必须处理好严格性和丰富性的关系，我们在坚持严格性的基础上将丰富性最大化，理由是在科学至上为科学主义统治世界的今天，伪科学打着科学的幌子大行其道，特别是数学领域在几乎相当甚至超过主流数学家人数的"民间数学家"的喧嚣之下江湖气日盛。任何不经意的"浪漫"都会引起伪科学的强劲反弹，大有喧宾夺主之势。所以我们尽量追求数学上的严密。这样尽管

可能会给读者造成阅读上的困难，但困难地读少量真东西比轻松地读大量伪知识要有意义得多。

其次是销量与选材的平衡问题。

数学语言本身是现代阅读中的冷面杀手，不仅纯数学书销量令人尴尬，就是在文学作品中提到它也会大受影响，《三联生活周刊》主编朱伟先生，曾对王小波小说有如下评论：

> “我一直认为，王小波的小说中写得最好的是《黄金时代》与《红佛夜奔》，《黄金时代》是他的情感的最自然流泻，带着他自己透明的青春气息。《红佛夜奔》则是他想象力与技术的最好发挥。但遗憾的是，相比《黄金时代》，喜欢《红佛夜奔》的人却不多。我想，也许一是其中不断穿插的‘费尔马定理’影响流畅的阅读……”
>
> （朱伟.有关品质.北京：作家出版社，2005）

从本书的区区 3 000 册的印数看。它注定是一本小众图书，对于小众图书，社会学家郑也夫有段高论：“其实正是千万个小制作才孕育着艺术与学术的生机，才构成了文化世界的生态。小草一根没有，光秃秃两棵参天大树，这叫树林子？这是大自然？这是魔幻世界，这是对文化生态的人为摧残的结局。愿每个诚实本分的人坚持自己卑微的爱好，殚精竭虑于自己的小制作。”（《新京报》2006 年 4 月 8 日）

我们祝愿小草也会有春天。

刘培杰

2007.10.30

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2}=0$$

目录

第一章　教育篇

第一回　寻英才　西门子巨资设奖　//1
　　　　解难题　美少年一举成名
第二回　论天才　自古英雄出少年　//12
　　　　观历史　超常儿童有特征
第三回　播龙种　收获跳蚤心不甘　//20
　　　　徒羡鱼　退而结网尚不迟
第四回　倡素质　中美教育有殊途　//25
　　　　看试题　一个有趣一个枯
第五回　觅天才　克雷基金供经费　//53
　　　　探索题　威斯康星来主持
第六回　搞应试　中国科举有传统　//65
　　　　萧文强　古代官学细细说

第二章　基础篇

第七回　建模型　微分方程有奇效　//82
　　　　数变量　一个以上称偏微
第八回　巧分类　线性拟线非线性　//88
　　　　仿解析　椭圆双曲抛物线
第九回　用矢量　奥高公式于曲面　//91
　　　　格林式　拉普拉斯和泊松

第十回　有限元　拉氏方程变积分　//98
半空间　迪氏问题有新意

第十一回　定区域　连续函数可调和　//100
等价于　任意边界值可解

第十二回　存在性　解方程前要考虑　//107
表达式　泊松积分表调和

第十三回　调和性　拉氏方程可判断　//117
黎曼面　局部调和难成片

第三章　应用篇

第十四回　PDE　数学模型的基础　//127
造飞机　机翼设计全靠它

第十五回　造导弹　超音绕流气动力　//131
数学家　职业习惯是推广

第十六回　安普顿　土木工程创奇迹　//137
边界元　加权剩余特殊用

第十七回　金融热　期权期货难定价　//139
获诺奖　随机变量入方程

第十八回　炒期货　伊藤定理有奇效　//140
布莱克　随机倒向偏微分

第十九回　联系深　拉氏算子进数论　//143
涉及广　模型式中非解析

第二十回　朗兰兹　群表示论与自守　//145
华罗庚　利用数论解偏微

第二十一回　说引入　三角函数和序列　//147
医疗中　拉东变换是关键

第二十二回　杆横振　方程列为双调和　//151
方程解　一到四阶有导数

第四章　试题篇

第二十三回　创意新　问题征解播遐迩　//155
解答巧　构思奇特不凡响

第二十四回　竞赛热　风气蔓延到大学　//158
题目好　拉普拉斯是经典

第二十五回　读教材　纸上来的终觉浅　//160
做习题　深知此事要躬行

第二十六回　伯克利　博士学位资格试　//163
重几何　微分算子不变性

第五章　离散篇

第二十七回　华罗庚　深入之后能浅出　//167
比解析　差分方法胜一筹
第二十八回　光滑好　泰勒公式能展开　//180
亚光滑　网格算子来帮忙
第二十九回　若方程　解析表达式难求　//182
拉网格　有限差分来逼近
第三十回　计算机　复杂过程能模拟　//188
造邻域　方程个数可以查

第六章　大师篇

第三十一回　涉猎广　数学天文称大家　//191
从政弱　内政部长难应付
第三十二回　品学优　迪利克雷称领袖　//196
外语棒　法德之间架桥梁
第三十三回　磨坊工　成才全部靠自学　//199
查经典　位势源于电磁学
第三十四回　读博士　黎曼论文有破绽　//205
严格化　卡氏几十年后补
第三十五回　读经典　大师思想蕴其中　//208
看原文　真知灼见细品味
第三十六回　开尔文　迪氏原理提出人　//210
有漏洞　希尔伯特来拯救
第三十七回　庞加莱　潮汐理论开路人　//212
取极限　边值问题一般化
第三十八回　阿达玛　举出著名之反例　//214
佩龙氏　定义次调和拯救
第三十九回　陈建功　偏微方程典型化　//217
读遗稿　冯康教授结果新
第四十回　演讲中　迪利克雷抛定理　//220
不完全　魏氏举例欲推翻

第七章　概率篇

第四十一回　掷硬币　不撞围墙不回头　//223
　　　　　　用概率　偏微方程数值解

第四十二回　一醉汉　曼哈顿岛蹒跚行　//225
　　　　　　交罚款　蒙特卡罗解方程

第四十三回　裂痕深　离散连续相径庭　//226
　　　　　　拉氏阵　图论分析美妙桥

第四十四回　看当今　概率大师数杜布　//228
　　　　　　扫除法　迪氏问题例外集

第八章　物理篇

第四十五回　圆盘上　稳态温度如何求　//233
　　　　　　离变量　拉普拉斯变柯西

第四十六回　引力律　理论推导乏根据　//236
　　　　　　定位势　无源之点散度零

第四十七回　银河系　行星之间靠引力　//241
　　　　　　球对称　最简单是引力势

第四十八回　变分法　数学物理方程多　//244
　　　　　　可容许　嵌入算子性质好

第四十九回　静电场　静止电荷无旋场　//245
　　　　　　静磁场　稳定电流无源场

第五十回　膜平衡　变分泊松伽辽金　//254
　　　　　　广义解　三者之间是等价

第五十一回　拟线性　弹塑渗流与电磁　//258
　　　　　　现代化　山路引理莫斯尔

第九章　分析篇

第五十二回　联系密　迪氏问题重表示　//266
　　　　　　内在美　格林公式新形式

第五十三回　新测度　边值函数所确定　//268
　　　　　　形象化　圆心所张欧氏角

第五十四回　普适性　调和概念涉及广　//272
　　　　　　喜综合　分析代数是一家

第五十五回　赶潮流　小波分析异军起　//274
　　　　　　发新芽　迪氏问题又开花

第五十六回　帕格曼　共形映照核函数　//276
五十年　历久弥新真经典
第五十七回　陆善镇　携手怀斯写专著　//292
涉猎广　半单李群韦尔房
第五十八回　限制严　实际问题难满足　//295
欲放宽　广义迪氏问题代

第十章　几何篇

第五十九回　多角度　不同形式难易殊　//302
球坐标　特殊函数应用广
第六十回　分析学　绘制矿藏之全貌　//305
几何学　寻找美丽的矿石
第六十一回　外微分　拉氏算子一般式　//307
协变性　脱离坐标最普遍
第六十二回　听鼓声　判断鼓面和形状　//320
谱几何　黎曼流形谱研究
第六十三回　基本场　客观世界有度量　//338
算子众　黎曼流形为舞台

第十一章　复分析篇

第六十四回　复分析　单叶函数历史久　//349
多连通　迪氏问题可解出
第六十五回　复变数　迪氏问题有新意　//352
表积分　解析函数双周期
第六十六回　多复变　引入中国华罗庚　//370
泊松核　特征流形典型域
第六十七回　许以超　多复变中显身手　//372
西格尔　正规对称齐性域
第六十八回　四元数　汉米尔顿偶发现　//378
构空间　迪利克雷再调和

第十二章　泛函篇

第六十九回　世纪初　希尔伯特指方向　//379
到近代　泛函分析入殿堂
第七十回　新热点　泛函分析非线性　//381
古典解　强解弱解极大值

第七十一回 抽象度 希尔伯特空间高 //385
结论好 线性泛函是内积

第七十二回 泛函中 黎兹定理是基础 //388
解偏微 先求弱解再光滑

第七十三回 稳定性 边界稍作变动后 //392
等价于 紧集调和之逼近

第七十四回 紧支撑 广义函数算子解 //396
椭圆型 索伯列夫空间中

第十三章 综述篇

第七十五回 赫尔曼 位势理论投影法 //404
戈尔丁 泛函分析正则性

第七十六回 位势论 迪氏问题蕴其中 //408
吴炯圻 发展历史从头说

第七十七回 历史久 前苏数学有传统 //415
立意新 开创结果数第一

第七十八回 椭圆型 近代进展专家述 //417
到三维 迪氏问题解不恒

第七十九回 溯源头 有限长杆热传导 //424
齐民友 偏微算子讲从前

第八十回 世纪初 希尔伯特指方向 //433
回头看 谁言庞氏颓废派

附录

第八十一回 搞类比 微分方程变积分 //438
再拓广 奇异取代非奇异

参考文献 //460

后记 //468

教育篇

第一章

第一回　寻英才　西门子巨资设奖
解难题　美少年一举成名

年仅16岁的美国加州少年迈克尔·维斯卡尔迪(Michael Viscardi)2006年1月5日摘取全美高中科学大赛——“西门子西屋科学奖”桂冠,并斩获高达10万美元的奖学金,这也是大赛颁给参赛个人数额最高的单项奖金.

维斯卡尔迪是凭借对一个历史悠久的数学难题——“迪利克雷(Dirichlet)问题”的全新解法获奖.评审小组对这一解法的点评是:“可以帮助人们在机械和物理领域解决某些实际问题,比如设计更符合力学原理的飞机机翼.”

维斯卡尔迪并非像我们想像的那样就读于名校,其实他根本就没在学校接受完整教育.他在学校里只读到5年级就“辍学”在家,之后一直在家自修课业,但每周会有三天去加利福尼亚大学圣迭戈分校上数学课.

维斯卡尔迪的父亲是软件设计师,母亲是一位拥有哲学博士学历的全职主妇.

得知获奖消息时,维斯卡尔迪的第一反应是“不敢相信”.“实在让人难以置信,我现在还在震惊中呢!”他在接受媒体采访时坦言.

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2}=0$$

"迪利克雷问题"实际上是数学家勒热纳·迪利克雷在1850年在有关位势理论的研究报告中提出的一个公式,以确定椭球体对其内部或外部任意质点的引力,又称"第一边界值问题".

对于这一古老问题,维斯卡尔迪提出全新解法,被评审专家赞赏为"在机械和物理领域的实际应用方面存在巨大潜力,比如,用于飞机机翼的设计".

维斯卡尔迪此番并非是独立攻克"迪利克雷问题",他是在加利福尼亚大学圣迭戈分校一位教授的协助下,花了大约6个月时间潜心研究这一难题.

尽管同维斯卡尔迪仅有几面之交,但比赛总评委——美国国家卫生研究院顾问、前研究总监康斯坦丝·阿特韦尔却对他的"天赋"下印象深刻.

"他是一名在数学领域有着超常智力的学生,非常聪慧,"阿特韦尔如此评点,"这让我们在提问中,几乎无法根据常识来判断他的理解能力到底有多强.毕竟,他才只有16岁."

"西门子西屋科学奖"专为在数学、科技方面具有才能的高中生提供深造机会,1998年以来,由西门子基金会每年提供总额近200万美元的奖学金和其他多项奖励.

2006年共有19名学生入围决赛,包括6位个人和6个团队.除了个人组和团队组第一名得奖10万美元外,入围者都能得到1万至5万美元不等的奖学金.

维斯卡尔迪斩获的是个人组冠军,获得团体组头奖的是17岁的安妮·李和16岁的艾伯特·谢,他们都来自亚利桑那州,两人分享了10万美元奖学金.

他们的科研团队改进了电脑技术,使其能够在DNA上定位一些遗传病基因,比如老年性痴呆症、孤独症和狂躁型抑郁症.

类似于维斯卡尔迪的西方理科天才少年近年层出不穷.

2006年10月31日的《中国青年报》以《"挪威黑客天才"咬破"苹果"》为题又介绍了一位天才少年.

前不久,苹果公司iPod播放器的保护代码遭黑客破译,日前,这名黑客的身份终于弄清.据英国媒体报道,原来他竟是7年前破解了DVD光盘所使用的CSS防非法复制技术的挪威天才少年,如今他已经拥有了一家软件公司.

日前,苹果公司证实,不久前破译iPod播放器保护代码的黑客,竟是一个昵称为"DVD乔"(DVDJon)的挪威小伙子乔·莱克·约翰森(Jon Lech Johansen).2006年10月25日,22岁的乔·莱克·约翰森表示,他成功破译了iPod的代码,从而使在任何网站上下载的音乐都可以通过iPod播放,而不一定要在iTunes购买歌曲了.

据悉,在苹果公司iTunes上下载的歌曲只能在iPod播放器中播放,从其他网站上下载的音乐无法用iPod播放.正是凭借这一捆绑方式,苹果公司在短短

几年时间里垄断了美国甚至全球的数字音乐市场.自从5年前,苹果公司推出iPod以来,已经销售了6 800万台,占据了美国60%的音乐播放器市场,占有约88%的美国在线音乐购买市场.消息人士透露,苹果公司正咨询律师和软件专家,试图通过法律手段处理此事.

约翰森表示,他将允许其他竞争对手使用他的技术,并打算利用该技术牟利.约翰森说,其实苹果电脑公司也会从他的技术中获利,因为越来越多的政府已经对苹果软件的合法性不满.几个月前,法国政府通过了一项法令,要求苹果公司取消iPod播放器的限制格式,使在iTunes之外下载或购买的音乐能够兼容播放.然而,经过几个月的谈判,苹果公司考虑到经济因素,不愿放弃这种限制.

7年前,年仅15岁的约翰森成功破译了DVD光盘所使用的CSS防非法复制技术,被誉为一名少年天才.1999年,自学成材的他成功编制出了破译DVD的黑客软件DeCSS,并在网络上传播,由此导致众多好莱坞电影被解密,并使片商蒙受数十亿美元的经济损失.2002年,挪威奥斯陆地方法院开审约翰森一案.最终,约翰森只是缴纳了可观的罚款,而他的大名已远播世界.

这两位天才少年之所以如此之快便得到了人们的承认,并名扬世界的一个原因是因为他们选择的都是具有硬指标的领域——数学和IT.所谓硬指标是别人都想解决但都没能解决,别人都做过但都做得不好.比如跑百米所有健全人都跑过,但没人能突破9秒,如果你能那么你就是当然的英雄,不需要门第(作家叶兆言成名后有人便说他是沾了祖父叶圣陶的光,艺术家艾未未成名后也有人说因为他是艾青之子)、教育背景、社会地位等加以烘托.对于学术研究领域而言,数理科学、技术发明具有这类特点,而哲学、艺术、文学则不然.对此中山大学岭南学院的王则柯教授说了一个故事.

"1997年元月,《光明日报》用一个整版的篇幅,登载长篇通讯《一个小保姆和一部未出版的书》.在我的记忆中,《光明日报》用一整版的篇幅来宣传一个人,这个小保姆是第一个(早年间陈景润也是其一).这件事情是怎样的呢?被歌颂的那个小保姆,她从来没有受过高等教育,但是通过自己苦学,写出了学术巨著.你看一下那个小保姆的著作的标题,一个是《"当代帝国主义论"的新发展》,另一个是《西方经济学透视》.我自认为已经在经济学领域中泡了这么久了,但绝对不敢写这种书,在我心目中,必须是大师级的人物,至少要像(汪)丁丁这样的学者(汪丁丁是学数学的经济学人.以览读量大、旁征博引而著称,同样,也因此遭人诟病,在那些人心目中,任何人的学问都是需要边界的——编者注),才有资格写这种书.恐怕丁丁也不会去写,但偏偏就是这样一个小保姆写出来了.《光明日报》的报道说,这个小保姆,'14岁考大学,15岁考研受挫,16天写18万字.'在她通过保姆市场的'双向选择'来到北京一个家庭当小保姆后,

还打赢了好几场官司.

"这个故事具体是这样的:陕西有一个学生,她考大学不顺利,据说本来考上中山大学了,但因为种种原因没有被录取,但她非常用功,然后去考研,各门课成绩都不错,但只有一门课考得不好,差了几分,结果受挫.后来,她遇到西北大学的文教授.文教授是考古学家,经常鼓励和帮助她,结果,她跟了文教授不久,几个月的时间就写出了两篇考古学的论文,是关于仰韶文化什么的.有一次,她把论文送到北京的一个会议,被选中了,这个细节可能是真的,因为有不少会议,都是有文章交上来就行,来一篇就算一篇.论文被选中后,教授又带她到了北京,把她介绍给一些学者.这样她就在北京住下来了,而且当了小保姆.她当小保姆不计较钱,就希望能有时间看书,谁家里书多,她就给谁做.最后她做了李家的保姆,李先生是国家某经济职能局的前局长,地位很高,文章说李先生是在保姆市场上与她认识的,经过双向选择,到了他家.这位小保姆以'16天写18万字'的速度完成的著作,水平怎么样?《光明日报》的文章说,很多专家,有名有姓的专家,都给予好评.这里面除了李先生以外,还有西北大学经济学院的何教授(该不是张维迎的老师何教授吧),这些德高望重的学者和官员,都给予小保姆的著作很高评价.这个小保姆,她考古又行,经济学又行,打官司也行,考托福也得高分,当时我看到这篇文章,觉得比较离谱,离开常理太远."(王则柯,著.智慧何以被善良蒙蔽.北京:中信出版社,2006)

中国人太过于相信"奇迹",他们总是不自觉地把自己想用小代价换取大成功的投机心理投射到一个现实人物的身上,而事实证明这个所谓的真实人物往往是虚构的是极不真实的,但就是有人宁愿信其有,不愿信其无,果不其然.不久,"小保姆事件"就被《南方周末》揭出造假,又是一出天才横空出世的闹剧(但2007年高考中,12岁江西女孩尹微考了598分,没人质疑,只有惊奇,因为标准客观).

所以说按张爱玲的话说"出名应趁早",但最好应在数理方面,否则如韩寒、余杰等人虽获商业意义的成功,但并不被所有人认可,岂不可惜.所以要想少年成名,除体育、文艺外最佳领域便是数学与IT,原因之一是数学足够重要.其实中国人从骨子里对数学是崇敬有加的.从中国古代起对数学的赞美就没停过,比如华衡芳在《算法须知总引》中指出:

> "算法之事,不独日用饮食,米盐零杂.有无相易,子母互权,必藉算法为用者.即如度土田而推积步,计道里而定均输,因高广而立商工,凡可尺量寸计而得者,皆有算法存焉.若夫楼台山岳之高,濠堑坑谷之深,河梁海口之遥且阔,虽不能身履其地,苟可望而测之者,亦可算得其数.至于仰观天文,俯察地理,尤以算法为大用焉.故深于算法者,可以析至

繁之数．穷至赜之理，造至精至奇之器，夺造化之权兴，泄天人之秘奥，国家因此以富强，天下俱得其便利，其功岂浅鲜哉！”

（华衡芳《行素轩算稿》之七）

华衡芳将数学提到了足以影响国家富强的高度．

在《算经十书》之一的甄鸾《孙子算经序》中有：

“夫算者，天地之经纬，群生之元首，五常之本末，阴阳之父母，星辰之建号，三光之表里，五行之准平，四时之始终，万物之祖宗，六艺之纲纪．稽群伦之聚散，考二气之降升，推寒暑之迭运，步远近之殊同．观天道精微之兆基，察地理从横之长短．采神祇之所在，极成败之符验．穷道德之理，究性命之情．”

这又把数学的重要性推至无以复加之程度，真是悠悠万事，唯此为大，如此之高的评价甚至超过了近代数学的发源地—西方．在康德心中最崇高的位置是星空及道德，而数学实为下一层次之物．

中国古人在赞美数学的同时也感叹数学之难，如：

“夫数学业也．分之则有度有数，度者量法，数者算术，是两者皆由浅入深，是故量法最浅者方田，稍进为少广为商功而极于勾股，算术最浅者为粟布，稍进为衰分，为均输，为盈亏，而极于方程．方程之于算术，犹勾股之于量法，皆其最精之事，不易明也．”

（梅文鼎，《方程论发凡》）

觉得某事难是对从事此项工作的人产生敬仰之心的前提．在整个社会评价体系中难者自然靠前，否则就会发生扭曲，如搞导弹的不如买茶蛋的．解放前，一位数学教授的工资是工友的百倍以上．熊庆来当年在宴请来访的美国数学家维纳时曾邀全系教师在颐和园大摆宴席，是何等风光．

在《梅氏丛书辑要》《堑堵测量》卷二中梅文鼎指出：

“且夫数者所以合理也，历者所以顺天也．法有可采何论东西，理所当明何分新旧？在善学者知其所以异，又知其所以同．去中西之见，以平心观理，则弧三角之详明，郭（守敬）图之简括，皆足以资探讨而启深思．务集众长以观其会通，毋拘各相而取其精粹．”

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2}=0$$

其实数学在中国被全社会所重视.并没有什么抽象的大道理,而是大家都看到了它的应用成果,对自己有用对全社会有益的东西谁不爱.这纯粹是朴素的感觉使然,这也是让那些数学领域的少年天才得以受到众人瞩目的社会土壤.

那么下一个问题便是像维斯卡尔迪这样的数学天才为什么自古中国少有,原因是什么,是不是我们的教育方式有误.

任鸿隽先生刚从美国回上海时,在上海寰球学生会上发表演说时谈到:"诸君年长一点的,大约还记得科举时代,我们全国的读书人,一天埋头用功的,就是那'代圣贤立言'的'八股',那时候我们所用的书,自然是那《四书味根录》、《五经备旨》等等了.过了几年,八股废了,改为考试策论经义.于是我们所用的书,除了《四书》、《五经》、《通鉴》、《三通》之外,再添上几部《通鉴辑览》、《三通考辑要》和《西学大成》、《时务通考》."(《新青年》第六卷第三号,1919 年 3 月 15 日)

由此可见在我国早期培养不出少年数学天才的重要原因之一是:教育的内容首先就与现代科学格格不人,更要命的是落后的教育之理念,特别是对数学的态度,梁启超曾说:

> "算学为最古之学,新发明甚难,不如他种科学之饶有发展余地,学者不甚嗜之,亦无足怪.虽然,算学为一切自然科学之基础,欲治科学,非于算有相当素养不能为功,昭昭然也.然环视今之青年,在学校中对于此科之兴味何衰落一至此甚也!学之数年,恐其所得素养比诸门外汉如我者所胜无几也,反不如百余年前专读'线装书'之老经生犹知以此学为重也.呜呼!此非一门学术兴废之小问题,实全部学风盛衰之大问题也.厌繁重而怠探索,功课为机械的授受,不复刻入以求心得,惟喜掇拾时趟的游谈以自欺欺世.如此,则凡百学术皆不能唤起真挚之兴味,岂惟算学?结果非将学问向上之路全付榛荒焉不止也.呜呼!今之青年,有闻乾、嘉、道间诸先辈之学风而知奋者耶?"
>
> (梁启超.中国近三百年学术史)

哈佛大学数学系教授丘成桐在商务印书馆为庆祝建馆 100 周年所举办的主题为"廿一世纪的中国与世界"的四个公开的学术讲座中指出:

> "中国数学家对数学的态度不是一朝一夕形成的,跟整个中国文化传统有关.两千年来中国以人为本位的想法,使比较基本抽象的科学不受重视,不讲求逻辑.名家的'白马非马',以后变成异端邪说;《庄子》

〈齐物论〉:‘六合之外,圣人存而不论’,荀子批评老子:‘蔽于天而不知人.’可知圣人以人为本,不讲究抽象推理的科学.《九章算术》的作者以应用为目的,不求公理化,也不以美为依归,反而妨碍数学的发展.儒家讲究人伦,君君,臣臣,父父,子子,还有师生的关系,三纲五常比科学的客观性更为重要.虽然王守仁(阳明)讲格物致知,其目的也在为人服务,天人合一的目标也在于人,不在于天……”

其次是教育过分功利化.关于教育的功利目的,培根曾做过系统的阐述,他曾谴责过“一种对心灵的崇拜……由于这种崇拜,人们大大放弃了对自然的思考,放弃了对经验的考察,只在他们自己的理性和幻想中上下翻滚.”培根相信,知识应当有益于人类,并为人类所利用,“不应当像高级妓女那样只是为了寻欢作乐和满足虚荣心,或者像女奴那样为了供主人使唤;而是像配偶那样传宗接代,带来幸福与欢乐.”(Clark kerr,著.大学的功用.陈学飞,等译.南昌:江西教育出版社,1993)

红衣主教纽曼(Cardinal Newman)特别反对培根的幽灵.他说:“知识可以有它自己的目的,这就是人类智慧的积累,任何一种知识,只要它果真如此,就是对它自己的报答.”他认为教育“其目的在于提高社会理智的格调,培养大众的心智,净化民族的情趣,给大众热情提供真正的原则,使大众热情达到固定的目的,扩充和节制时代的观念,促进政治权力的行使,以及改善私人生活的交往.”它培养一个人“能胜任任何职位,并容易掌握任何一门学科.”

为了使我们更清楚地看到我们天才教育的缺失.一个好的方式是考查一下那些人们公认的科学天才的特征及成长历程.牛顿的传记作家怀特向我们讲述了他的读书情况:起先,艾萨克对上学缺乏兴趣,这从他什么都不在乎的性格和他只对学术才认真的态度可以察知.他学习得很快,是个天赋的无师自通者,可是老师们大多忽略他,同学更不会喜欢他.那个时期,学生被要求死记古典语文和宗教教义等核心课程,完全不需要想像力,故也启发不了怀疑的能力.以现代人的思维而言,牛顿在进入剑桥大学之前,从来没有受过正式的数学训练,却能有那么伟大的科学成就,乃是令人难以置信的事情(即使在剑桥,大一的课程表中也没有数学这门课).艾萨克最早是以念他继父遗留下来的书籍来打发时间的,后来他在格兰瑟姆的圣伍扶蓝(St. Wulfram)教堂图书室中找到一些书来读.这教堂的走廊上方有间狭长的房间,里面收藏了许多书,但大部分无味如干草,只不过是些神学论文和清教徒的宣传品,那是学校里一位老师安杰尔(John Angell)要牛顿读的,他是个清教徒修士.

那些教堂里的书籍和安杰尔修士的教化,带领牛顿信奉宗教教义,并使他一生虔信,可是这些书并没有提供他所需要的知识内容.幸亏他又找到了别的书.引导他通往科学方面的最重要的一本书是《自然与工艺的神秘》(《The Mys-

teries of Nature and Art》),作者名叫约翰·贝特(John Bate).牛顿发现这本书时年约13岁,他被这本书完全迷住了,特地花了两个半便士买了一本练习簿将书上重要的部分抄录下来.(迈克尔·怀特,著.牛顿传.陈可岗,译.中信出版社;辽宁教育出版社,2004)

由此可见天才都不是传统教育的产物,而基本上是自我教育与广泛阅读的结果,也就是通常我们所说的自学成材,自学成材所需的两个条件是相对宽松的教育环境与大量多样化的内容丰富的书籍的存在.按照这个指标我们来考察一下当前我们的少年儿童所处的教育环境.

首先是高度统一的全国同步的单一规格的中学教育,一切教育理念与教育内容、教育手段均围绕着高考指挥棒转,学生除必要的休息时间外的一切时间都被占用.毫无天才发展之空间,都是填鸭没有自学.

像维斯卡尔迪一样,爱因斯坦也是一个自学成材的人."在他早期的书信和成年以后的著作中,'自学'是一个经常冒出来的字眼.对一般的年轻学生而言,这样一种观念是对无纪律的怂恿,也许是一种逃避的机会,但对爱因斯坦来说,按照自己的兴趣学习是他受教育的主要方式."

"爱因斯坦很小就已经开始阅读数学和科学书籍了,而这纯粹是受到了好奇心的驱使.在苏黎世,他博览群书,除了最新出版的科学杂志,其阅读领域远远超出了教授们规定的范围,成年以后,他从不因一本书据称是经典而读它,只有他觉得有兴趣时才会去读.这也许和牛顿有些不谋而合,牛顿也是一个兼收并蓄的读者,他似乎并没有读过他那个时代以及许多前人的名著.用天文学家杰拉尔德·惠特罗的话来说,'爱因斯坦与其说是一位学者,不如说更是一位艺术家;换句话说,他的头脑并没有被他人的想法塞得太满.'他的老朋友,诺贝尔物理学奖获得者马克斯·玻恩回忆说:'爱因斯坦多次表达了这样一种思想,一个人不应把追求知识与谋生的职业挂起钩来,那种研究应作为一项私人的业余职业来进行.当他在伯尔尼的瑞士专利局做小职员时,就写出了这一篇伟大著作……然而他没有想到,一个人要想把科学当成业余爱好来从事,他就必须是爱因斯坦.'"([英]安德鲁·罗宾逊,编著.爱因斯坦相对论一百年.张卜天,译.长沙:湖南科学技术出版社,2005:35).

为了与之对比,我们再来考察一下我们当前的学术环境,李醒民先生在其专著《爱因斯坦》的自序中有这样一段文字:

"当前,在中国学术界,出现了这样的怪现状,摊煎饼似的文化快餐纷纷扬幡开张,穿时装式的学术商品成批量地随行就市.'丑陋的学术人'如过江之鲫.这些人散发着犬儒主义和物欲主义的病毒,把哲学和学术当作乞讨残羹剩汁的饭钵或捞取外快的手段.为哲学而哲学,为学术而学术,为思想而思想或被视为异端,或被看做蠢行.

"这是哲学的堕落!这是学术界的不幸!这是学人的悲哀!"(李醒民,著.

爱因斯坦.北京:商务印书馆,2005:2)

这种现象不仅在哲学界在数学中也存在.

在纪念爱因斯坦逝世 50 周年时,一位网友以"假如爱因斯坦生在中国"为题展开联想,虽然主题看似荒唐,文字貌似调侃,却也发人深省.

我在想,假如爱因斯坦出生在当今的中国,而不是 100 年前的德国,恐怕连高中都考不上.

爱因斯坦喜欢动脑筋,常常与老师上课所讲授的内容不合拍,再加上语言能力发育迟缓,上课发言时,总是显得很迟钝,这使得老师非常生气,并常常被喝令出去,常常要在走廊里站上一两个小时.他的这些表现,在我们今天的很多学校,足以使他被降到差生班.而且,我们今天的教育,用的是统一的教材,进行的是统一的考试 ,爱因斯坦上课时老是思考自己的问题,又怎能参加各种各样的考试?

就算出生在中国的爱因斯坦勉勉强强能考进大学,也未必能攻读物理学.因为,他的父母可能逼着他去学更能挣钱的学科.一个显而易见的现实是,当今物理学在公众中的影响明显削弱.过去,是最好的学生在学物理,现在即使是很有物理天赋的学生也都奔计算机、经济、法律等实用学科去了.

即使出生在中国的爱因斯坦如愿读了物理学,并且博士毕业,继续在高校进行其物理学研究,目前各高校对研究人员的考核制度也会将其旷世才华轻易地葬送掉.据了解,现在各高校对教师一般都实行工作业绩量化考核制度,即要求教师在规定时间内必须在相应的刊物上发表相应数量的论文,承担相应数量的科研项目,拿回多少万元的科研经费等.重数量轻质量的考核,让科研人员疲于奔命、忙于应付,同时也助长了科研工作的浮躁风气,为学术腐败的蔓延推波助澜.

其实我们有时更多地把自己的原因归结到社会环境,深层的原因在于我们根深蒂固的功利化价值观.

1946 年爱因斯坦出版了他的《自述》,希尔普(Paul Arthur Schilpp)博士将其译为英文,爱因斯坦说:"当我还是一个相当早熟的少年时,我就已经深切地意识到,大多数人终生无休止地追逐的那些希望和努力是毫无价值的,而且,我不久就发现了这种追逐的残酷,较之今天,这在当年是更加精心地用伪善和漂亮的字句掩饰着的,每个人只是因为有个胃,就注定要参与这种追逐.而且,由于参加这种追逐,他的胃是有可能得到满足的;但是,一个有思想、有感情的人却不能因此而得到满足."

有如此价值观便有了强大的内心世界,也就拥有了鲜明的个性与超强的丝毫不为环境左右的定力,哪怕身处应试环境也会暗渡陈仓.

1949 年 5 月,爱因斯坦在《每月评论》(创刊号)上发表的《为什么要社会主义》一文中指出:"这种对于个人素质的社会性的摧残,我认为是资本主义带来

的最大的祸害，这种祸害侵蚀了我们的整个教育制度．在这种教育中，青年人被灌输过分渲染的竞争精神，被教育出贪婪地渴望成就，并且以此来准备他们以后的职业生活．”

1933年12月，在普林斯顿大学新生出版物《一年级新生》中爱因斯坦致大学生说：“绝不要把学习和研究当成一种义务，而应该把它看做是一个令人羡慕的机会，它使你在精神领域中能为了你们自己个人的愉悦，及有益于以后你将为其工作的社会，而体会认识到自由解脱的美好．”（唐·奥伯道夫尔．普林斯顿二百五十年．普林斯顿大学出版社，1955：127）．

丘成桐先生曾对内地中小学中的“奥数热”现象大泼冷水．他说：“做奥数竞赛绝对成就不了数学大国．数学其实是做研究，而奥数却只是做题目．奥数金奖只能证明考试的能力，而不是研究的能力．研究的根本是自己找问题，而奥数训练的不是这个，只知道做别人的题目，而不知道去做自己的题目．有些地方将学生聚在一起，进行专门的数学奥林匹克竞赛培训．获了奖又怎么样？”丘成桐告诉记者，他教过好几个得过奥数金奖的中国留学生，这些学生的学问太狭窄，对考试有能力，对思想没能力，最后连毕业都困难．（丘成桐．数学之美．载于《影响中国》．上海：文汇出版社，2006：103）这种现象特别容易出现在大一统的教育格局中，自上而下地制定选拔标准，不需要创新，只要求消化、理解、吃透上级的精神．这在大多数教育体制中都是不可思议的．市场经济的主体是商业，商业追逐的是利润，利润的唯一来源是创新．因为同质化就意味着淘汰，所以在这样的环境中创新能力是一种从下至上的自发要求．

香港的数学会考试卷就体现了对学生创新能力的考查，它明确地指出：“除题目指明有特别限制者外，考生可采用任何适当方法作答．”只要考生做题方法合理，就可以拿到相应的分数，这给了考生极大的发挥余地，也给了考生创新能力极大的生存空间，从而使得考生有创新的可能和欲望，除了规定答题标准可以不唯一以外，香港会考试卷中有的题目本身就要求学生答题必须有创新的成分，如建立模型及采用适当的技巧解决有关问题的题目．而内地的高考，也包括其他很多的大大小小，级别不同的考试，试题的结果往往有所谓的‘标准化’答案，除了此‘标准化’答案外，其他方法均属不合理或者错误之列，甚至是‘异端’的表现，所以这些‘标准化’外的方法一出现就总是被一棍子打死．长此以往，学生怎么敢在决定自己命运的高考考场上标新立异，怎么敢拿自己的命运开玩笑？”（刘家有．香港高考数学考试介绍及其给内地的启示．中学数学教学参考，2006（4））．

关于应试教育与素质教育的问题，钱钟书先生有一段话说得非常好．“古代取士有功令，于是士之操术判为两途．曰举业，进身之道也；曰学业，终身之事也．苟欲合而一之，以举业为终身之学业，陋儒是矣；或以学业为进身之举业，曲儒是矣，人或偏废，而事常并行．”（钱钟书．谈艺录．上海：上海教育出版社，

1992)

当数学奥林匹克逐渐演化为高级的应试后，集中培训、过度训练就不可避免.这不仅是数学竞赛独有的问题，整个现代教育都有这个倾向，社会学家郑也夫指出：

"现代教育主要是学习如何工作的.当然为了完成另一项潜在的，却绝非次要的功能——决定人们的晋升，一些学习内容变得脱离实际，但是这些内容原本是直接和间接致力于生产的.数学、物理学是不同于诗词歌赋的，外语也是不同于八股文的，尽管前者对很多学生来说并未转化为日后的生产技能.但是设计者的初衷，是为了培养级别不等的广义的生产者.是激烈的竞争导致了初衷务实的教育在实践中的走形."

（郑也夫.后物欲时代的来临.上海：上海人民出版社，2007:159）

对于过度训练的问题，潘光旦 1948 年 7 月 17 日在《新路》杂志第一卷第 10 期撰文说：

"一味训练，一味传授些现成的东西，乃至于宣传些没有经历过事实与经验的盘诘的东西，即貌若现成而实不现成的东西，是违反这(教育原则)的.技术学校、训练的机关、宗教与政党办理的教育事业，也许有理由这样做，在一般的大、中、小学校这样做，就没有理由了.马戏班里对各种动物，卖艺的乞丐对有几种动物，包括狮子在内，要它们能作人行、能跪拜、能跳舞，和弄各式各样的把戏，是不得不这样做，但对人就不相宜了.大凡迷信训练与宣传即为教育方法的人在见地上总有两种错误.一是只知为外缘的需要设想，而自觉或不自觉地想把人当做满足这需要的工具，而这外缘的需要者，名义上尽管说得很像是社会的，实际上可能是他自己的，和马戏班的老板的用心没有多大分别.第二个错误是以为训练的效果没有止境，以为功夫下得越多，收效必然越大；他只知道，路走得越多而越不间断，则脚掌上皮茧便越厚，而不知道对于脚手掌以外的皮肤，即使你花上比走路十倍的工夫，也磨不出老皮来；他只知道美国黑人欧文斯，因训练有素，而能于 10.2 秒之内完成百米的快跑，却不知道他后来几年的加工训练并没有能把 10.2 秒的零头磨去.约言之，他不了解训练是因人而有限度的，宣传也复如此，过此限度，所得只是疲乏、倦怠和反感."（杨东平.大学精神.沈阳：辽海出版社，2001:255）

由此可见，不是我们的儿童缺少维斯卡尔迪那样的天才.实在是我们的教育与社会大环境不利于这种天才的产生.鲁迅曾呐喊"救救孩子".我们也要呼吁"救救天才".

第二回　论天才　自古英雄出少年
观历史　超常儿童有特征

1920 年在莫什可夫斯基的《和爱因斯坦的谈话》(P65)中爱因斯坦指出："学生所特有的专业爱好是绝对不能忽视的……特别是那些受到自身才能,家庭中的榜样以及周围环境中的其他人激励的学生,经常很早就显示出这种倾向,这些影响到他们未来的专业学习."

像卡斯维尔迪这样的数学天才有什么特征？怎样才能发现他们？这是所有从事数学教育的人所共同关心的问题,因为这样的天才极其稀少,而及早发现又是培养的前提.中国有"三岁看老"之说,也就是说不论是卓越的人或臭名昭著的人在幼年都是有一些征兆的,关键是我们如何发现这些征兆,认清这种倾向.

在芭芭拉写的《玛丽·居里的魅力世界》中有这样一段:

> "4 岁的小玛丽站在一个玻璃柜前不动弹,柜子里面有几个架子,上面放着令人惊奇的优美的仪器,有玻璃试管、小天平、矿石标本,甚至还有一个金叶子的验电器.乌拉狄斯拉夫·斯克罗多夫斯基(Wladyslaw Sklodowski)教授告诉女儿,这个柜子里盛着的是他的'物理仪器'.这个孩子名叫玛丽亚·萨罗米·斯克罗多夫斯卡(Marya Salomee Sklodowska),昵称是玛妮雅(Manya).她就是后来闻名于世的居里夫人.当时她还不能理解这几个字的意思,但是'她没有忘记'.这是伊夫·居里(居里夫人的女儿)记载的一件轶事.这件事也许是她迷恋科学的早期征兆."

4 岁的小女孩是活泼好动的.常态是以布娃娃为伴,而长时间注视物理仪器是反常的,这就是征兆.与年龄和性别不相符的专注是特征之一.

还有一个容易观察的特征是爱提问题.2006 年 11 月诺贝尔奖得主李政道在苏州大学与学生的学问对话中讲道:"我从小就爱问.一次,祖父抱着我说起'上帝'的事.我就好奇地问,你们都说'上帝','上帝'在哪儿啊？祖父回答我说,'上帝'在天上呀！我又问,'上帝'在天上怎么不掉下来？祖父回答我'上帝'很轻,像空气一样轻,他老跟空气在一起,所以他就掉不下来了.祖父这个回答尽管未解开我的疑惑,但是,我知道了一个道理,像空气一样轻的东西是不会掉到地上来的.后来,我识字了,就成了'书迷'.总是缠住母亲或哥哥去书店买我爱看的书.我喜欢看《汤姆历险记》、《膨胀的宇宙》等描写自然界奇特变化

的书，看这些书，我就有提不完的问题要爸妈、哥哥们解答.”

从众多的杰出科学家传记中我们不难以看出少年天才的另一特征是：看和他年龄不符的书.在武汉出版社出版的莫少群先生所著的世界著名科学学派丛书《两度辉煌——费米学派》中有这样的描述：

“这天，又是一个星期三集日.费米从距离两英里远的家中来到鲜花广场.他的目光集中在旧书摊上.从外表看去，14 岁的费米身材不高，但粗壮结实，表情严肃，眼睛不时露出果断的光芒，书摊上大多是一些神学著作——罗马的教士多如牛毛——以及破旧的小说和艺术书等.费米沉默的神情里带着一丝失望，似乎一无所获.当他逛到最后一个看来也同样没有希望的书摊前，他停了下来，随手打开两本厚厚的旧册子.旧册子封面上的书名已磨损得看不清了，但扉页上印有书名——《物理数学基础》(《Elememtorum physicae mathematicae》)，这是耶稣会教士卡拉法(A. Caraffa)神父于 1840 年出版的两册数学物理著作，是用当时欧洲通行的拉丁文写的，书中充满了数学符号，费米露出了惊喜的神情——这正是他多日来一直要搜寻的物理学方面的书籍，两本册子尽管太旧了，但对于几乎没有什么科学书籍的费米来说，聊胜于无，在一番讨价还价之后，他用几周节约下来的零用钱买下了两册书，这是少年费米得到的第一本物理学著作.十年以后，在罗马那些著名数学家的聚会上，24 岁的费米不止一次地讲到他第一次发现物理学著作的惊喜心情，似乎是在谈论一件令人不可思议的事件一样.19 世纪的卡拉法神父，当然不会预料到他的著作会成为下一个世纪中一位杰出的物理学大师的物理学入门书.”

费米的妻子劳拉·费米(Laura Fermi)在《原子在我家中》一书中的描写也旁证了这一重要的巧遇.她这样写道：

“有一天他从鲜花广场上带回一部论数学物理的两卷著作.他告诉姐姐说，他要立刻开始阅读.在以后的几天里，玛丽亚(Maria Fermi, 1899—1964)在学习时便常常被她弟弟对这部书越来越感到振奋的议论所打断.

‘这部书是多么有意思，你一点也想像不出来.我正在学习各种波的传播！’

‘妙极了！ 它解释了行星的运动！’

当他读到论海洋潮汐的循环那一章时，他的热情达到了顶峰.最

后，他读完了全书，又一次走到姐姐面前.

'你知道吗?'他说，'这部书是用拉丁文写的，我还没有注意到呢!'

想一想我们的大学毕业生，用了四年大学时光的一多半苦读英文，通过了四级，六级后又有多少人能直接阅读数学原著呢？拉丁文是古罗马人所使用的文字，一直被知识阶层所垄断，能读懂拉丁文对成人也是一种值得炫耀的成绩，何况是一位仅14岁的儿童，更何况写的是一本艰深的自然科学著作.一个人举起100千克的重物不难但同时又要走钢丝那就很吸引眼球了，如果在完成这一系列高难度的动作时竟没有感觉到与平时相比有什么特别，那才真正是不可思议，真正的天才不需要作秀，不需要宣传，完全是自我光辉的一种散发.

时任华东师范大学校长的王建磐博士，中学时就曾通过邮购在上海一家旧书店购到了著名数学家贾柯伯逊所著的《抽象代数》，并读了进去.（编者中学时同桌的母亲去外地出差，为他买到了一本荷兰著名数学家诺特的高徒范·德·瓦尔登的名著《代数学》(下)（看书名以为是中学书），同桌因看不懂，便转送给编者，时至今日，一晃28年过去，这本书仍在，但还是没被完全读懂，每当与时任深圳某银行高管的同桌谈及此事，总是唏嘘不已，慨叹数学天赋之不足，徒羡天才之头脑）所以读了不一定是天才，关键是早读，读懂，读出成效.

果然，数年之后王建磐便以福建的一个偏远县城的一个闽剧团的编剧身份考入了华东师范大学数学系研究生，师从中国著名代数学家曹锡华，后来被破格评为当时中国最年轻的博士生导师，成为国际著名线性群和量子群专家.

天才之人自有不寻常之处.据李政道回忆："记得我在芝加哥大学攻读物理学研究生时，我的博士论文导师是著名物理学家恩里科·费米教授.一次，费米教授同我讨论太阳结构问题，其中有关研究辐射传递，需要同一组微分方程进行计算，这个方程的解析、运算工作量很大.我当时认为，这已不是我所做的课题研究范围的'正事'，就不想用太多时间去做繁重的计算、验证，而准备引用其他文献上的现成数据.后来，这件事被费米教授知道了，他立即找我谈话指出，一个科学家绝对不能接受或引用未经自己验证过的计算结果，对他人的计算数据一定要经过自己验证才能引用.费米教授还帮助我想办法怎样用较简便的方法进行计算验证，他特地为这组微分方程设计了一个巧妙的公式.并指导我设计制作了一把六英尺(1英尺 = 0.304 8米)长的大计算尺.我后来就用这把自己制作的大计算尺，把这个课题研究中的所有数据进行了验证.最后，我用自己演算的数据作为论文的数据."这就是天才，不畏难，不蛮干，不落俗套.

在菲尔兹奖的获奖者中有一位唯一的意大利人，他就是数论学家恩里科·庞比里(Enrico Bombieri).庞比里于1940年11月26日生于米兰，米兰是意大利的第二大城市，是工业中心、金融中心，是一个现代化的大都会，热闹非凡，城市

的喧嚣并没有影响庞比里的学习兴趣.庞比里不仅比别人学得早,而且也学得好.13 岁那年,他就能够自己阅读数论的课本了,与其他爱好数学的中学生不同,他看书有心得.16 岁时就在数论的一些问题上小有成果,18 岁时便用意大利文发表了第一篇论文.从此,他开始了他的职业数学生涯.

另一个典型例子是著名经济学家凯恩斯,从《凯恩斯传》中我们可以了解到一个具有数学天赋的学生是怎样在伊顿公学学习的.

> "从他的学校报告单来看,梅纳德(凯恩斯)是一个模范学生,他的一些思想和性格上的品性经常会在报告单上得到赞扬.常常受到表扬的优点包括他能迅速领会和掌握事物的基本要点并由此快速地完成功课,还有对英语语言的运用.他在代数上超乎寻常的能力使得他在数学上的霸主地位变得日益巩固,以至于在第三年时他被禁止参加习题竞赛.但是尽管如此,除了他的数学老师吉尔伯特·哈里森·赫斯特以外,没有人希望他在他的这一最强项上变得专业化.拉斯莫尔——伊顿著名的古典学者,希望这个讲究精确性的科学将不会干涸,他对更具激励性和人性的主题给予深厚的同情心和敏捷的洞察力,因为他的关于'安提戈涅'的小短文不像出自一个要专事数学的人.(1901 年 4 月)
>
> "在伊顿期间,凯恩斯在大量竞赛中获奖.第一年他得了 10 项奖,第二年 18 项,第三年 11 项,总共获得过 63 项奖.他在所有的重要数学竞赛中都获奖,甚至还曾获得过一个化学奖.而最让卢伯克感到高兴的是,梅纳德的学习不存在任何'唯利是图的杂念',他学习的目的是因为学习本身带来了快乐而不是单纯的获奖.'他是很少几个人中的一个,他们珍惜他们所正在学习的书所具有的价值和用处'(1898 年 12 月).对此,杰夫里·凯恩斯对他哥哥有他自己的一面之词.他们的父亲,他写道,'把我们的成绩和在班里的名次大量地搜集排列,这刺激了梅纳德的竞争心理,看到自己具有领先其他男孩的能力对他是一种乐趣.'这段话的第一部分毫无疑问是真实的,因为在内维尔给梅纳德的信中充满了这样的评语,如'你没有告诉我在古典文学的头一次双周排名中,你差赫里翰姆和巴利有多远'(1898 年 2 月 28 日);'安格似乎开始赶上来了,你一定不能让他在考试中超过你'(1898 年 5 月 12 日).至于梅纳德需要多少这样的竞争刺激乃是一个疑问.看来更可信的是,内维尔由于自己过去的经验教训,从来不可能理解和欣赏梅纳德在学习中所体会到的乐趣程度."([英]罗伯特·斯基德尔斯基.凯恩斯传.相蓝欣,储英,译.北京:三联书店,2006:87-88)

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2}=0$$

在2006年马德里召开的国际数学家大会上荣获菲尔兹奖的两位数学家俄罗斯的佩雷尔曼和澳大利亚的陶哲轩都是数学天才,在少年时代就多次获IMO大奖.

天才人物的另一个特征就是兴趣广泛.还以《凯恩斯传》中的描述为例:

"梅纳德已经修满了头100个学分,因此事实上达到了初中部的六级,他现在可以自由地选择专业.赫斯特,他的数学老师,想要他放弃他的所有其他科目专攻数学,这使梅纳德感到十分不快.他的好奇心现在不但没有缩小,反而是在扩大.在古典文学上,他喜爱拉斯莫尔的课,对他的好挖苦人的方式十分钟情,只是遗憾他喜欢让学生们以'疯子'这样没有什么意义的题材来创作诗歌.在C.K.马登那里,他自始至终享受着有关'炸药案'阴谋(指1605年11月图谋炸毁议会大楼的案件——译注)的历史'附加课',想要知道它是否事实上是当局所策划的一个阴谋以打击天主教徒(他那时正好热衷于研究他的耶稣会祖先们,他当时每星期天下午在研究员图书馆里从事有关其家族历史的研究,在此过程中发现了他的这些祖先).1901年的夏季学期里,卢伯克还扩展了他的另一个兴趣,他和梅纳德一起读一首由克鲁尼的伯纳德修士所作的'极其美妙的诗'——《冷眼看世界》.'中世纪的拉丁诗词现在成了他的业余爱好之一.'内维尔在1901年6月22日的日记中写道.一个人怎么能想到为数学而放弃所有这些喜爱的东西呢?而赫斯特并不罢休又找到了另一个理由.1901年6月,R.G.霍特利,前国王公费生和未来的财政部官员,在数学荣誉学位考试中只达到第18名的位置,赫斯特便把他的例子拿来警告把精力分得太散的坏处.但是梅纳德并没有被说服,他在1901年6月16日给内维尔写信道:霍特利本来就不是一个具有'卓越数学才能'的人;赫斯特认为'他在欣赏数学以外的东西中已经掉了魂'的说法是荒谬透顶.两方面的观察都是表明梅纳德拒绝专门化.([英]罗伯特·斯基德尔斯基.凯恩斯传.相蓝欣,储英,译.北京:三联书店,2006:87-88)

人才的知识结构是一个奇妙的整体,其培养也决不像我们生活中所提倡的"吃啥补啥"那样简单,很多知识养分往往以令人难以察觉的方式悄悄地在起作用,比如文学和艺术,表面看好像与理科相去甚远,但一旦缺少它就会成为一个狭隘的专家.难免会心生枯燥与乏味,进一步会无聊与苦恼,感到人生无趣,这样的内心世界何以产生大师级人物.

数理型天才的第三个特征是像呼吸一样自如地进行高深的数学运算,而普

通人觉得是无从下手的计算.

1978 年还不满 30 岁的费弗曼荣获菲尔兹奖时,谁也没有觉得意外,因为早在十年前,费弗曼就以"神童","天才","早熟的数学家"而著称于世了.

查理斯·费弗曼 1949 年 4 月 18 日出生于美国首都华盛顿.他的父亲是位经济学家,他发现自己刚上小学的儿子具有数学才能,真是又惊又喜.当时小费弗曼对中学的数学早已不在话下了,提出要学微积分."好吧,微积分爸爸还能教."10 岁的费弗曼以惊人的速度学会了大学的微积分,达到一般人数学知识的极限.不久爸爸就送他到华盛顿附近的马里兰大学听课,1963 年,马里兰大学同意他正式入学,可是刚上了三个星期课,洪梅尔教授就发现他对课程内容早已掌握,就说:"你在这里听课简直是浪费时间,到高年级去听课吧!"过了三年,他正式从马里兰大学毕业,这时他学的数学知识早已超过一般大学毕业生.接着,他就到美国的普林斯顿大学念研究生,只用两年就获得了博士学位,当时还不满 20 岁.他当了一年讲师之后,1971 年芝加哥大学就聘请他当正教授,1974 年,他又被聘请到普林斯顿大学当正教授,年纪这么轻的正教授在美国大学 300 年历史上是没有先例的.

1978 年 8 月费弗曼获菲尔兹奖时,他已不是第一次得奖了,早在 1971 年,他 22 岁时,就荣获过国际性的撒拉姆奖,撒拉姆奖是奖给世界上在三角级数、抽象调和分析等方面取得最新重要成果的人,他至今仍是该奖最年轻的获奖者.从 1976 年起,美国新建立一种奖给有前途的年轻科学家的华特曼奖.这个奖每年评一次,每次一人,奖金数额 15 万美元,同诺贝尔奖金不相上下.这个奖的评奖范围并不限于数学专业,数理化天地生统统在内,因此,获奖者不仅要和同专业的专家竞争,还要同其他专业的优秀专家比试高低,可见要获得这个奖是多么不容易.在第一次评奖时,费弗曼就众望所归,首先得到华特曼奖,因此可见,这位二十多岁的年轻数学家在美国是多么出名了.

俄国著名女数学家柯娃列夫斯卡娅在她还是一个小姑娘时也是通过阅读糊在墙壁上的其父上大学时抄录的奥斯特洛德拉格斯基讲授微积分的课堂笔记学会的微积分运算.

1883 年,一个名叫欧内斯特·卢瑟福的 11 岁小男孩,站在新西兰一家农场的屋门前,看着远处渐渐逼近的风暴.他的父亲也被雷声惊醒了,走下楼陪着儿子.他在干什么呢? 欧内斯特回答说他学会了通过计算闪电和雷声之间的间隔时间来计算风暴中心离他们还有多远,他就是后来著名的物理学家卢瑟福.

他被别人认为有点迟钝.他是在家接受的教育,都 11 岁了还只会读不会写.12 岁的时候,他比较走运,碰上了自己一生中所要遇到的几个有天赋的老师中的第一个,激发了他学习的兴趣.他接到自己的第一份奖学金后对母亲说:"我已经把我最后的那个土豆刨出来了."([美]芭芭拉·戈德史密斯,著.执着的

天才.郭红梅,曹军,译.长沙:湖南科学技术出版社,2006:57)

当然,这种运算能力不同于某些简单但位数过多,繁杂但缺少结构的运算,那种快速进行日期换算或某个数几次幂的计算及某些流行的所谓速算,前者据医学研究可能是某种疾病,如儿童自闭症.这可使人们想起奥斯卡获奖影片《雨人》中的某些情景.而后者多半都是后天训练的产物,如流行的幼儿"珠脑算"、"史丰收速算法"等等,这些算法是任何心智正常的人都能掌握的.

后天训练往往伴随着父母的强制与痛苦,或超常的自知与自觉,而天才人物的成长都是不知不觉,自然而然的.

另一个类似的例子还是意大利天才的物理学家费米,1918 年 11 月 14 日,费米在罗马参加了比萨皇家高等师范学院的入学考试.作文的题目是《声音的特征》.费米写了半页的引言,接着以振动的长杆为例详细进行了探讨.他写出了长杆的偏微分方程,算出了它的本征值和本征函数,并用傅里叶级数演示了它的运动.这不仅在当时,即使在今天也难得有几位报考博士学位的研究生能够不依靠书本的帮助,空着手头头是道地进行如此复杂的演算.主考官比塔雷(Giulio Pittarelli,1852—1934)教授是罗马大学著名的数学家,也是一位业余画家,他对此大为吃惊.毕竟参加考试的人只是一个刚刚高中毕业的 17 岁的孩子.即使再聪明,要达到如此高的水平,实在是令人不可思议.虽然原先并没有规定有口试,比塔雷教授还是决定要面试这位考生.当他同费米见面时,他被这位年轻的天才所征服.比塔雷教授告诉费米说,在长期的教学经历中,他从未见过像费米这样年轻有为的学生,费米肯定能通过这次考试,因为无法想像有哪一个考生会考得比他好.比塔雷教授还说:一切都说明费米将会有一个光辉的前程.

像预料的一样,费米在入学考试中赢得了第一名,他的入学试卷被保存下来,他去世后在学校的档案室中被发现.(埃米里奥·赛格莱,著.从 X 射线到夸克——近代物理学家和他们的发现.夏孝先,译.上海:上海科学技术文献出版社,1984)

天才人物将强烈的好奇心与强大的计算能力相配合.解决问题如鱼得水.李政道回忆说:"1946 年,我和朱光亚先生等同船赴美留学.在船舱里,我手中的一支别针失手掉到地板上,后来又滚到地上的一张纸上,我感到很好奇,就琢磨起来,是什么力量让它从地上滚到稍高的纸上呢?是舱板移动,还是掉下的自由落体作用力呢?我反复琢磨,并用微积分、物理学原理去计算别针掉落滚动的运行轨迹,测算它的各种力学数据.我琢磨了好几天,还同朱光亚先生一起讨论.通过琢磨这个问题,我的数学、物理等知识和解题能力又得到一次锻炼."

天才的训练,开始几步至关重要,因为"天才由天资,学慎始习,斫梓染丝,功在初化,器成采定,难可翻移."(刘勰《文心雕龙》)

就像训练运动员一样，一定要让他从小养成“专业范”，否则，一旦成型，想纠正难，这就是我们所遇到的教育难题，从小就被训练成“应试范”，以后再想改成“研究范”就比较难.

对于学习数学的学生，陈省身教授说：

“我们每年派去参加国际数学奥林匹克数学竞赛的中学生都很不错。虽然中学里数学念得好将来不一定都研究数学.但希望有一部分人搞数学，而且能有成就.昨天，我和在北京的一些数学竞赛中获奖的学生见面，谈了话.我对他们说，搞数学的人将来会有大的前途，10 年，20 年之后，世界上一定会缺乏数学人才.现在的年轻人不愿念数学，势必造成人才短缺.学生不想念数学也难怪，因为数学很难，又没有把握.苦读多年之后，往往离成为数学家还很远.同时，又有许多因素在争夺数学家，例如计算机.做一个好的计算机软件，需要很高的才能，很不容易，不过它与数学相比，需要的准备知识较少.搞数学的人不知要念多少书，好像一直念不完.这样，有能力的人就转到计算机领域去了，也有一些数学博士，毕业后到股票市场做生意.例如预测股票市场的变化.写个计算机程序，以供决策使用，其收入比大学教授高得多了.因此，数学人才的流失，是世界性的问题.”(《科技导报》，1992 年第 11 期)

对于国际中学生数学奥林匹克，陈省身说：

“这项竞赛是高中程序，不包括微积分.但题目需要思考，我相信我是考不过这些小孩子的.因此有人觉得，好的数学家未必长于这种考试，竞赛胜利者也未必是将来的数学家.这个意见似是而非.数学竞赛大约是在百年前在匈牙利开始的，匈牙利产生了同它的人口不成比例的许多大数学家.”(陈省身.怎样把中国建为数学大国.数学传播，1991(253))

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2}=0$$

第三回　播龙种　收获跳蚤心不甘
徒羡鱼　退而结网尚不迟

卡斯维尔迪获奖后引起了我国数学教育者的深思，为什么拥有世界上最多数量中学生的中国产生不出像维斯卡尔迪一样的天才.

特别是2006年8月22日在西班牙首都马德里举行的2006年国际数学家大会上，两位昔日数学竞赛金牌得主俄罗斯数学家格里高利·佩雷尔曼(Grigori Perelman)和美国加州大学洛杉矶分校数学家陶哲轩(Terence Tao)获2006菲尔兹奖的消息传来，我们更是疑惑不解.

论重视程度，我们从国家到家庭都对教育非常重视，论IMO获奖者，我们有世界上人数最多的金牌得主，但为什么至今我们并没有数学天才产生，播种了大量的龙种，收获了等量的跳蚤.

对此胡适开出的方子是："总得时时寻一个两个值得研究的问题."

"如果你有了一个真有趣的问题天天逗你去想他，天天引诱你去解决他，天天对你挑衅笑，你无可奈何他——这时候，你就会同恋爱一个女子发了疯一样，没有书，你自会变卖家私去买书；没有仪器，你自会典押衣服去置办仪器；没有师友，你自会不远千里去寻师访友.""没有问题可以研究的人，关在图书馆里也不会用书，锁在试验室里也不会研究."(胡适.赠与今年的大学毕业生.1934年6月24日天津《大公报》).

"现在的学生，大部分所做的工作，无非把教师指定的功课，很草率地略一涉猎，专为准备次日回答教师考问之用，书中精义，尚且未明，更不能说有独创的见解.至于教师，则因任课繁多，每日亦仅能把书本稍稍咀嚼，预备作为讲演的资料，亦是无暇深思.他们参考书籍，并非旁征博引，做他们学说的佐证，实则如商贩之趸批货物."(李登辉①.我们所最需要的教育.复旦周刊，1929(24))

张奠宙教授曾撰文②指出：中国科举考试的痼疾在于科举考试内容的僵化，即八股化，隋唐时期的科举考试，曾经有"策论"、"诗词"等科目，甚至还有"明算科"(考中国的传统算学)，内容相当活泼，宋代王安石变法，曾经主张在科举中考策论，联系现实，目的是考察举子们治国平天下的本领.当时反对此举者甚多，甚至包括司马光、苏轼等大家，他们坚持主张考诗赋词章，原因是策论的好坏，由考官的主观好恶而定，甚不公平，至于诗词歌赋则有格律限制，可以客观地分出高下，考试公平，评价客观，那时就占了上风.苏轼的观点，到明清两代

---

① 李登辉(1872—1947)，字腾飞，祖籍福建，生于印尼华侨家庭.受人尊敬的复旦老校长.
② 张奠宙.科学情结与"应试教育".《湖南教育》，2006年1月号.

走向极端，八股文盛行，以“起承转合”各两股的文章格式把学子的思想束缚得紧紧的．读书人对国家大事，科学进步毫无兴趣．会做八股文，当然也是一种能力，但是要经世致用，懂科学技术，那就差得甚远，虽然能做出起承转合的八股文，但不一定能治理国家，科举之害，渐渐为国人所痛恨．

丘成桐说：“儒家的教育制度确是造就了不少政治和经济上的杰出人才，汉朝布衣可为卿相，开创了中国两千年来读书的风气．然而高据庙堂的士大夫得以主导天下思想，学术不得自由，基础科学无由发展．以后魏晋清谈，玄学兴起，官学没落，儒家不能垄断教育，数学反而兴起，隋唐之际，科举取士，数学虽入国子监，然而位阶不高，以应用技术为主，可见于《颜氏家训》‘术亦是六艺要事，自古儒士论道定律历皆学通之，然可以兼明不可以专业。’宋代虽行科举，然而民间书院兴起，数学反而大有进展，秦九韶、沈括都是杰出人才，明清以后，学者以科举为毕生事业，思想却受考试禁锢，便无创新可言．延至今日，联考和数学竞赛得到奖状仍然是学生引以为傲的毕生成就．大学教授则以得到自然科学基金、发表论文的多寡来量度自己在本科方面的成就．在这个考试制度的阴影下，数学家不敢探索宇宙间自然永恒的定律，更不敢与日月争光了．”

现在的高考命题，当然已经不是八股文，但是，考题年年稳定，大家都围着那几类考题折腾，就和“八股”越来越近了．我国今日高考试题的命题体系，大约是1980年以来逐渐形成的，现在已经定型为一种模式，题型基本固定，题量依然很多，却美其名曰“考出基础”．题型稳定则探究能力考不出，只令熟练者得利．最近，姜伯驹院士在威海演讲时提出：“考试的弹性越小，题型变化越少，题海战术的成本就越低，收效就越高．”(《数学通报》2005年第8期)布尔迪厄通过对法国预科学校的研究指出：为竞争性的考试进行的长期准备，教科书而不是原著的使用(即使是在人文科学中)，大量成套的问题以及常规的训练，紧张的节奏，竞争的氛围，创造了一种对于文化与知识研究工作的工具性的、实用性的、鼠目寸光的态度．这种实用的定向不是滋养能够激励研究的批判性精神，而是促使学生把自己的兴趣限制在有助于考试的东西上面．([美]戴维·斯沃茨，著．《文化与权力布尔迪厄的社会学》．上海：上海译文出版社，2006：235)

在查建英与作家、音乐家刘索拉的一次访谈中也谈到这一倾向，有如下的对话．

刘索拉：我认识一位女高音歌唱家，她在20世纪80年代时在国际上同时得了几项金牌，她的演唱非常出色．出国以后她很诚实地对我说，她面临着一个危机，就是中国的音乐家都是为了得奖才练习音乐，所以特别能得奖，整天练的都是比赛项目．但是出来找工作就有困难，因为会的曲目太少，没有西方歌剧演员的修养，虽然都是音乐学院训练出来的，西方的歌剧演员对从古典到现代的所有乐谱都熟悉，而中国的歌剧演员只会那几首为拿奖的曲子．我记得奥耐德·

考门跟我说过的话：有些人做古典音乐不是因为爱音乐，是因为家庭脸面——家长认为孩子是古典音乐家就很体面．我想这种事情在亚洲更加盛行，所以音乐的话题总是难深人，连音乐家自己都不感兴趣．不过话说回来了，欧洲歌剧不是中国歌剧的传统，能把别人的东西模仿得比别人还好，也够不容易的．但问题是，无论是做民族音乐还是西方音乐，怎么用"心"去做？"心"在何处？（同样的道理，很多学奥数的学生整天就练可能考的题目，学习的目的也是因为家庭脸面，有一个获得 IMO 金牌的儿子总是会使家长感到有面子的，而且数学本是源于西方的，能在全体西方国家都参赛的情况下夺冠确属不易，但"心"在何处？）

查建英：这个问题并没有随着上世纪 80 年代结束，现在照样有，甚至愈演愈烈．中国的家长和教师都知道"应试的一代"这个说法，就是说一切为了应付高考，从小学准备考中学，中学准备考大学，全都是为了考试，把所有题目都做得烂熟，做题速度会是最快的，考分会是最高的，但是这样的毕业生出来以后既缺乏独立思考的能力，也缺乏实际工作能力．这样的教育强调的不是通识，培养的是单面人，他可能有一个强项，但他很难有宽广的视野和雍容、从容、滋润的气质．问题是，美国人有一半人中学毕业能上大学，中国才百分之五（近年有所提高）；在中国，通过高考上大学是很多没有关系背景的普通人、穷苦人改变自己命运的唯一相对公平的途径．竞争这么激烈，他只有孤注一掷瞄准这个独木桥冲刺，他无暇享受学习的过程和快乐，这种情况下你拿贵族精英教育的标准要求他，讲触类旁通，得意妄言的境界，就比较残酷了，他要不把那个"言"照单硬背下来别想进大学．更要命的是，这个"言"的内容，这种考试方式背后贯穿的仍旧是那种大一统的指导思想，它强调、表彰的不是自由、独立、活泼的思维和质询，而是统一思维，标准答案，这就像拿产钳夹住一个幼儿柔嫩的脑袋，再给他灌进去按你的各种比例制好的人工奶，这种哺育方式，成长过程正常吗？有些父母明知这种教育方式压抑孩子个性，为前途也只好咬牙逼孩子，真是大人，小孩子都可怜．（查建英．八十年代访谈录．北京：三联书店，2006:382-383）

天才型人物往往是那些厌恶考试又不惧考试的人．我们来看看英国著名数学家哈代的经历．1896 年 10 月哈代进人剑桥大学，开始接受剑桥大学数学荣誉学位考试第一部分的训练．这个极不合理的考试无疑是最苛刻的数学测试，含有极其刁难的考题．参加考试的学生会受到辅导教师的残酷训练，最终成绩按以下顺序排名——甲等优秀生（数学学位甲等）、高级优秀生等依次降级．哈代很快就厌恶了这种考试机制并对自己的辅导老师韦伯博士，一位专门培养甲等优秀生的能手大为光火．最后他的老师把他送到应用数学家奥古斯塔斯·洛夫（Augustus Love）那里，后者鼓励他阅读卡米勒·约当（Camille Jordan）的《分析教程》．哈代后来这样回忆说：

"我的眼界第一次被洛夫教授打开,他教会了我一些术语并让我第一次真正了解了分析的概念……我永远也不会忘记那本非凡的著作带给我的惊奇,因为了解了数学的真正内涵.从那以后,带着对数学的雄心壮志和满怀激情,我开始向为了成为一名真正的数学家而努力."

1898 年哈代取得了数学荣誉学位考试甲等优秀生第四名,并在 1900 年参加了数学荣誉学位考试第二部分的考试,位列优等一级,在三一学院,他经选举获得奖学金,并于 1901 年获得了人人渴望的史密斯奖(与物理学家詹姆士·金斯共同获得)和一个五年奖学金.

一位与哈代合作的匈牙利数学家乔治·波利亚(Georg Pólya),在哈代的推荐下,曾被任命为第一位国际洛克菲勒会员.作为哈代反对剑桥大学数学荣誉学位考试的一部分,他安排波利亚去参加考试,认为考试内容与现代数学毫无关联,波利亚一定会做得很差.但不幸的是,波利亚做得非常好,如果他接受注册,他就是考试的第一名.

数学天才与普通人的区别在于,他觉得"数学好玩".沉浸其中自得其乐,而普通人会体会到煎熬.

丘成桐指出:对自然界奥秘的想像或了解是一种极为动人心弦的美.数学家不可能也不应该抗拒这种美.数学家也从工程或社会科学上吸取美的经验,正如画家除了写实派外,有印象派也有广告画.美的创作一定是简单的语言可以叙述的,再深切的定义则因人而异,看人和现象界的接触的深度来衡量了.

真的美使数学丰富,但虚伪的美使数学枯燥.不断的抽象结果往往抽空了数学的精髓,再也没有意义了.

数学家阿尔弗雷德·伦伊说:"如果我觉得不快乐,我做了数学就会快乐起来,如果我觉得快乐,我做了数学就能保持这种快乐."

伦伊在 1946 年至 1949 年间,发表了 15 篇关于数论的论文.1949 年以后主要从事概率论的研究,并在数论研究中运用概率论方法.1954 年他编写了概率论的教科书.此外,他还发表了关于信息论以及数学在物理学、工程学中的应用的论文,他同时还做了大量的科普工作,是一位有才干的数学教育家,他培养了一批青年数学家,形成了概率论方面的匈牙利学派.

据英国《泰晤士报》2007 年 3 月 20 日报道,18 名世界顶级数学家凭借他们不懈的努力,历时四年,完成了世界上最复杂的数学结构之一,李群的一个特例——E8的计算过程,这困扰了数学界长达 120 年.E8 的计算结果是一个矩阵,它拥有的行和列均有 45 306 万,其根系统包含 240 个向量,这些向量均在一个 8 维空间内.

参加者麻省理工学院数学教授大卫·沃甘(David Wogan)说:"这是一项庞大

阿尔弗雷德·伦伊,(Alfréd Renyi)(1921—1969),匈牙利人,1921 年生于布达佩斯.1946 年毕业于基格德大学,曾到莫斯科参加林尼克的研究班学习,并通过了论文答辩,回国后,在德布勒森大学任教,1949 年成为教授,同年成为匈牙利科学院通讯院士,后来升为院士.从 1950 年起任匈牙利科学院实用数学研究所所长,1952 年起在布达佩斯大学主持概率论教研室的工作,1969 年 2 月 1 日逝世.

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2}=0$$

的工程，需要付出巨大的努力，但其中的乐趣也是无穷的，这如同爬山一样，爬到半山腰的人最终都想爬到山顶上去，能够参加这么一项工作是一件乐事，同时也是一件美事.”

辽宁师范大学王青建教授在《关于数学史的几点断想》一文中指出：

> “近两年体育界提出快乐足球的观念，数学界和数学教育界理应有快乐数学的观念.其实大多数关注体育的人并非是体育运动爱好者，在足球城大连就曾有六七十岁的老太太也懂得什么叫‘越位’的轶闻.不直接参与运动并不妨碍人们成为‘体育新闻爱好者’.同理，关注数学并不意味着一定要从事数学研究.目前的情况是，‘数学新闻爱好者’太少，即使是2002年国际数学家大会在北京召开这样的大事，会前知道或关心这一消息的人，甚至包括大学本科数学专业的学生，也是微乎其微，这是数学教育的失误.”

既然数学竞赛是选拔数学天才的手段之一.那么这项活动应该怎样健康开展呢?

关于搞数学竞赛的常态应该是这样的，美籍波兰数学家，美国新泽西州罗格斯大学的亨利克·艾瓦尼克是一位国际顶级的黎曼猜想大师，他说他与黎曼猜想之间的关系始于他的早年.“我在波兰，由于参加数学奥林匹克的缘故，我很早就接触到了数学，我不是说学校里有极好的数学课程，而是说我很早就参加数学竞赛了，同时自学了很多数学，而不是在学校里学到的.我有个很爱写信的朋友，我赶不上他，因为他每周要给我写十封信，而我只能回他一封，有一次他问我：‘亨利克，你知道什么是黎曼 ζ 函数吗?’我回答说：‘抱歉，我一无所知.’他又说：‘但我听说它很棒，与素数有关，是个伟大的猜想，你能找到一些相关资料吗？或者在哪里可以找到呢？到底讲的是什么?’于是我去找老师，向他请教什么是黎曼 ζ 函数.第二天，老师把我叫去，向我解释了一切，说：‘这就是黎曼 ζ 函数.’我听懂了，但他所说的实际上是魏尔斯特拉斯 ζ 函数，而不是黎曼 ζ 函数，就在那时，我的朋友又写信给我，寄来了一份黎曼的论文，所以我的确早早就接触到了这个问题，那时我读高三，仅18岁.”

（[英]卡尔·萨巴，著.黎曼博士的零点.汪晓勤，等译.上海：上海教育出版社，2006:65）

第四回　倡素质　中美教育有殊途
看试题　一个有趣一个枯

上个世纪初，全世界所有想学数学的年轻人都受到同样的忠告：打起您的背包到哥廷根去．而哥廷根市政府的大理石上也刻着同样自负的话"哥廷根之外没有生活"．不过如果把生活改为数学倒是贴切，因为当时世界数学中心在德国，哥廷根大学是数学家心中的麦加，而教皇就是希尔伯特．

斗转星移，随着二次世界大战希特勒将大批顶尖数学家赶往美国，使美国一跃成为世界数学中心，其实力独执世界数学之牛耳．众所周知，高等教育的基础是中学教育，是什么样独特的中等教育的数学教育可以支撑起美国这样世界一流的数学金字塔呢？

到过美国或了解美国数学教育的人都对美国中学生普遍的数学水平感到出人意料的低，吴大猷说："1931 年我去美国念研究院的时候发现，虽然我们中国水准这么低，可是反过来，就某些情形而言，我们中学的水准也并不比他们差．我们中国在 1920 年代虽然并不是所有的学校，但是，有一些中学，如我所在的南开中学，一所私立中学，它的水准就比美国中学的水准高得多．就拿我在中学里面念的数学来讲吧．我在中学就学到了平面几何、立体几何、代数以及所谓的数学分析，此外，还包含了一些三角函数的概念等等．到了高中三年级，还得念微积分．所以我们的这种水准的确比美国的水准高了很多．当然，并不是全国所有的中学都是这样，不是的，这没有代表性．但很多美国学生在中学里面根本没念过三角，之所以会有这样的情形，是因为美国的大学讲求的是通才教育，科学内容非常之浅，等到进入大学以后，才开始念三角、代数等学科．"（吴大猷．早期中国物理发展之回忆）在最近举行的 21 个国家间数学和科学普通知识水平测验中，美国十二年级的数学成绩低于国际平均水平．而且，正在学习或学习过微积分预科、微积分和高级微积分课程的美国学生与另外 15 个国家的学生参加了一项高级数学评价，其中 11 个国家的学生表现强于美国，4 个国家的学生获得了大致和美国相当的成绩，但没有一个国家的学生成绩明显低于美国学生，但不可思议的是为什么到了高端数学人才又如此之多．

另外一则来自美国的新闻是：根据经济合作与发展组织（Organization of Economic Coorperationand Development）对 41 个国家的调查，美国学生的数学和科学能力在各国平均线以下．其实，这在若干年前就是人所共知的事实．实际上，美国八年级学生的表现，这次还有所提高．但是，这个消息还是很有爆炸性．主要报纸连篇累牍地讨论，《华尔街日报》等还发表社论，仿佛全国陷入危机．

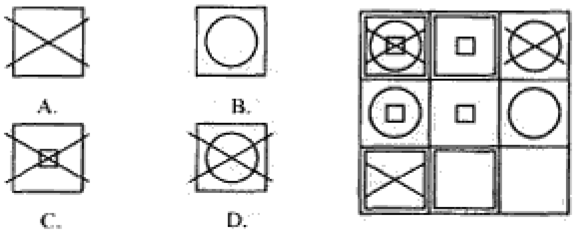
论者指出，孩子们在学校里学的数学，大多并不会在日后的生活中直接运用．大部分家长，早把所学的数学忘光，只有在辅导孩子时才抓起书来重新学．况且，世界的数学天才大多数汇聚美国，若需要还可以全球招揽，没有必要人人都成为小数学家．但是，数学训练人们精确的抽象思维能力，比如概率和统计，可以用来解释民调数据，以及饮食习惯和心脏病发病率的关系等等，涉及国民每天都要面临的问题．没有数学训练，人们就丧失了精确的抽象思维能力，对商品广告乃至政治家所兜售的东西就缺乏基本的辨别能力．

（薛涌，著．《中国文化的边界》．昆明：云南人民出版社：2005：119）

基于上述认识，美国在组织中学生参加数学竞赛时，其题目特点是：浅显，试题的叙述非常明白易懂；有趣，使参加考试的学生愿意去做它；有用，这里说的有用不是为升学之用，而是在社会生活中有用．相比之下我国的数学竞赛试题就过于枯燥与抽象，这样的成人型题目不仅没有将数学天才吸引来，而且还鼓励了通过培训来取胜的应试倾向．

以下是我们从近年美国最初级的数学竞赛中选取的一些题目．读者可以与我国的全国初中数学联赛或"华罗庚金杯赛"试题相对比．

1．正方形 A、B、C 和 D 中哪一个放置在下图空缺的位置比较合理？



1题图

2．一个矩形网络由红色和绿色两种颜色着色．在每行和每列中两种颜色各占一半，那么图中的 A 块和 B 块应着什么颜色？

A．A＝红，B＝红　　B．A＝红，B＝绿

C．A＝绿，B＝红　　D．A＝绿，B＝绿

E．信息不足

R			G
		G	
	R		B
	A		R

2题图

3．如图，有一由单位正方形组成的网格．网格为 10 排，且列数相等．一多米诺骨牌(□□)可以横着放，也可以竖着放，并且正好覆盖两个单位正方形．骨牌在网格上有 2 004 个位置可以放置．问网格一共有多少列？

A．105　　B．106　　C．107

D．108　　E．109

4．一个质数如称为"超质数"．若将这一质数加倍后再减去 1，其结果又是另一个质

数.问小于 15 的超质数一共有多少个?

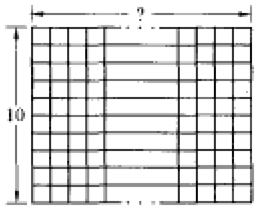
A.2　　B.3　　C.4

D.5　　E.6

5.我有 6 本不同的书,3 本是红封面、3 本是蓝封面.将这些书放在书架上,并且相同颜色封面的书要隔开.问一共有多少种放法?

A.6　　B.24　　C.36

D.72　　E.120

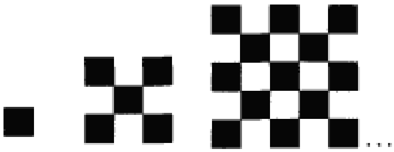


3 题图

6.按照下图的试样,问第 15 个图形需要多少个黑方块?

A.403　　B.365　　C.481

D.421　　E.225



6 题图

7.你被告知有一些未知正整数 p,q,r 和 s,并且 $\frac{p}{q}=\frac{r}{s}$.问下列哪一个等式是正确的?

A.$\frac{p}{s}=\frac{r}{q}$　　B.$\frac{p}{r}=\frac{s}{q}$　　C.$\frac{p}{q}=\frac{p+r}{q+s}$

D.$\frac{r}{s}\neq\frac{r-p}{s-q}$　　E.上述答案都不对

8.用辅音字母 B、C、D 和元音字母 A、E 可以组成多少个 3 个字母的组合?要求组合有 2 个辅音字母和 1 个元音字母(字母可以重复).例如 ABC 和 CCE 都是合适的组合.

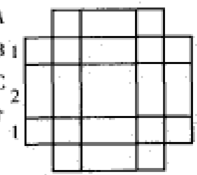
A.18　　B.27　　C.54

D.72　　E.上述答案都不对

9.一个汽车销售人员销售 3 种汽车.第一天他售出了 3 辆 A 型车、2 辆 B 型车,总收入为 260 000 美元.第二天他售出了 3 辆 B 型车、2 辆 C 型车,总收入为 160 000 美元.第三天他售出了 3 辆 C 型车、2 辆 A 型车,总收入为 180 000 美元.问一辆 C 型车的售价是多少美元?

A.20 000 美元　　B.30 000 美元　　C.40 000 美元

D.50 000 美元　　E.60 000 美元



10 题图

10.下列图形中有多少个正方形?

A.12　　B.17　　C.21

D.22　　E.26

11.在冥王星上,大怪兽有两个头、三条腿,小怪兽有一个头、四条腿.一个高个子的普路托神从栅栏上面看到 10 个头,一个矮个子的普路托神从栅栏下面看到 25 条腿.问栅栏后面有多少个大怪兽?

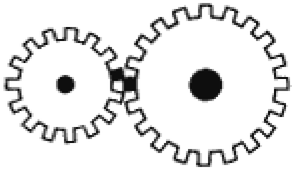
A.2　　B.3　　C.4

D.5　　E.6

12.如图,小齿轮有 15 个齿、大齿轮有 20 个齿.在大、小齿轮上都标出 1 个齿(黑色).问小齿轮转多少圈后,两个标出的齿会第 1 次相遇?

A.1　　B.2　　C.3

D.4　　E.5



12 题图

13.一病毒感染了计算机.在计算机的存储器中,从 2 到 9 的每一个数 x 被 $1+2+3+\cdots+x$ 的和代替.例如 2 被 $3(3=1+2)$ 代替,5 被 $15(15=1+2+3+4+5)$ 代替.计算机的其他性能都正常.你若要计算 $1+3+5$,计算机会显示什么结果?

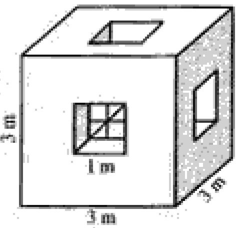
A.9　　B.15　　C.21

D.22　　E.25

14.如图,一正方体的边长为 3 m,正方体各个面的中央都开有边长为 1 m 的正方形洞,并且从一个面一直穿到对面.问新正方体的表面积是多少平方米?

A.72　　B.76　　C.78

D.80　　E.84



14 题图

15.一个盒子中有 80 个块体,一些块体是木头做的,一些块体是塑料做的.每个块体要涂上红色或绿色.若有 48 个块体由木头做的,有 32 个块体为红色,问绿色塑料做的块体最多有多少个?

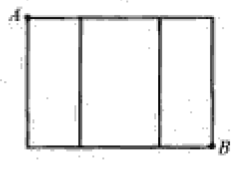
A.16　　B.24　　C.32

D.48　　E.上述答案都不对

16.如图,两个面积均为 36 的正方形相互重叠.若重叠部分为正方形的 $\frac{2}{3}$,问从 A 到 B 的距离是多少?

A.$6\sqrt{2}$　　B.10　　$6\sqrt{3}$

D.12　　E.上述答案都不对



16 题图

17.一个卖水果的小贩将她的橘子展示成金字塔形.其底为正方形,6 层高,问堆这个金字塔一共需多少个橘子?

A.21　　B.84　　C.91

D.72　　E.36

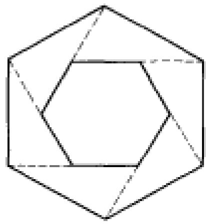


17 题图

18. 正六边形的边向外延长一倍，连接端点后又构成一个大的正六边形. 问小正六边形的面积是大正六边形的面积的几分之几?

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{3}{8}$　　E. $\frac{1}{6}$



18 题图

19. 1 个小孩将边长为 1 cm 的 42 个立方块粘在一起形成一实心的矩形砖. 若矩形砖的底边的周长为 18 cm，问高是多少厘米?

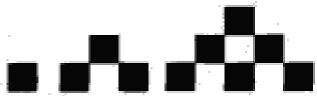
A. 2　　B. $\frac{7}{3}$　　C. 3

D. 6　　E. 7

20. 如图，每一图形都由黑白两种方块按一定的规律构成. 若继续按这种方法构成图形，问第 50 个图形中有多少个黑方块?

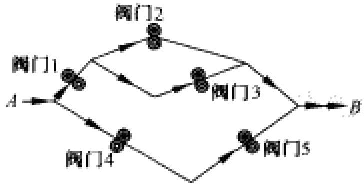
A. 49　　B. 50　　C. 51

D. $66\frac{2}{3}$　　E. 75



20 题图

21. 如图，水通过管道网 A 输送到 B. 管道网一共有 5 个阀门，阀门可以是开或关，即可以让水流通过也可以不让水流通过. 5 个阀门的开或关一共有 $2^5=32$ 个不同组合. 问这 32 个不同的组合中有多少个组合可以让水从 A 流到 B?

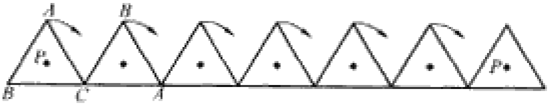


21 题图

A. 17　　B. 16　　C. 15

D. 14　　E. 13

22. ABC 为木质的等边三角形块，P 是三角形的中心，三角形沿一平面按顺时针方向滚动，并且每次都有一条边与平面接触. 若 $PC=2$，问图中点 P 运动的距离是多少？



22 题图

A. $12\sqrt{3}$　　B. 2π　　C. 8π

D. 6π　　E. $14\sqrt{3}$

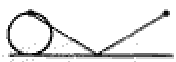
23. 如图，一个硬币沿一直线滚动、并且没有滑动，问硬币外缘一点的运动轨迹是哪一个？



23 题图



A.



B.



C.



D.



E.

24. 一窗户由一个长方形和一个等腰三角形组成(如图). 若窗户的周长是 $6-\sqrt{3}$，窗户的面积是 $\frac{6-\sqrt{3}}{4}$，计算 $x+y$ 值.

A. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{6+\sqrt{3}}{4}$　　C. $\frac{5-\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{5+\sqrt{3}}{2}$　　E. 上述答案都不对



24 题图

25. 64 个白色的 $1\times1\times1$ 的方块用于形成 1 个 $4\times4\times4$ 的立方体，这一立方体的 6 个面都涂上红色. 立方体再拆开成 64 个方块. 方块按下列方法计分：

方块被涂上红色的面	计分
3	3
2	2
1	1
0	−7

问 4×4×4 立方体的总积分是多少？

A. 40　　B. 41　　C. 42

D. 43　　E. 44

26. 在某一个月中，有 3 个星期天的日期是偶数. 问这个月的第十天是星期几？

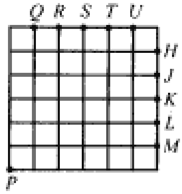
A. 星期六　　B. 星期天　　C. 星期一

D. 星期二　　E. 星期三

27. 如图，在 6×6 的网格中，从点 P 引出两条线将网格分成 3 个面积相等的区域. 问这两条线分别通过哪两个点？

A. M 和 Q　　B. L 和 R　　C. K 和 S

D. H 和 U　　E. J 和 T

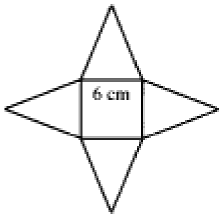


27 题图

28. 如图，4 个等腰三角形与一边长为 6 cm 的正方形相连. 将 4 个三角形折上可形成一个角锥形. 若角锥形的高是 4 cm，问 4 个等腰三角形和正方形的总面积是多少？

A. 84 cm^2　　B. 98 cm^2　　C. 96 cm^2

D. 108 cm^2　　E. 90 cm^2



28 题图

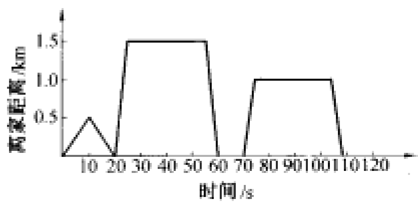
29. 雷蒙德的财务代理在表中公布了服务收费项目. 在她的前 25 次业务中，她每用 1 次支票就要自动计入借方 3 次，并且取现金 1 次. 这以后她只选用一项业务（注：或写支票，或自动计入借方，或取现金）. 问她所需的最少业务次数是多少就可超过一次性收费 15.95 美元？

每项服务收费	
支票	0.50 美元
自动计入借方	0.60 美元
取现金	0.45 美元
一次性收费	15.95 美元

A. 29　　B. 30　　C. 27

D. 28　　E. 31

30. 汤姆上午大部分时间都在访问朋友并一起玩，图表显示了他的行程. 他去朋友家，若朋友在家就和朋友一起玩. 问他在几家停留并且和朋友一起玩？



30 题图

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2}=0$$

A.1　　B.2　　C.3

D.4　　E.5

31.在下列加法竖式中,不同的英文字母代表不同的数字,相同的英文字母则代表相同的数字.若 O 代表数字 7,问 U 代表哪一个数?

$$\begin{array}{r} \text{TWO} \\ +\ \text{TWO} \\ \hline =\ \text{FOUR} \end{array}$$

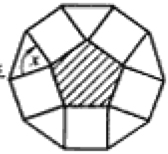
A.5　　B.6　　C.4

D.3　　E.2

32.正五边形的边和角都相等.如图所示一阴影的正五边形被正方形和三角形所包围,问角 x 是多少度?

A.75°　　B.108°　　C.90°

D.60°　　E.72°



32 题图

33.在如图所示的 4×4 方格中,每一横向、纵向和对角线方向上都应是 1,2,3,4 四个数.问 $K+N$ 的值是多少?

A.4　　B.3　　C.5

D.6　　E.7

1	*F*	*G*	*H*
T	2	*J*	*K*
L	*M*	3	*N*
P	*Q*	1	*R*

33 题图

34.艾米利坐在房间的一张椅子上.在她身后有一个钟,在她前面有一面镜子.如图所示是她看到的钟在镜子中的影像.问实际时间约是多少?

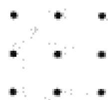
A.4:10　　B.7:10　　C.5:10

D.6:50　　E.4:50



34 题图

35.联结图中任何两点,问有多少种不同的距离?点阵中相邻点的横向和纵向距离相等.



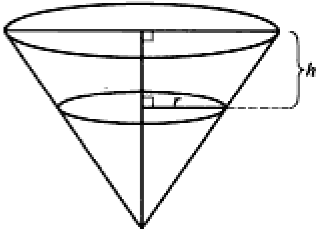
A.5　　B.6　　C.7

D.8　　E.上述答案都不对

36.一个倒圆锥水箱中盛有一些液体.液体表面到锥顶圆面的高度 $h=21-\frac{7}{2}r$ (m),r 为液体表面圆的半径.问锥顶圆面的周长是多少米?

A.9π　　B.12π　　C.15π

D.18π　　E.21π



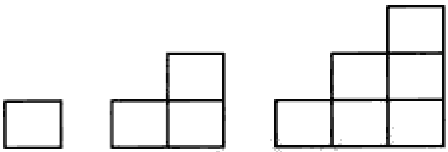
36 题图

37.你掷两个骰子,一个骰子有10个面,面上标的数是1到10.另一个骰子有8个面,面上标的数是1到8.问有多少种方法可得到两个数的和为10?

A.8　　B.9　　C.10

D.18　　E.80

38.第一个图形由4根火柴棍构成,第二个图形由10根火柴棍构成,第三个图形由18根火柴棍构成,以此类推,问第30个图形由多少根火柴棍构成?



38 题图

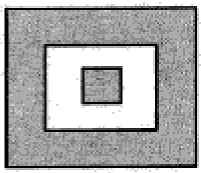
A.900　　B.990　　C.1 080

D.2 700　　E.3 000

39.问图形中阴影部分的面积是多少?三个正方形的边长分别为3,5和7.

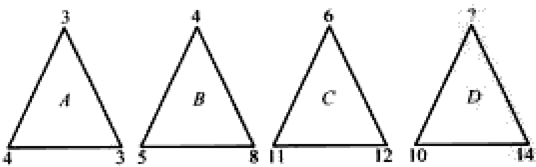
A.24　　B.32　　C.33

D.36　　E.上述答案都不对



39 题图

40.通过仔细观察,已推出每个三角形相应的数值和所处的位置,但三角形D的顶点仍缺1个数,问这个数等于多少?



40 题图

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2}=0$$

A.9　　B.8　　C.7

D.6　　E.5

41.每只雄蜜蜂仅有单亲母亲，而每只雌蜜蜂则有父、母亲．问第十代雄蜂有多少个祖先？

A.89　　B.144　　C.10

D.512　　E.233

42.数学家奥古斯培斯·德·摩根生活在19世纪.他曾说过："在 x^2 年我的岁数是 x 岁."问他是哪一年出生的？

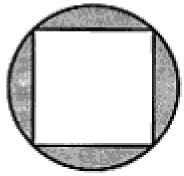
A.1801　　B.1806　　C.1849

D.1860　　E.上述答案都不对

43.每周六合彩的数字是从1,2,3,…,48,49中任意抽出6个.莫菲的父母买了一张彩票，号码为2,17,26,29,30,43.开奖抽出的号码是17,26,30,2和43.问下一个号码为29的概率是多少？

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{6}$　　C. $\frac{1}{30}$

D. $\frac{1}{44}$　　E. $\frac{1}{49}$

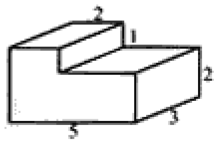


44题图

44.如图，问正方形外阴影部分的面积是整个圆面积的几分之几？

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. $\frac{2}{\pi}$　　C. $\frac{\pi-2}{\pi}$

D. $\frac{1}{3}$　　E.从图中不能确定



45题图

45.如图，立体图形的体积是多少？

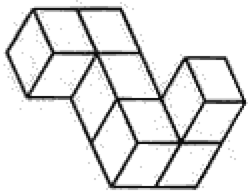
A.12　　B.30　　C.35

D.36　　E.40

46.如图，由4×4×4个小立方体组成一个大立方体．大立方体经表面油漆后再拆开成单一的小立方体．问两面被油漆的小立方体有多少个？

A.8　　B.16　　C.20

D.24　　E.32



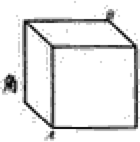
46题图

47.若小方块的边长为1 cm，立体图形的表面积是多少平方厘米？

A.24　　B.25　　C.29

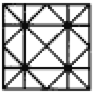
D.30　　E.上述答案都不对

48.如图，一蚂蚁从顶角 A 出发，沿着立方体的棱走过每一顶角一次，最后到达顶角 B.问有多少棱蚂蚁没有走过？

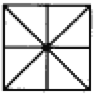


48题图

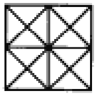
49.克莱尔取了一张正方形的纸，并将纸对折4次，每次括成一个直角等腰三角形．问将纸展开后，纸上留下的折缝是哪一种形式？



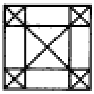
A.



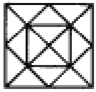
B.



C.



D.

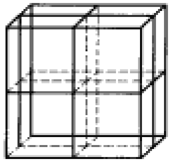


E.

50.一立方体的尺寸为 10 cm × 10 cm × 10 cm,如图所示,在各对平行表面中间切三刀得到 8 个小立方体.问总表面积增加了多少?

A.300 cm^2　　B.800 cm^2　　C.1 200 cm^2

D.600 cm^2　　E.0 cm^2

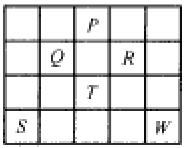


50 题图

51.在如图所示的板上玩一种游戏.在这种游戏中,游戏者可以向上、下、左、右任何方向移动三格,然后再在垂直方向上移动两格.如果游戏者从点 S 开始,并按规定的方法走,板上的哪一位置(P、Q、R、T 或 W)他不能到达?

A. P　　B. Q　　C. R

D. T　　E. W



51 题图

52.一个乐队有 30 个音乐家.其中 12 位能演奏长笛,12 位能演奏小号,6 位既能演奏长笛又能演奏小号.问有多少音乐家既不能演奏长笛又不能演奏小号?

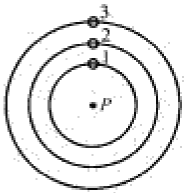
A.0　　B.6　　C.12

D.15　　E.上述答案都不对

53.冥王星有 3 颗卫星.卫星一绕冥王星一周为 6 天,卫星二为 10 天,卫星三为 15 天.从图中所示的位置开始,需要多少天才能回复到原来的位置?

A.30 天　　B.60 天　　C.90 天

D.150 天　　E.900 天

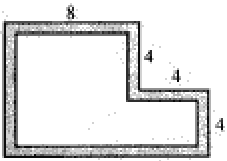


53 题图

54.在棒球比赛中,选手的击球平均数可以用击到球的次数除以轮到击球的次数计算.一选手在轮到 400 次击球次数中击到球 100 次.若到本赛季结束他还有 200 次击球次数,要使击球平均数达 0.300,他需要击到球多少次?

A.60　　B.80　　C.120

D.180　　E.上述答案都不对



55 题图

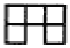
55.若图中阴影部分的宽度恒定为 1 个单位,则非阴影部分的面积与阴影部分的面积的差值是多少?

A.0　　B.4　　C.8

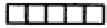
D.12　　E.上述答案都不对

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2}=0$$

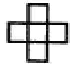
56.由5个边长为1 cm的方块组成下列各图形.问哪个图形的周长最短?



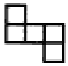
A.



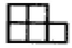
B.



C.



D.



E.

57.从下午10点52分到次日凌晨1点48分一共有多少分钟?

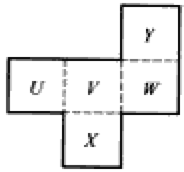
A.124　　B.176　　C.270

D.904　　E.1 200

58.按图中的虚线对折可做成一顶部敞开的盒子.问哪一个字母在底面上?

A. U　　B. V　　C. W

D. X　　E. Y



58题图

59.一台电视机降价最终按200美元销售.如果第一次降价20%、第二次降价10%,那么电视机的原价是多少?

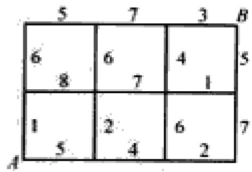
A. $\frac{200}{0.8}$美元　　B. $\frac{200}{0.72}$美元　　C. $\frac{200}{0.7}$美元

D. 200×0.3美元　　E.上述答案都不对

60.如图显示了走过每一段道路所需的费用.问从点A到达点B的最低费用是多少?

A.17　　B.18　　C.19

D.20　　E.21

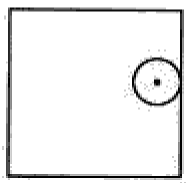


60题图

61.如图,一个半径为2的圆沿着一边长为10的正方形内边滚动一周.问圆心经过的长度是多少?

A.16　　B.24　　C.32

D.40　　E.上述答案都不对

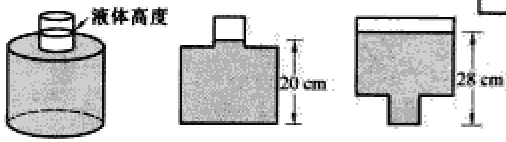


61题图

62.如图(a)所示,一个装有水的密封瓶子由一个半径为1 cm的圆柱和一个半径为3 cm的圆柱构成.如横切面图(b)所示,当瓶子直立时,瓶内水的高度为20 cm.如图(c)所示,当瓶子倒立时水位高度为28 cm.问瓶子的高度是多少厘米?

A.29　　B.30　　C.31

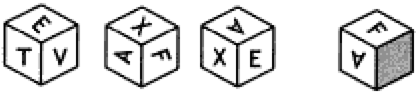
D.32　　E.48



(a)　　(b)　　(c)

62题图

63. 在一个小立方块的每一面都喷刷一个不同的字母. 图中显示了小方块的三个不同的位置.



63 题图

问图中阴影面上的字母是什么?

A. T　　B. P　　C. X

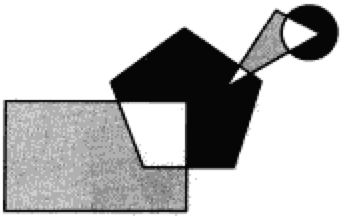
D. E　　E. V

64. 一系列表达式分别为$\frac{7x+1}{2}, \frac{7x+2}{3}, \frac{7x+3}{4}, \cdots, \frac{7x+300}{301}$. 小于或等于 60 并且使上述各表达式都不能约分的 x 一共有多少个不同的正整数值?

A. 1　　B. 2　　C. 3

D. 4　　E. 5

65. 如图所示有长方形、五边形、三角形和圆形, 面积分别为 121, 81, 49 和 25. 问浅色阴影部分与深色阴影部分的面积差是多少?



65 题图

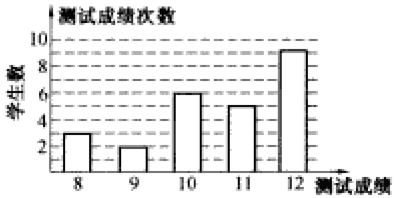
A. 25　　B. 36　　C. 49

D. 64　　E. 信息不足, 不能确定

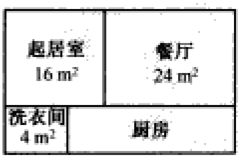
66. 在所示的条形图表中, 25 名学生的小测试成绩中位值是多少?

A. 8　　B. 9　　C. 10

D. 11　　E. 12



66 题图



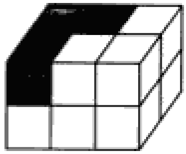
67 题图

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2}=0$$

67.图中显示了一房子第一层的平面布置.起居室和洗衣间为正方形,三个房间的面积也如图所示.问厨房的面积是多少平方米?

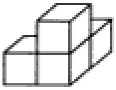
A.12　　B.16　　C.18

D.24　　E.36

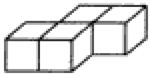


68 题图

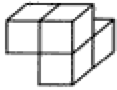
68.长方形的木质柱体由3块组成,每块又由4个小木头方块粘在一起.问下列图中的木块哪一个与黑色块相同?



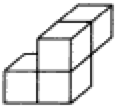
A.



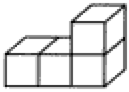
B.



C.



D.

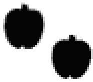


E.

69.苹果、樱桃和葡萄按下列方式放置在画板中:相对区域的水果的值相等.为与2串葡萄等值,在对应的空白区应放多少水果?



A.



B.



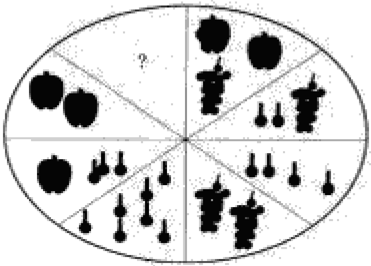
C.



D.

信息不足

E.

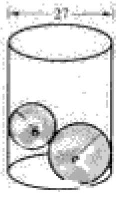


69 题图

70.两个圆柱形水箱紧挨着放置在同一水平面上.一个水箱的半径是4 m,高为10 m,并且盛满了水.另一个水箱的半径是6 m,高为8 m,并且是空的.将一个水箱里的水抽到另一个水箱中,直至两个水箱的水位相等.这时两个水箱体积和是多少?

A.3 672π　　B.3 660π　　C.3 375π

D.3 114π　　E.4 374π



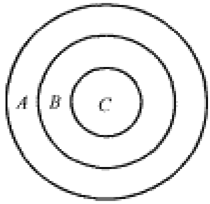
70 题图

71.一个镖靶有三个区域,击中各区域的得分也不相同.三个投手每人各投两镖,得分记录如下.第一个投手:击中 C 区和 A 区各一

次，总计 15 分；第二个投手：击中 C 区和 B 区各一次，总计 18 分；第三个投手：击中 B 区和 A 区各一次，总计 13 分．若第四个投手击中 B 区两次，问她可得多少分？

A. 10　　B. 14　　C. 16

D. 18　　E. 20

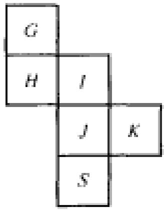


71 题图

72. 若用如图所示的图形折成一个正方体，问与 G 相对的是哪一个字母？

A. S　　B. H　　C. I

D. J　　E. K



72 题图

73. $\angle BAC$ 各边上的交点 $X_1, X_2, \cdots, X_{2n}$ 满足下列条件，$\angle BAC$ 即可认为是"可以系上"：

(1) X_{2k-1} 对于任何 k 值都在 AC 上；

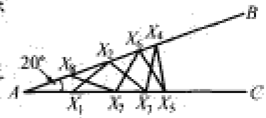
(2) X_{2k} 对于任何 k 值都在 AB 上；

(3) $AX_1 = X_1X_2 = X_2X_3 = \cdots = X_{2n-1}X_{2n} = X_{2n}A$.

例如，图中所示的 20° 角就是"可以系上"的．问可以系上的角度为整数的锐角一共有多少个？

A. 3　　B. 4　　C. 5

D. 6　　E. 7



73 题图

74. 一辆汽车行驶 100 km 需 8.4 L 的汽油．一名机械师可以花费 400 美元将发动机的耗油量降到每 100 km 6.3 L．若汽油的价格为每升 0.80 美元，问汽车至少行驶多少千米才能弥补这 400 美元？

A. 10 000 至 14 000　B. 14 000 至 18 000　C. 18 000 至 22 000

D. 22 000 至 26 000　E. 26 000 至 30 000

75. 在三场篮球比赛之后，米高每场的平均得分是 18 分．在第四场比赛后，她的每场平均得分降到 17 分．问米高在第四场比赛中得了多少分？

A. 18　　B. 17　　C. 16

D. 15　　E. 14

76. 一个执委会的 6 名成员要召开一次会议．这 6 名成员给各自的 6 个下属打电话，每个下属又给各自的 6 个下属再打电话．若每个人都只被通知了一次，问有多少人知道要开会？

A. 18　　B. 36　　C. 216

D. 252　　E. 258

77. 迪安在 28 场篮球比赛中的总得分是 252 分．鲁思比赛的场次比迪安少 10 场，但她每场比赛的平均得分比迪安高 0.5 分．问鲁思的总得分是多少？

A. 153　　B. 171　　C. 180

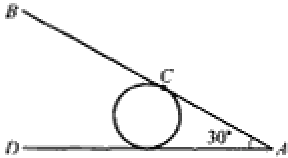
D. 266　　E. 144

78. 如图，金属杆 AB 的中点 C 与一个直径为 12 的圆鼓焊接在一起．金属杆 A 端着

地并且与地面形成30°角.圆鼓开始沿着AD向D的方向滚动.问圆鼓滚动多远才可使点B着地?

A.π　　B.2π　　C.3π

D.4π　　E.5π



78题图

79.八个正方形有相同的中心,对应边平行并且相隔为1个单位.图中显示两个最大的正方形.若最大的正方形的周长是96,问最小的正方形的周长是多少?

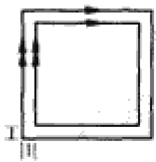
A.40　　B.68　　C.32

D.64　　E.89

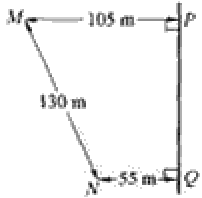
80.如图,一条主要的输气管道经过P和Q两点,要在PQ上找一点T,以便引出一条供气管道向M点的房屋送气;还要从点T引出第二条供气管道向点N的房屋送气.问这两根供气管道的最短距离是多少米?

A.200　　B.202　　C.198

D.210　　E.214



79题图

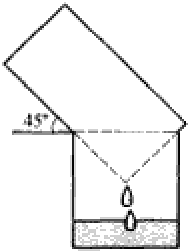


80题图

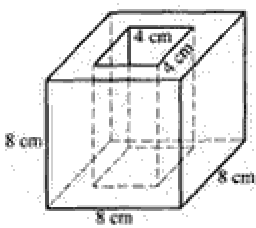
81.如图,将圆桶中的水倒入一个直径40 cm、深50 cm的圆水杯,圆桶放置的角度与水平线成45°.问水杯中的水有多深,才能使水与圆桶接触?

A.10 cm　　B.20 cm　　C.30 cm

D.35 cm　　E.40 cm



81题图



82题图

82.如图,一个边长为8 cm的正方体中央有一个边长为4 cm的方洞.问余下

的体积是多少立方厘米?

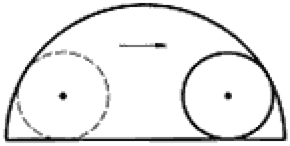
A.64　　B.128　　C.256

D.384

83.如图,一个半径为8的轮子沿着一个半圆的直径滚动直到它撞到半圆上(半圆的半径为25).问轮子不能接触到的直径有多长?

A.8　　B.12　　C.15

D.17　　E.20

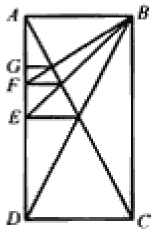


83题图

84.如图,ABCD是一个长方形,从G、F、E引出的小横线段都平行于AB.若$AD=12$,则AG等于多少?

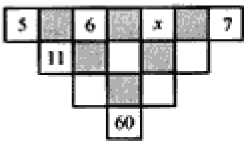
A.$\sqrt{10}$　　B.$\frac{5}{2}$　　C.4

D.$\sqrt{8}$　　E.3



84题图

85.空格中的数是上层两侧数字的和(例如$11=5+6$).问x的值一定是多少?



85题图

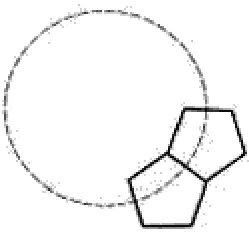
A.4　　B.6　　C.9

D.15　　E.10

86.将完全相同的正五边形按图排列组成一个圆圈.图中排列了前两个正五边形.问需要多少个正五边形才能组成一个完整的圆圈?

A.9　　B.10　　C.11

D.12　　E.13

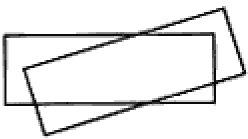


86题图

87.如图所示有两个长方形相交,并形成了五个封闭的区域.在一张纸上画任意两个相交的长方形,最多能形成多少个封闭的区域?

A.10　　B.9　　C.8

D.7　　E.6



87题图

88. 一个计算器显示 5.123456789 [20] 来表示数 5.123456789×10^{20}. 若将这个数再加上 30, 则计算器会显示下列哪一个值?

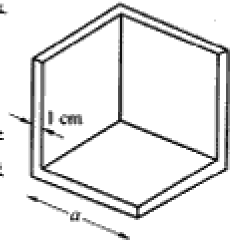
A. 5.123456819 [20] B. 5.123456789 [20] C. 5.123456789 [50]

D. 35.12345679 [20] E. 上述答案都不对

89. 图中有一个切开的 1 cm 厚的钢制立方体. 若立方体的容积为 1 801 cm^3, 则立方体的外边长 a 是多少厘米?

A. 24 B. 25 C. 20

D. 28 E. 31



89 题图

90. 艾利丝和鲍勃在玩一种游戏, 即每个人从标有数字 0,1,2,…,9 的十张牌中取出一张, 然后再放回去. 设艾利丝取出的牌为 A, 鲍勃取出的牌为 B.

若 A > B, 则鲍勃给艾利丝 A × B 分钱.

若 B > A, 则艾利丝给鲍勃 A × B 分钱.

若 A = B, 且为奇数, 则鲍勃给艾利丝 A × B 分钱.

若 A = B, 且为偶数, 则艾利丝给鲍勃 A × B 分钱.

许多轮游戏之后, 各轮的平均结果是下列哪一项?

A. 艾利丝赢了 1 元钱 B. 鲍勃赢了 1 元钱 C. 没有人赢钱

D. 艾利丝赢了 0.45 元钱 E. 鲍勃赢了 0.45 元钱

91. 一家公司进行有奖销售, 即每盒麦片中都有一个 1 至 1 000 中的数字, 连续 20 天每天晚上从 1 至 1 000 中抽出一个幸运数字. 有一位顾客买了许多盒麦片, 并且已经有 500 个不同的数字, 但这些数字均没有被抽到. 发生这种情况的概率大约是多少?

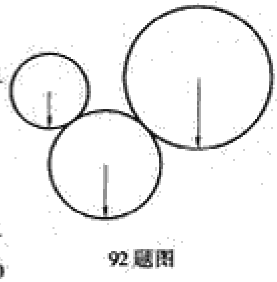
A. $\frac{1}{100}$ B. $\frac{1}{100\,000}$ C. $\frac{1}{10}$

D. $\frac{1}{1\,000\,000}$ E. $\frac{1}{1\,000}$

92. 如图, 有 3 个轮子相切, 它们的半径分别为 6 cm、15 cm 和 20 cm. 若在轮子间没有打滑, 在 3 个箭头再一次同时指向下方时, 小轮子要转多少圈?

A. 12 B. 20 C. 6

D. 15 E. 10



92 题图

93. 掷两个正方形骰子(注: 骰子各面上的数为 1 至 6), 得到的两个数字之和是质数的概率是多少?

A. $\frac{5}{36}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{5}{12}$

D. $\frac{1}{2}$ E. $\frac{2}{9}$

94. 一个办公室有 30 名雇员. 有 5 名雇员讲西班牙语、法语和英语, 有 9 名雇员讲西班牙语和英语, 有 20 名雇员讲法语, 其中有 12 名雇员还讲西班牙语, 有 18 名雇员讲英语, 没有人只讲西班

牙语.问有多少雇员只讲英语?

A.5　　B.6　　C.7

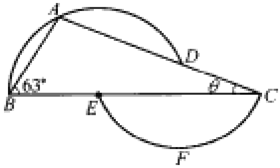
D.8　　E.9

95.一本12页的书需要用15个数字1,2,3,4,5,6,7,8,9,1,0,1,1,1,2来标注页码.问下列哪一个数不可能是标注任意一个书页码的数字的个数?

A.31　　B.543　　C.1 998

D.1 999　　E.2 001

96.图中点 E 是通过 D、A、B 点的圆的圆心,点 D 是通过点 E、F、C 的圆的圆心.θ 为多少度?



96题图

A.18°　　B.20°　　C.22°

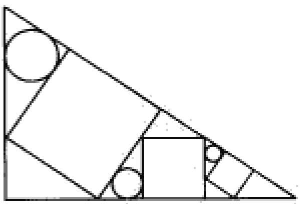
D.24°　　E.14°

97. 序列ABCDEDCBAABCDEDCBAABCDEDCBAABC…的第2 000项是哪一个字母?

A.A　　B.B　　C.C

D.D　　E.E

98.如图,有三个正方形和三个圆在一个直角三角形中相切.最小圆的半径为19,最大圆的半径为99,问另一个圆的半径是多少?



98题图

A.$\frac{1}{2}(19+99)$　　B.$\sqrt{19\times 99}$　　C.$\sqrt{99^2-19^2}$

D.$(\sqrt{19}-\sqrt{99})^2$　　E.$\dfrac{2}{\frac{1}{19}+\frac{1}{99}}$

99.几年前,水泥输送车司机罢工46天.罢工前,司机每小时的工资是7.5美元,每年工作260天,每天8小时.问应增加多少工资才能在1年内弥补罢工的损失?

A.$\frac{23}{1\ 040}\times 100\%$　　B.7.5%　　C.$\frac{23}{130}\times 100\%$

D.$\frac{69}{52}\times 100\%$　　E.上述答案都不对

100.如图,佛雷德(F)、桑迪(S)、罗伯特(R)和盖伊(G)的家都标在长方形点阵图上,并且用线段相连,佛雷德考虑4条路线去访问每一位朋友:

(Ⅰ)$F\to R\to S\to G$　(Ⅱ)$F\to S\to G\to R$

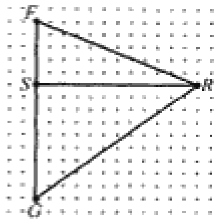
(Ⅲ)$F\to R\to G\to S$　(Ⅳ)$F\to S\to R\to G$

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2}=0$$

如果 FS = 5 km, SG = 9 km, SR = 12 km, 问最长的行走路线与最短的行走路线之差是多少千米?

A. 8　　B. 13　　C. 15

D. 2　　E. 0



100 题图

101. 三个政党竞选 100 000 张选票, 且选票均有效. 选票最多的政党获胜. 获胜的政党至少需要多少张选票?

A. 33 333　　B. 33 334　　C. 50 000

D. 50 001　　E. 66 667

102. 如图, 一只山羊用一根 10 m 长的绳子系在一所正五边形房子的一个顶角上, 正五边形的边长为 6 m. 山羊在正五边形区域内能吃到草的面积约为多少平方米?

A. 240　　B. 100　　C. 215

D. 220　　E. 230

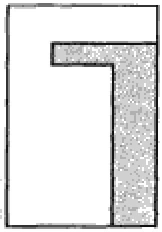


102 题图

103. 如图, 一张长方形的纸沿阴影部分剪成两张(图未按比例画). 一张有六个边, 另一张有八个边. 有八个边的纸的边长分别为 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 有六个边的纸的最大面积是多少?

A. 24　　B. 27　　C. 30

D. 33　　E. 36



103 题图

104. 一首曲子在第一行有 7 个音符: CC GG AA G. 若将这 7 个音符任意排列, 一共可编成多少首不同的曲子?

A. 5 040　　B. 210　　C. 105

D. 72　　E. 12

105. 艾格尼丝说: "比莉总是说真话." 比莉说: "艾格尼丝在说谎." 夏洛特说: "她们两人都在说谎." 问谁说了真话?

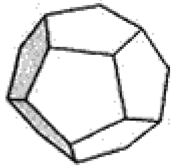
A. 只有艾格尼丝　　B. 只有比莉　　C. 只有夏洛特

D. 比莉和夏洛特　　E. 上述答案都不对

106. 有一个正十二面体如图所示, 每一面为一个正五边形, 相应的面通过棱相邻并在顶角相交. 问这个正十二面体一共有多少个棱和顶角?

A. 20　　B. 42　　C. 50

D. 60　　E. 72



106 题图

107.

H

A　A

R　R　R

M　M　M　M

O　O　O

N　N

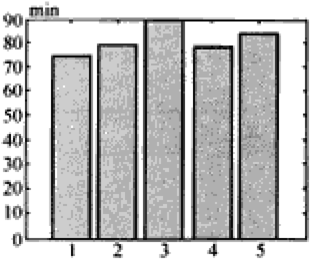
Y

从上到下有多少种不同的路径可以拼出单词 HARMONY?

A. 12　　B. 20　　C. 8

D. 10　　E. 32

108. 5 名马拉松选手所用的比赛时间如图所示. 最快的选手与最慢的选手用时大约相差多少时间?



108 题图

A. 15 min　　B. 20 min　　C. 6 min

D. 12 min　　E. 1 min

109. 一家公司有两个公式计算每个月的电费. 若用电量为 E, 则费用 C 可用下面两个公式计算:

$$C = 60 + 0.2E \quad \text{或} \quad C = 0.3(E - 50)$$

问用电量在下列哪一范围内, 第一个公式计算出的费用要低一些?

A. $E > 0$　　B. $450 < E < 750$　　C. $0 < E < 750$

D. $0 < E < 450$　　E. $E > 750$

110. 对于任意 3 个不同的数 a、b、c, 定义 $a \# b \# c = \frac{a+b}{c-a}$, 则 $1 \# 2 \# 3$ 等于多少?

A. $\frac{3}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{2}{3}$

D. $-\frac{3}{2}$　　E. 1

111. 在托尼的地图上, 从一个城市到另一个城市的距离是 21 cm. 两个城市的实际距离是 1 050 km, 问托尼的地图的比例是多少?

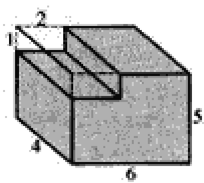
A. 1:50 000　　B. 1:200 000　　C. 1:500 000

D. 1:2 000 000　　E. 1:5 000 000

112. 克洛伊用英文字母做了一密码, 即给每一个字母一个数值. 然后将每个字母的表值相加以计算每个字的值. 用她的密码, BAT 的数值为 6. 同样地, 她的密码给出 CAT 的值为 8, CAR 的值为 12. 问依据她的密码 BAR 的数值是多少?

A. 10　　B. 14　　18

D. 12　　E. 20



113 题图

113. 图中阴影固体的体积是多少?

A. 8　　B. 112　　C. 113

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial z^2} = 0$$

D. 120　　　　E. 128

114. 如图，在方格中放有正整数，并使得横向、纵向及对角线方向上的数的乘积相等．一些方格中已填有数字．问 N 可以有多少不同的取值？

N		24
	12	
6		

114 题图

A. 4　　　　B. 15　　　　C. 9

D. 6　　　　E. 12

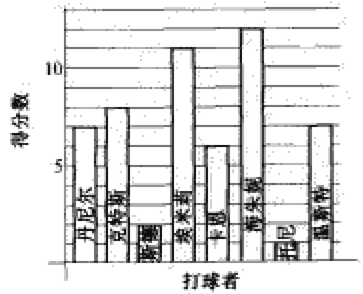
115. 下表列有某一城市上一周最高和最低温度的记录．问哪一天的温差最大？

	最高温度/℃	最低温度/℃
星期一	5	−3
星期二	0	−10
星期三	−2	−11
星期四	−8	−13
星期五	−7	−9

A. 星期一　　　　B. 星期二　　　　C. 星期三

D. 星期四　　　　E. 星期五

116. 图表显示 8 名选手在最后一场篮球比赛中的得分情况．问总分一共是多少？



116 题图

A. 54　　　　B. 8　　　　C. 12

D. 58　　　　E. 46

117. 将不同的两个数字填入空格使 15.2 + 1.52 + 0.15□ + □.128 = 20 成立，问这两个数的和是多少？

A. 5　　　　B. 6　　　　C. 7

D. 8　　　　E. 9

118. 劳拉每小时挣 10 美元，并且工作 10 天，每天 8 小时，她花了收入的 25% 用于支付食品和衣服，又缴了 350 美元房租．问她还剩留有多少钱？

A.275 美元　　B.200 美元　　E.350 美元

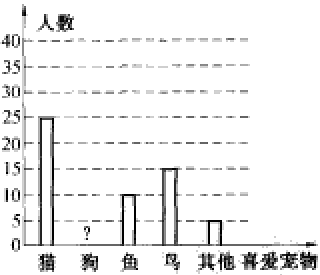
D.250 美元　　E.300 美元

119. 艾米丽用一排地砖创造了一种跳跃游戏. 她将地砖标上 1,2,3,4,… 并从第 2 块地砖开始沿这一排地砖跳跃,每两块地砖着地一次,最后停在倒数第 2 块地砖上. 转身后从倒数第 2 块地砖她开始向回跳跃,这一次是每隔三块地砖着地一次,最后停在第 1 块地砖上. 最后她又转身从第 1 块地砖开始跳跃,每隔五块地砖着地一次. 这一次她又停在倒数第 2 块地砖上. 问这一排一共有多少块地砖?

A.39　　B.40　　C.47

D.49　　E.53

120. 在一项民意调查中,询问 90 个人"你们最喜欢的宠物是什么?"他们的回答显示在图表上,但在一图表上代表最喜欢狗的人数的长条被省去了. 问有多少人选择的是狗作为他们最喜欢的宠物?

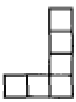


120 题图

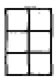
A.20　　B.55　　C.40

D.45　　E.35

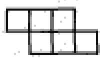
121. 下列哪一个图可以沿边线折成一个正方形?



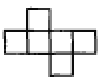
A.



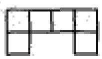
B.



C.



D.

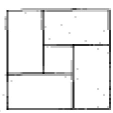


E.

122. 如图,有 4 块长方形砖包围有一个正方形. 长方形砖的长度为 18,宽度为 10. 问围成的小正方形的边长是多少?

A.6　　B.8　　C.9

D.10　　E.12



122 题图

123. 每天莉莎将她的零钱(5 美分和 10 美分硬币)放入储蓄罐

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2}=0$$

中.这个周末她决定数一下储蓄金.她有72个硬币,总面值为4.95美元.问有多少个10美分硬币?

A.14　　B.23　　C.25

D.27　　E.上述答案都不对

124.当马克到达加油站时,汽油箱的油压表读数为油箱容积的$\frac{1}{8}$.加了25 L油后,油压表读数为容积的$\frac{5}{8}$.按升表示油箱的容积是多少?

A.40　　B.45　　C.50

D.60　　E.上述答案都不对

125.派克先生在数学课上问他的5个学生昨天晚上是否参加了合唱练习.

佩特拉说:我们都没有参加.

彼得说:我们中有1人参加.

保罗说:我们中有2人参加.

帕特丽夏说:我们中有3人参加.

普莱拉说:我们中有4人参加.

派克知道没有参加的人说了谎,参加的人说了真话.问一共有几个人参加了合唱练习?

A.0　　B.1　　C.2

D.3　　E.4

126.有多少方法使13表示为3个不同正整数的和?注意13=4+8+1和13=1+4+8只算一种方法.

A.5　　B.6　　C.7

D.8　　E.14

127.序列2,1,3,4,7,11,…的下一项是多少?

A.10　　B.12　　C.15

D.18　　E.22

128.如图,在3×3的表格中填上数字1~9各一次.各行和各列的和已在表旁给出.问*号格中的数字是多少?

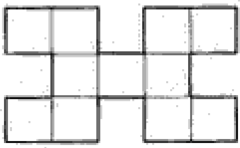
			15
			12
		*	18
24	6	15	

128题图

A.4　　B.5　　C.6

D.7　　E.上述答案都不对

129.如图所示的图形的周长是多少?图中小方块为1×1个单位.



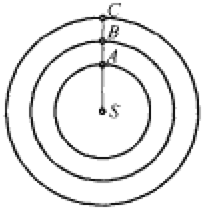
129题图

A.20　　B.21　　C.22

D.23　　E.24

130.如图,三个行星成一直线,行星A绕太阳一周需2年,行星B绕太阳一周需4年,行星C绕太阳一周需6年.问至少需要多少年三个行星又处于同一直线上?

A.6年　　B.8年　　C.9年



130 题图

D.12 年　　　　　E.24 年

131.在图示的方格中，横向、纵向及对角线方向上的数字相乘都得出同样的结果.问两个空格中数字和是多少?

12	1	18
9	6	4
		3

131 题图

A.28　　　　　B.15　　　　　C.30

D.38　　　　　E.72

132.标记为 A 的空格中的数字是多少? 每一空格都含有一数字.

				总和
		A	4	20
		4	9	
	8			13
总和	24		16	55

132 题图

A.5　　　　　B.6　　　　　C.7

D.8　　　　　E.9

133.在一乘法题中，四个空格中的数字和是多少?

$$\begin{array}{r} 879 \\ \times 492 \\ \hline \square 758 \\ 7\square 11 \\ 35\square 6 \\ \hline 43\square 468 \end{array}$$

133 题图

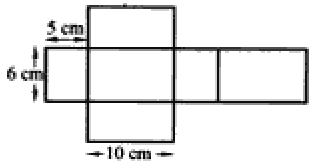
A.13　　　　　B.12　　　　　C.27

D.9　　　　　E.22

134.所示的图可以被折成一矩形柱体.问柱体的表面积是多少平方厘米?

A. 312　　B. 300　　C. 280

D. 84　　E. 600

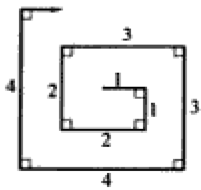


134 题图

135. 达拉在一张大纸片上建"长方形螺旋"，其方法是以厘米为单位画长度为 1，1，2，2，3，3，4，4，…的线段，如图所示. 在总长度为 3 000 cm 时，他的钢笔墨水用完了. 问达拉画的最长的线段是多少厘米？

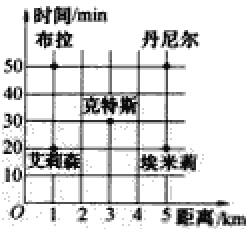
A. 38　　B. 39　　C. 54

D. 55　　E. 30



135 题图

136. 下边的图表显示 5 个人步行的距离和花费的时间，按平均值计算，哪一个人走得最快？



136 题图

A. 艾利森　　B. 布拉　　C. 克特斯

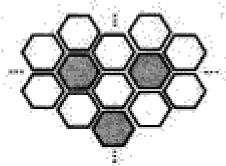
D. 丹尼尔　　E. 埃米莉

137. 一个长方形标志牌的尺寸为 9 m × 16 m，标志牌上印有一正方形广告，正方形广告的四周应至少留 1.5 m 宽. 问最大的广告面积是多少？

A. 78 m^2　　B. 144 m^2　　C. 36 m^2

D. 9 m^2　　E. 56.25 m^2

138. 如图，一正方形地板上用正六边形砖铺面. 砖有蓝色和白色两种. 每 1 块蓝色的砖被 6 块白色的砖所包围，而每 1 块白色的砖则由其他 3 块白色的砖和 3 块蓝色的砖所包围. 忽略切开的砖，问蓝色砖的数量与白色砖的数量比最接近多少？



138 题图

A. 1∶6　　B. 2∶3　　C. 3∶10

D. 1∶4　　E. 1∶2

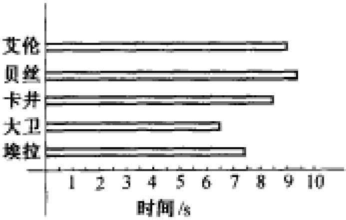
139. 字母表上前 6 个字母分别用数字表示，而 $A=1, B=2, C=3, D=4, E=5$ 和

$F=6$,一个英文字的数位由这些字母的数值相加而成.例如 *BEEF* 的值是 $2+5+5+6=18$.问下列哪一个英文字数值最大?

A. *BEEF*　　B. *FADE*　　C. *FEED*

D. *FACE*　　E. *DEAF*

140.5 只老鼠进行 25 m 赛跑.图表显示了每只老鼠完成比赛的时间,问哪只老鼠赢得了比赛?

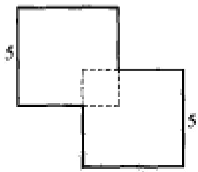


140 题图

A. 艾伦　　B. 贝丝　　C. 卡井

D. 大卫　　E. 埃拉

141.如图,两个边长均为 5 cm 的正方形有部分重叠,重叠的部分也是一个正方形,并且面积为 4 cm^2.问整个阴影图形的周长是多少厘米?



141 题图

A. 24　　B. 32　　C. 40

D. 42　　E. 50

142.如图,数字排列形式,每一排由 1 开始,由 2 结束.其他数则是上一排直接对着的两个数的和.例如第四排的 9 即是第三排两个对着的数 4 和 5 之和.若按此排列形式继续下去,问第十三排数的总和是多少?

1　2

1　3　2

1　4　5　2

1　5　9　7　2

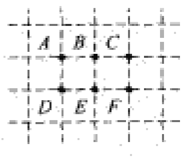
⋮

142 题图

A. 12 270　　B. 12 276　　C. 12 282

D. 12 288　　E. 12 294

143.如图,在一个正方形的网格上有 *A*、*B*、*C*、*D*、*E* 和 *F* 6 个点.任意联结 3 个点,问可以得到多少不含直角的三角形?



143 题图

A. 2　　B. 1　　C. 6

D. 0　　E. 4

将以上试题与我国的全国初中数学联赛相比较不难发现,现象是一个高深,一个浅显,一个枯燥,一个有趣,一个抽象,一个通俗,但本质上是反映了两国教育思想与理念的不同,中国是造就精英,美国是提升草根,我们的主流社会被精英把持,主流价值观由精英倡导,主流声音由精英传播,主流氛围由精英营造.而美国的主流社会就是草根阶层,他们的趣味左右着社会的走向,他们通过手中的选票挑选能够代表自己利益的政客,教育是社会阶层流动的最有效渠

道，每个人都有权决定自己的发展方向和智力的开发程序，所以有效的教育决策应该是市场化的即是分散的，而决不应该是计划的统一的，欧洲大学曾培养出众多的令美国人生羡的诺贝尔奖得主，但由于政府控制，高度计划变得江河日下，无法望美国一流大学之项背，不能不引起深思．近年来中国数学界对数学与实际相脱离的倾向有所警觉，开展了数学建模竞赛，因为要用数学方法解决一个实际问题，不论这个问题是来自工程、经济、金融还是社会领域，都必须设法在实际问题与数学之间架设一个桥梁，将这个实际问题化为一个相应的数学问题，然后对这个实际问题进行分析和计算，最后将所求得的解答回归实际，看能不能有效地回答原先的实际问题．在这个过程中，为所考察的实际问题建立数学模型，即为数学建模，近5年来全国大学生数学建模竞赛题为：

2002年：车灯线光源的优化设计，彩票中的数学，赛程安排；

2003年：SARS的传播，露天矿生产的车辆安排，强渡长江；

2004年：奥运会临时超市网点设计，电力市场输电阻塞管理，公务员招聘；

2005年：长江水质的评价和预测，DVD在线租赁，雨量预报方法的评估；

2006年：出版社的资源配置，艾滋病疗法评价与疗效预测，煤矿瓦斯和煤尘的监测与控制．

这是我们在考试方面与美国的差异．我们再来看一下教材的问题．

如果说剧本是一剧之本，那么教材便是教学的灵魂，美国波士顿学院化学系教授潘毓刚指出：

> “（在中国）考试是根指挥棒．考试着重对知识的记忆也影响到教材的编写和教学的方式．为了通过一次考试就把数量众多的学生分出等级差别，难免出偏题、出难题，而这些偏题、难题往往对学生今后的发展没有什么帮助，使学生把许多精力花到不值得的地方．为了对付考试中的偏题、难题，编写教材的老师就各显神通，合写一本教材的几个人都不甘示弱，结果教材的深度有了，但各部分条块分割，缺少逻辑的连贯，这对学生理解和运用知识不利．
>
> 在现行考试的指挥棒下，课堂上老师教得很细，教得越细越是好老师．学生只要抄、背老师讲的内容，就能考好．没讲的内容不会考．结果，考时记住了，过一阵就忘，要用又不会．
>
> （潘毓刚．对于高等教育改革和人才培养的一些想法．原载张劲夫主编．海外学者论中国．华夏出版社，1994：157）

第五回　觅天才　克雷基金供经费
探索题　威斯康星来主持

我们再来看一下陶哲轩的经历.他出生于澳大利亚,从小就被人称之为神童,他8岁上中学,12岁已读大学三年级,这样的经历对我们并不陌生,在中国的一些神童的经历中也可见到(像当年中国科学技术大学少年班的宁铂,谢彦波等等).更让我们感到熟悉的是,陶哲轩也曾参加过奥数,1986年,1987年和1988年,陶哲轩三次成为国际数学奥林匹克最年轻的参赛者,分别赢得了铜牌、银牌和金牌,奥数神童陶哲轩成了菲尔兹奖的得主,而我们那么多星光闪耀的神童,奥数金牌得主呢?笔者注意到陶哲轩的几句话:"我想培养对数学的兴趣最重要的一点,就是有能力和自由跟数学一起玩——给自己找些小挑战,设计一些小游戏."陶哲轩鼓励人们"跟数学一起玩",自己也是如此,可是国内的学生能做到这一点吗?很多人学习奥数是被逼的,是带有极强功利性的,如此沉重的压力下,他能享受到数学中的乐趣,能做到"跟数学一起玩"吗?如果陶哲轩在国内上学,他能"有能力和自由跟数学一起玩"吗?我想,很难,环境能改变人,很多东西不是由他,而是由他父母所决定的,环境对人的改变是潜移默化的,正如"温水煮青蛙"一样,在点滴之中,即使勇士也未必能幸免……,历史不可假设,我们也不能判断陶哲轩如果在国内求学,是否会取得今日之成就,我们只知道,陶哲轩不是在国内求学的,丘成桐也不是在国内求学的;我们还知道,我们拥有若干的神童,曾经有很多人夺过奥赛金牌,可是在科学最高峰,很少见到他们的身影.(李瑛华.科学才子陶哲轩.上海中学数学,2007,第1-2期)

其实从建国初期,我们就一直在寻求数学天才的路径与方法,开始是各中学开展的数学兴趣小组,尤以南方城市为甚,起名也很数学化,如"高斯小组""阿贝尔小组""伽罗瓦小组""$\alpha\beta\gamma$小组""祖冲之小组",后来这种以民间分散为特点的活动逐步被官方的有组织的地方数学竞赛所取代,最后演变为"中央集权"式的全国数学竞赛,渐渐与我们的政治生活与社会生活的形态相吻合,然后进入了超稳定阶段,虽"文革"期间有十年中断,但从1978年恢复后,至今没有任何改变,只是题型与分值有所调整.

在21世纪的最初几年,竞争力和创新已经成为美国政府和社会各界普遍关注的话题,"创新美国"和"创新教育"时常出现在美国媒体的标题上,进入人们的视野.其实比创新更深层次的期待是众多理科天才的培养,为了使读者对美国选拔数学天才的机制有所了解,下面我们介绍美国威斯康星州的"天赋探索"活动,我们从多年众多试题中选择了26个题及解答希望读者可以通过比较看出中美数学教育的不同之处,最后我们还附了17个试题供读者牛刀小试.

"天赋探索"的全称是"威斯康星数学科学和工程天赋探索",由麦迪逊威斯

康星大学数学系的 L.C.杨教授创办.近年(如 1989 ~ 1990 学年度)由克雷研究基金会提供经费,麦迪逊威斯康星大学数学系主持.

"天赋探索"是一种系列的带有竞赛性的中学数学兴趣活动.创办者的宗旨是:通过解具有挑战性的数学题,使年轻人在科学和数学等方面从发现和实践他们天赋的机会中得益.凡威斯康星州的初、高中学生都可参加,以自愿为原则.在将近两个学期的时间内参加者解答由主持单位分期寄发的五组数学题,整个过程都以分散、开卷、自由活动的形式进行,但强调这是一种个人活动,"参加者必须自己独立解答问题".因此这项系列活动带有一定的竞赛性.

该活动的主持者声称:"天赋探索"的数学题对那些习惯于从课堂学习数学的学生来讲是很典型的难题,这些题覆盖了算术(初等数论)、初等代数和几何,此外不再需要其他特别的数学知识.解"天赋探索"题通常要求具有洞察力、机灵和创造能力,并要有坚忍不拔的精神.因此,他们不要求所有参加者解答全部问题,"只要解能解的"题即可.他们还鼓励参加者,"如果发现自己并非所有问题都能解答时,不要惊慌,能解其中一些已经很好了."

主持者认为通过这一活动可以使参加者发现创造性活动的愉快,得到解难题的训练,学到在课堂上学不到的某些新的数学知识.如果有心对这些问题一试的话,参加者将会发现自己的数学天赋.

该活动的具体办法是:分期将五组问题寄发给参加者,每组由五道题组成.参加者接到一组题后,可用四周时间解题并写成答案寄到主持单位,接着主持者寄发另一组题并附有上一组的答案,接下去第二次再寄上一组的解题者名单,为替解题者保密,1989 ~ 1990 年度对解题者进行了编号,并函告本人(1989 ~ 1990 年度,五组题分别于十月、十一月、十二月、二月和三月寄发).

该活动每年有一个"荣誉日项目",邀请威斯康星州优秀解题者及其教师参加."荣誉日项目"包括讲演、午餐会、授奖和参观实验室或科研项目等活动.

主持者在给教师的信中,除要教师鼓励学生参加该活动,并向学生说明因问题很难,解题所费时间可能很长等应注意的问题及应遵守的规则外,还要教师向学生强调用简洁的形式写出答案的重要性.为了使读者更好地了解美国科学天才秀的选拔方式.下面介绍几个早期的试题.

1.现有一规则,每当给定正整数 x 和 y 时,就能确定一个正整数 $x\square y$.已知 $1\square 1=1$,并对所有 x,y,z 有 $(x\square y)+z=(y\square z)+x$.证明对所有的正整数 a,b,$a\square b=a+b-1$.

证明 把 $x=1$ 和 $y=1$ 代入给出的公式得

$$1+z=(1\square 1)+z=(1\square z)+1$$

因而对所有的 z 有 $1\square z=z$.现把 $x=1$ 代入原公式得

$$(1\square y)+z=(y\square z)+1$$

既然有 $1\square y=y$,这就给出了 $y+z=(y\square z)+1$,因而 $y\square z=y+z-1$,这就是所希望的.

2. 劳杰克岛上的每一个居民或是讲真话的骑士，或是说谎的恶棍，我遇到四个叫 A,B,C,D 的劳杰克人，他们中三人这样讲：

A:“B 是一个恶棍”

B:“我们之中恶棍的数目是奇数”

C:“D 是一个 xark”

我知道在劳杰克语言中“xark”的意思或者是指“恶棍”或者是指“骑士”，但我记不清是那一个. A 是 xark 吗？证明你的答案.

证明 A 肯定不是 xark. 如果 A 是骑士，则 B 是恶棍，所以 A,B,C,D 中恶棍数是偶数. 既然 B 是恶棍，C 或 D 刚好有一个是恶棍. 如果 C 是恶棍则 D 不是 xark 而是一个骑士，所以在这种情况“xark”的意思必指“恶棍”而且既然假定 A 是骑士，他不是 xark. 根据 A 是骑士的假设再假定 C 是骑士，则 D 必是恶棍，他也是 xark. 在这种情况“xark”的意思是指恶棍且 A 不是.

3. 假定 $a\sqrt{2}+b\sqrt{3}+c\sqrt{5}=0$，其中，$a,b,c$ 为整数，证明 $a=b=c=0$.

证明 我们从一个引理开始，我们说 x 是一个整数且$\sqrt{x}=\frac{m}{n}$，其中 m,n 都是整数，则$\sqrt{x}$是一个整数. 为看清这点，我们可假设分式$\frac{m}{n}$是最简式，且 $n>0$，我们有 $x=m^2/n^2$，所以 $m^2=xn^2$，如果 p 是整除 n 的任一素数，则 p 整除 n^2，因而 p 整除 $xn^2=m^2$，这就会有 p 整除 m，但既然分式$\frac{m}{n}$是最简式，这是矛盾的，这就得 p 不存在，n 没有素因数，因而 $n=1$，且$\sqrt{x}=m$ 为一整数.

现假设 $a\sqrt{2}+b\sqrt{3}+c\sqrt{5}=0$，则 $5c^2=(-c\sqrt{5})^2=(a\sqrt{2}+b\sqrt{3})^2=2a^2+3b^2+2ab\sqrt{6}$，故得 $2ab\sqrt{6}=5c^2-2a^2-3b^2$，且如果 $ab\neq 0$，这就给出$\sqrt{6}=\frac{5c^2-2a^2-3b^2}{2ab}$，既然这个分式中的分子和分母都是整数，由引理$\sqrt{6}$是一个整数，这是不对的，没有一个整数的平方是 6，这一矛盾证明了 $ab=0$. 非常类似的推理，使用$\sqrt{10}$，$\sqrt{15}$不是整数的事实，证明 $ac=0$，且 $bc=0$，我们可以推得 a,b,c 中至少有两个为零，则原方程包含了第三个也是零.

4. 桌子上放着四枚互不碰到的分币，证明至少有 2 枚分币的中心间的距离大于$\sqrt{2}$乘分币的直径.

证明 如图，所示设 $ABCD$ 为由四枚分币的四个中心组成的四边形且假定$\angle A$ 为此四边表中四个内角中最大的角. 因为 $ABCD$ 四角之和为 $360°$，我们必有$\angle A\geqslant 90°$.

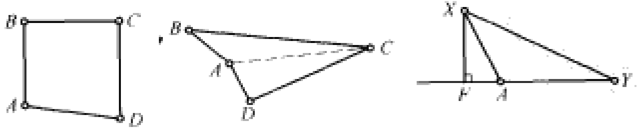


图 1

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2}=0$$

如果$\angle A \geqslant 180°$，作 AC 且注意到既然$\angle BAC + \angle DAC \geqslant 180°$，二个角中至少有一个$\geqslant 90°$，这就推出必存在两个分币中心与 A 构成的角$\geqslant 90°$，但$< 180°$（在第一种情况，将是 B 和 D；而在第二种情况将是 B 和 C 或 D 和 C）。称这两点为 X 和 Y.

从 Z 作 AY（延长线）的垂线 XF，且注意

$(XY)^2 = (XF)^2 + (FY)^2 = (XF)^2 + ((FA) + (AY))^2 \geqslant (XF)^2 + (FA)^2 + (AY)^2 = (XA)^2 + (AY)^2$

现有，X, A, Y 是互不相碰的分币的中心，因而 $XA > d$ 和 $AY > d$，这里 d 为分币的直径. 这样$(XY)^2 > d^2 + d^2 = 2d^2$，即得 $XY > \sqrt{2}d$，如所需求的.

5. 我有一个边长为 1 m 的正方形，想用三个相等的圆盘将其覆盖（允许重叠）. 证明如果圆盘的直径为 1 008 mm，覆盖是可能的.

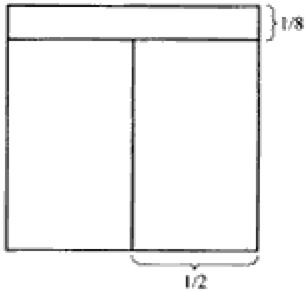


图 2

解 如图 2 所示，把正方形分成三个矩形，如图所示：一个为 $1\ \mathrm{m} \times \frac{1}{8}\ \mathrm{m}$. 另两个每个为 $\frac{1}{2}\mathrm{m} \times \frac{7}{8}\mathrm{m}$.

注意到 $\sqrt{1 + (\frac{1}{8})^2} = \sqrt{\frac{65}{64}}$，且还有 $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{(16+49)}{64}} = \sqrt{\frac{65}{64}}$，所以三个矩形有同样长的对角线$\sqrt{\frac{65}{64}}$，因而每一个都能被具有这种长度直径的圆盘所覆盖. 所以三个直径为$\sqrt{\frac{65}{64}}$的圆盘足以覆盖原来的正方形.

因为$\sqrt{\frac{65}{64}} = 1.007\ 78\cdots$，我们见到三个直径为 1 008 mm 的圆盘覆盖此正方形绰绰有余.

6. 对于每个整数 n，现有一个给出一个新的整数 n^* 的规则.（允许 $n \leqslant 0$ 以及 $n > 0$）对所有 n，下面性质成立：$(n^2)^* = (n+1)n^*$ 和$(n^*)^* = n^* - 1$. 计算 101^* 并证明答案是对的.

解 在第一个等式中取 $n = -1$，给出 $1^* = ((-1)^2)^* = (-1+1)(-1)^* = 0(-1)^* = 0$，第二个等式仅仅说明把 $*$ 用到作为某个数的 $*$ 的任意数与从该数减去 1 是同一回事，我们知道 0 是某个数 $*$，因而 $0^* = -1$. 现有 -1 是某个数的 $*$，所以$(-1)^* = -2$，这样继续下去，我们见到对所有负整数 n，我们有 $n^* = n - 1$.

现在我们以 $n = -11$ 应用第一个等式，得到 $121^* = (-10)(-11)^* = (-10)(-12) = 120$. 因此 120 是某个数的 $*$，所以 $120^* = 119$. 这样 $119^* = 118$，

且 $118^*=117$，这样继续下去，我们是 $101^*=100$.

7. 假定对于正数 x,y,z 有 $x+y^2=y+z^2=z+x^2$. 证明 $x=y=z$.

证明 由于 x,y,z 是对称的，所以我们不妨假设 $x=\max\{x,y,z\}$. 由等式 $x+y^2=y+z^2$，我们得 $z^2-y^2=x-y\geqslant 0$，所以 $z^2\geqslant y^2$. 再注意到 z 为正数，故有 $z\geqslant y$，现又有 $z^2-x^2=z-y\geqslant 0$ 因而 $z^2\geqslant x^2$，由于 z 是正数，得 $z\geqslant x$.

前面我们已有 $x\geqslant z$，所以 $x=z$. 又因为 $y^2-x^2=z-x=0$，所以 $y^2=x^2$，我们得 $y=x$（再一次利用了 x,y 是正数）. 我们现在有 $x=y=z$，这就是要证明的.

8.（新年问题）有两个正整数，它们的积比它们的和的三倍大 1 988. 求此两整数，且证明，再没有其他解.

解 设这两个整数为 x 和 y，由已知条件，$xy=3(x+y)+1\ 988$. 所以有 $xy-3x-3y=1\ 988$. 两边加 9，我们把左边作因式分解，可得 $(x-3)(y-3)=1\ 988+9=1\ 997$，因为 1 997 是素数（可用计算器检验），两个因子必为 1 和 1 997，（它们不可有为 -1 和 $-1\ 997$，因为 $x>0,y>0$，所以 $x-3,y-3$ 都不能等于 $-1\ 997$）. 所以，我们假定 $x-3=1,y-3=1\ 997$，我们得两个数为 4，2 000.

9. 对每一个正数 x，由某种固定规则定义一个新的正数 x^*，假定，对所有的 $x,y>0$，$x^*y=(xy^*)^*$，证明 $(xy)^*=x^*y^*$，对所有这样的 x,y 成立.

证明 在基本方程 $x^*y=(xy^*)^*$ 中，设定 $x=1$，得 $1^*y=y^{**}$，特别的通过代入 $y=1$ 有 $1^*=1^{**}$. 现在代入 $y=1^{**}$，我们得到 $(1^*)^2=1^{***}$，但是 $1^{***}=(1^{**})^*=1^{**}=1^*$，故 $(1^*)^2=1^*$，且有 $1^*=1$，这样 $y^{**}=1^*y=y$，故对任何数两次使用 $*$ 使该数保持原值.

现在，在原方程中，y 用 y^* 代入，我们得到 $x^*y^*=(xy^{**})^*=(xy)^*$，如所要证的.

10. 证明，如果有一个由 9 个整数组成的集合，则可以选择其中 5 个使它们的和是 5 的倍数.

证明 设 9 个数的每一个都写成 $5q+r$，其中 $0\leqslant r\leqslant 4$，如果总共出现了 5 种余数，或哪一种出现 5 次，问题就解决了，假定这两种情况都没出现，如果刚好出现了四种余数，由抽屉原则至少有一种出现至少三次，而它与出现的其他两种余数是等距离的，如果我们把从 4 到 1 的距离算作 2，4 到 0 算作 1，等等. 则我们把这 5 个数（三个余数相同的加两个余数等距离的）加起来将是 5 的倍数，如果只出现 3 种余数，则一种与另两种是距离的，如果它出现 3 或 4 次，则就是上面的情况. 如果该余数出现 1 或 2 次，则另两种分别出现 3 和 4 次，而出现 3 次和 4 次中的各二个数加上另一个就符号要求. 如果出现的余数少于 3 个，则必有一个至少出现 5 次. 取这 5 个数即可.

11. 求方程 $\frac{17}{x}+\frac{29}{y}=1$ 的所有整数解，证明你已求全了.

解 将给定的方程乘以 xy，得 $17y+29x=xy$，因此 $xy-17y-29x=0$，如果两边同时加 17×29，并对左边进行因式分解，我们得

$$(x-17)(y-29)=17\times 29$$

因为 x 和 y 都是整数，而 17 和 29 都是素数，以下是仅有的可能

$$x-17=\pm 1 \quad y-29=\pm 17\times 29$$
$$x-17=\pm 17 \quad y-29=\pm 29$$
$$x-17=\pm 29 \quad y-29=\pm 17$$
$$x-17=\pm 17\times 29 \quad y-29=\pm 1$$

由这八种不同的情况，可得此问题的七组解（我们必须删去 $x=0$ 和 $y=0$）. 以列表的形式给出解如下

x	18	16	2×17	$17+29$	$17-29$	17×30	-17×28
y	29×18	-16×29	2×29	$17+29$	$29-17$	30	28

12. 空间有一点 P，它到正方形 $ABCD$ 的顶等距离. 证明 P 位于垂直于正方形所在平面并通过正方形中心的直线上.

证明 设此正方形的中心为 X，则 X 是线段 AC 的中点. 在 P,A,C 所确定的平面上，我们看到既然 P 到 A 和 C 是等距离的，那么它必在此平面内的 AC 的垂直平分线上. 既然 X 是 AC 的中点，我们可得结论 $PX\perp AC$.

类似的推理，可证明 $PX\perp BD$. 因此 PX 垂直于正方形所在平面内的两条相交直线，由此得 PX 垂直于此平面.

13. 考虑分数 $\frac{a}{b}$，其中 a 和 b 都是正整数，让我们约定如果 $\frac{ab}{a+b}$ 是一个整数，则称这分数为"不平常的"（不平常分数的例子有 $\frac{4}{4}$，$\frac{3}{6}$，$\frac{15}{10}$），证明一个不平常分数总可以被化成较简式.

证明 假定 $\frac{a}{b}$ 是不平常的，因为 $a>1$，$b>1$，我们有 $a+b>2$，因而存在某个素数 P 整除数 $a+b$，但是既然 $\frac{a}{b}$ 是不平常的，$\frac{ab}{a+b}$ 是一个整数，所以 ab 是 $a+b$ 的倍数，因而它是素数 P 的倍数.

既然 P 除尽 ab，它必至少除尽 a 或 b 之一. 例如，假定 P 除尽 a. 因为 $b=(a+b)-a$，而 p 同时除尽 $a+b$ 和 a，它必除尽 b. 同样，如果 P 除尽 b，它必除尽 $a=(a+b)-b$，所以在任何情况下，P 同时除尽 a 和 b，这说明分式 $\frac{a}{b}$ 是可简化的.

14. 作圆的弦 PQ 和 PR. 如果标有 1 和 2 的面积相等，证明弧 $\overset{\frown}{PR}$ 长于弧 $\overset{\frown}{RQ}$.

证明 如图 3 所示，作弦 $\overset{\frown}{QR}$，并考虑被此弦切割成的弓形部分（在区域内部），很清楚此弓形部分的面积小于区域 2 的面积，由假设此区域的面积等于区域 1 的面积. 所以，对应于弧 $\overset{\frown}{RQ}$ 的弓形部分的面积小于对应于弧 $\overset{\frown}{PR}$ 的弓形部分

的面积，因为大弧对应较大的弓形面积，由此推得 $\overset{\frown}{RQ}<\overset{\frown}{PR}$.

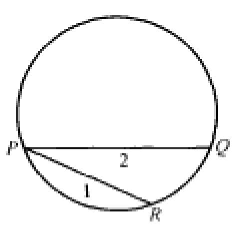


图 3

如图 4 所示，在一给定圆之内，看清楚弓形的面积随弧的增加而增大的一种简便方法是想像在圆上位置固定的点 F 和从 F 开始围绕圆移动的一个动点 M，很清楚，弓形部分的面积（画有影线的部分），随着 M 的移动而增加，因为先出现的弓形实际上包含在所有后出现的弓形之内.

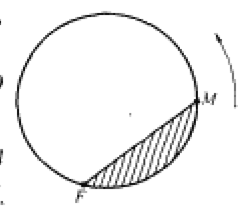


图 4

15. 如果平面中每一点都着一种基色（红，黄，蓝），证明平面中有两个同样颜色的点相距 1.

证明 取任意点 P，假定它为红色，且设 Q 为使 $PQ=\sqrt{3}$ 的任意一个点. 则存在两点 X 和 Y 具有 $PX=QX=PY=QY=XY=1$，这样 X 或 Y 之一必为蓝色，另一点为黄色. 这是说 Q 必为红色. 选取另一点具有 $PS=\sqrt{3}$ 且 $QS=1$. 则 S 必也为红色.

16. 如果 P 是一个素数，2^p-1 称为梅森数①（前面几个是 3，7，31，127，2 047），某些梅森数是素数（但注意 2 047 不是）. 证明没有两个不同的梅林数，不管它们是否是素数，有共同的素因子.

证明 固定一个素数 r，且设 s 是使得 2^n-1 是 r 的倍数的所有正整数 n 的集合，我们的目的只要证明集合 s 不可能包含两个不同的素数.

我们可假定 s 不空. 设 m 是 s 的最小元素.（注意 $2^m-1\geqslant r>1$，所以 $m>1$）我们将证明 s 的一个数是 m 的倍数. 如果这点不成立，在 s 中选取尽可能小的 n，使 n 不是 m 的倍数，现在 2^n-1 和 2^m-1 都是 r 的倍数，所以 $(2^n-1)-(2^m-1)=2^n-2^m=2^m(2^{n-m}-1)$ 也是 r 的倍数，但 r 必为奇数，既然它整除 2^m-1. 因为 r 整除 $2^m(2^{n-m}-1)$，由此得它整除 $2^{n-m}-1$. 换句话说 $n-m$ 在 s 中.

既然 $n-m$ 是一个小于 n 的 s 的元素，由 n 的选法，它必是 m 的倍数. 这样对于某个整数 a 有 $n-m=am$，且有 $n=(n-m)+m=(a+1)m$，这与我们选择 n 的方式矛盾，这证明了 s 的每一个数都是 m 的倍数.

如果 P 是 S 中的素数，这就迫使 $P=m$，因而 S 不可能包含两个不同的素数，既然它们不可能都等于 m.

17. 一个三角形数是这样的数，对于某个自然数 n，它可以通过 $1+2+\cdots+n=n(n+1)/2$ 得到，证明 $9t+1$ 是一个三角形数当且仅当 t 是一个三角形数.

---

① 目前人们所知的最大梅森素数是 $2^{756\,839}-1$，它是一个 227 831 位数，是由 Cray 研究所的 David Slowinski 和 Paul Gage 最近宣布的. 它是第 32 个梅森素数. 他们用自己编的程序在位于英国 Didcot 的 Harwell 实验室的 Cray－2 型计算机上证明了它是素数. 在此之前已知最大梅森素数是 $M_{216\,091}$，再前一个是 $M_{110\,503}$，它们是由 Colquitt 和 Welsh 发现的. 译者注.

证明 如果 $t=\frac{n(n+1)}{2}$，则 $9t+1=\frac{(3n+1)(3n+2)}{2}$ 也是一个三角形数，这种形式的下一个三角形数是 $\frac{(3n+4)(3n+5)}{2}=9t+1$，其中，$t=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$. 这两个数之间仅有的三角形数是 $\frac{(3n+2)(3n+3)}{2}$ 和 $\frac{(3n+3)(3n+4)}{2}$ 这两个数都被 3 整除，因此不是形为 $9t+1$ 的数. 因此形式为 $9t+1$ 的 n 个数. 当 $\frac{n(n+1)}{2}<t<\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ 时不是三角形数.

18. 平面上的格点是指有形如 (x,y) 的点，其 x,y 为整数，证明任给定 10 个格点，则我们可选取其中两个，在连接它们的线段上有另两个格点(不必定在给定的十个点以内)

证明 对于给定的 10 个点中的每一对 (a,b)，a 和 b 分别除以 3，分别给出余数 r 和 s，其中 r 和 s 在 0，1，2，中选取，这样至多有 $9(=3\times3)$ 对不同的 (r,s)，所以至少有两个点 (a,b) 和 (c,d) 给出相同的一对 (r,s)(抽屉原则)，由 $c-a$ 和 $d-b$ 被 3 整除，而点 $\left(a+\frac{c-a}{3},b+\frac{d-b}{3}\right)$ 和 $\left(c-\frac{c-d}{3},d-\frac{d-b}{3}\right)$ 就是连接 (a,b) 和 (c,d) 线段上的格点.

19. 证明边长为 1 的正方形不可能被三个直径为 d 圆盘覆盖，如果 $d<\sqrt{\frac{65}{64}}$.

证明 假定你覆盖了该正方形，那么 3 个圆盘覆盖了该正方形的四个角，所以三个圆盘之一必覆盖二个角 A 和 B. 设 X 为从 A 到两邻角之一的 U 方向上距 A $\frac{1}{8}$ 的点，而 Y 为从 B 到第四个角 V 方向上距 B $\frac{1}{8}$ 的点. D_1 不可能覆盖 X(距离 B 太远了)，所以 D_2 覆盖 X，D_2 不能覆盖 V，所以 D_3 覆盖 V. 对于 BV 的中点 T 也相似. D_3 不能覆盖 U(距离 T 太远了)，所以 D_2 覆盖 U，D_2 不能覆盖 Y(距离 U 太远了)，所以 D_3 覆盖 Y，而没有哪一个能覆盖 UV 的中点 M(距离 A，X 和 Y 太远).

20. 求出使方程 $|x-1|-|x-2|+2|x-3|=c$ 刚好有两个解的所有 c.

解 我们先画出方程 $y=|x-1|-|x-2|+2|x-3|$ 的草图，对于 $x\geqslant3$，我们有 $y=(x-1)-(x-2)+2(x-3)=2x-5$，对于 $2\leqslant x\leqslant3$，我们有 $y=(x-1)-(x-2)-2(x-3)=-2x+7$，对于 $1\leqslant x\leqslant2$，方程为 $y=(x-1)+(x-2)-2(x-3)=3$，最后对于 $x\leqslant1$，我们有 $y=-(x-1)+(x-2)-2(x-3)=-2x+5$.

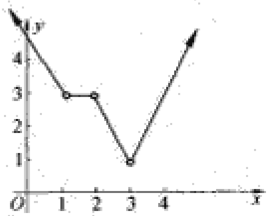


图 5

作相应区间上的线段，我们得到在(1,3)，(2,3)，(3,1)有"角"的图，如图 5 所示.

我们要寻找那样的一些 c，使水平线 $y=c$ 与图刚好相交于两点. 我们见到 $1<c<3$ 或 $c>3$ 时既可(注意对 $c=3$，原方程有无限多解).

21. 考虑大数 $N=3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}$，其中总共有一千个 3，计算 N 最右边的一位数字.

解　对于正整数 K，3^K 最右边的数字是什么？对于 $K=1,2,3,4,5,6$，回答是 3,9,7,1,3,9. 且见到序列每隔四位一重复，这样对于很大的 K 要确定 3^K 的最后一位数字，我们需要知道，4 除 K 的余数.

现有 $N=3^M$，其中 $M=3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}$ 共有 999 个 3，我们研究当 $l=1,2,3,4,5$ 时，3^l 除以 4 的余数，回答是 3,1,3,1,3，且我们见到，此问题的答案取决于 l 是奇数还是偶数，现有 $M=3^Q$，其中 Q 为奇数，因而 M 除以 4 的余数为 3，由此得 $N=3^M$ 的最后一位数字是 7.

为使此论证严格起见，我们需要证明，对于整数 a 和 b，$3^{2n+1}=4a+3$，而 $3^{4a+3}=10b+7$，我们有 $3^{2n+1}=3(1+8)^n$，且我们见到 $(1+8)^n$ 是 1 加上 8 的倍数，这就证明了第一个事实. 现在 $3^{4a+3}=27(1+80)^a$，而既然 $(1+80)^a$ 是 1 加上 80 的倍数，即得第二个事实.

22. 把一个正方形分成 100 个小正方形，如图 6 所示. 在一些小正方形上画上影线构成阴影的矩形可有多少种不同的画法？(图上给出了一种画法)要肯定已把正方形作为矩形计入了，并不要忘记每一种可能的影线的画法. 证明答案是对的.

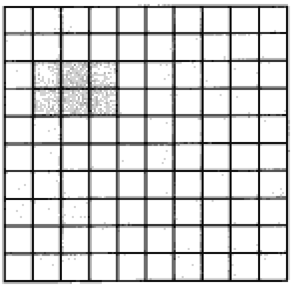


图 6

解　图中水平线和竖直的线的交点有 $121=11^2$ 个. 设 P 为其中任一点. 现选择第二点 Q，使 PQ 既非水平线也非竖直线. 换句话说，Q 是 121 个点中除与 P 在同一水平线和同一竖直线上的 21 个点以外的任意点. 因此 Q 有 100 种可能的选择.

在我们试探的矩形中只有一个以 PQ 为对角线，且计入的这些矩形都有按以上方法选择 P，Q 所得的某一线段 PQ 为对角线. 选择 P 和 Q 的方法有 $121\times100=12\ 100$种，但这并不是说有 12 100 个不同的矩形. 因为按此方法计数，每一个矩形被计入了四次(点 P 可以在矩形四个角的任一个角上，且以 Q 为对角线上的点). 所以，不同矩形的总数为 $12\ 100/4=3\ 025$.

23. 假定 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_{10}$是一列具有以下奇怪性质的十一个小数：此列数中 0 的个数是 a_0；1 的个数是 a_1；2 的个数是 a_2，等等. 求 a_0 并证明你的答案是正确性.

解 我们将证明具有所述性质的唯一数列是 7,2,1,0,0,0,0,1,0,0,0,所以 $a_0=7$. 为证明这点,注意到在该列数中所有数都是非负整数. 设 k 为其中最大的数. 如果 $k>10$,则某个数将在数列中出现 11 次,且数列中所有的数都相等,因而等于 k,这就推出了每个数都出现 11 次,这是矛盾的.

既然该数列中的数是 0 和 10(含 10)之间接整数,和 $a_0+a_1+\cdots+a_{10}$计入了数列中的所有数,所以等于 11. 因为 a_i 是 i 出现的次数,所有数的和还可写成 $0\cdot a_0+1\cdot a_1+2\cdot a_2+\cdots+10\cdot a_{10}$,因此有 $a_0+a_1+\cdots+a_{10}=a_1+2a_2+\cdots+10a_{10}$,这样有

$$a_0=a_2+2a_3+\cdots+9a_{10} \qquad (*)$$

现有 $a_k\geqslant 1$,故$(*)$右边至少为 $k-1$,而左边最多为 k,这就可推出$(*)$的右边除$(k-1)a_k$ 外其他项的和最多为 1,$(i-1)a_i$ 形式的数当 $i\geqslant 3$ 时,或者为 0,或者超过 1,由此又可推得对 $3\leqslant i\leqslant 10$,除外 $a_k\geqslant 1$, $a_i=0$. 所以至少有 7 个 i, $a_i=0$,换句话说 $a_0\geqslant 7$.

现 $k\geqslant 7$,因而 k 在该数列中刚好出现一次,所以 $a_k=1$,且 $a_1\neq 0$,因为又有 $a_0\neq 0$,所以在该数列中至多有 8 个 0.(记住至少有 7 个 0)如果 $a_2=0$,则 $a_0=8$,且$(*)$的右边等于 7,而左为 8,矛盾. 因此 $a_2\neq 0$,并且 $a_0=7$,方程$(*)$迫使 $a_2=1$,因而 $a_1=2$. 这就是所述数列.

24. 一个正整数称为是"回文"式的,如果当各位数字顺序倒过来时还是同一个数,例如 3,22,474,3 113,50 105,有多少小于 1 000 000 的回文数,并检验答案.

解 有 9 个一位回文数:1,2,…,9 和 9 个两位的回文数:11,22,33,44,55,…,99,对于三位数,第一位数可以是 9 个数字中任一个,而第二位数可为十个数字中的任一个. 一旦这两位数选定,第三位也就定了,给出了 90 个三位回文数. 同样对于四位回文数,前二位数字有 90 种可能,后两位数字也随着而定,对于五位和六位数,每种有 $9\cdot 10\cdot 10=900$ 种可能,所以所求回文数种数为 $9+9+90+90+900+900=1\ 998$ 种.

25. 对于每个整数 n,现有一个给出一个新的整数 n^* 的规则.(允许 $n\leqslant 0$ 以及 $n>0$)对所有 n,下面性质成立:$(n^2)^*=(n+1)n^*$ 和$(n^*)^*=n^*-1$. 计算 101^* 并证明答案是对的.

解 在第一个等式中取 $n=-1$,给出 $1^*=((-1)^2)^*=(-1+1)(-1)^*=0(-1)^*=0$,第二个等式仅仅说明把 $*$ 用到作为某个数的 $*$ 的任意数与从该数减去 1 是同一回事,我们知道 0 是某个数 $*$,因而 $0^*=-1$. 现有 -1 是某个数的 $*$,所以$(-1)^*=-2$,这样继续下去,我们见到对所有负整数 n,我们有 $n^*=n-1$.

现在我们以 $n=-11$ 应用第一个等式,得到 $121^*=(-10)(-11)^*=(-10)(-12)=120$. 因此 120 是某个数的 $*$,所以 $120^*=119$,这样 $119^*=118$,且 $118^*=117$,这样继续下去,我们得 $101^*=100$.

练习题：

1. 回忆一下，如 30 103 这样的数，当其各位数字的顺序倒过来时，其数值不变，则称其为"回文"数. 找出所有七位的回文数且每一个都要是两个六位加文数的和，验证答案.

2. 考虑以下无限数字序列.

12345678910111213…96979899100101102… 注意序列是按通常的十进制数顺序构成的，且没有间隔，求 1 000 000 位数字并证明答案是正确的.

3. 把 n 边形的顶点用三种不同的颜色按如下方法着色，使得没有相邻的两个顶点有一样的颜色，证明：可以把多边形沿对角线切成三角形，使得每个三角形都有三种颜色的顶点.

4. 如图 7 所示，$\triangle ABC$ 被三条共点直线分成六个小三角形. 假如有 * 号的三个小三角形的面积相等. 证明六个小三角形的面积都相等.

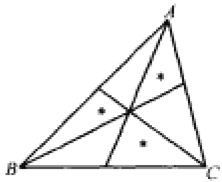


图 7

5. 一个由 1，2，3，…，16 在正方形内排成的魔方. 每行、每列及两对角线上数的和都相等. 证明在任何这样的 4×4 魔方中，中间 4 个数的和必为 34.

6. 在第三组第一题中，我们考虑了一个三条对角线共点的凸六边形（一个多边形是凸的，如果其每一个内角都小于 180°）. 试确定该题的逆命题是否成立，验证答案.

7. 设 n 为一正整数，证明数 $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \cdots, \sqrt{n}$ 的平均数超过 $(2/3)\sqrt{n}$.

8. 四个连续正整数的积，有可能成为一个完全平方数吗？即：$n(n+1)(n+2)(n+3)=k^2$，有可能成立吗？其中 n, k 均为正整数，验证答案.

9. 一个形如 $2^{2^n}+1$ 的数称为费马数，当 $n \geqslant 0$ 时，是一个整数，最初几个费马数 3，5，17，257，65 537. 假定 x 和 y 是费马数，$x<y$，证明，如果 x 除 y，则其余数为 2，并由此得出 x 和 y 不可能有共同的素因数的结论.

10. 直线 AB 和 CD 交于点 Q，AC 和 BD 交于点 P. 选取点 X 和 Y 使 $BXCQ$ 和 $DYAQ$ 为平行四边形. 证明点 P、X 和 Y 共线.

11. 房间内有九个儿童，且他们中没有一人有多于 50 分的钱. 证明这九个儿童组成的集合存在两个不同的子集，一个子集中的儿童所有钱的总数与另一子集的相等.

12. 一皮带牢固地套在两个圆的滑轮上，如图 8 所示. 滑轮的半径为 1 和 6，而它们圆心之间的距离是 $5\sqrt{2}$. 求皮带有多长？验证答案.

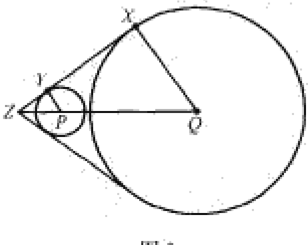


图 8

如果说我们与美国在教育理念上截然不同，我们再来看一下同是华人地区的香港是怎

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2}=0$$

么选拔数学人才的.

2004 年 12 月 18 日,近百位香港中学生与数学大师站在了一起,他们都是"恒隆数学奖"的得主,这个奖项是由丘成桐先生提出创意,由香港恒隆集团出资设立的.

他们的研究选题别出心裁,有一队的参赛选题是剖析某部世界畅销小说中父亲与儿子的关系,学生们试图用数学来体现这种关系.还有一队到商场进行了调查,根据电梯人流和顾客结构的数据,整理出独有的数学公式…….丘成桐先生与采访他的记者说:香港中学生的数学水平之高,连国际上著名的数学家都"另眼相看",丘成桐称这些中学生的论文"已经达到美国各校学士论文的水平".他介绍说,"恒隆数学奖"比赛,参赛队伍需要自找研究题目及资料,最后参赛者还需参加答辩,接受国际著名数学家的提问.比如 2004 年的比赛就吸引了 113 支参赛队伍,他们分别来自香港的 63 所学校.最终有 15 队获奖,最年轻的入围者才 14 岁.当记者询问丘先生:这种场景在内地多不多?丘先生摇头说:没有,他特别希望记者将这种对比写出来.

近年来丘成桐先生多次猛烈抨击大陆的数学教育制度,完全是出于对大陆的热爱,所谓爱之深,恨之切,最终是希望它好.那么他对香港中学生的褒扬也并不是因为他生于香港,求学于香港,而是香港的数学教育确有过人之处,这并非丘先生一家所言.

新华社 2004 年 12 月 10 日披露了一则信息:总部设在巴黎的经济合作与发展组织(OECD)日前发布的国际学生评价项目(PISA)报告指出,中国香港特区中学生的数学能力在被测试的 41 个国家和地区中名列第一.国际学生评价项目(PISA)对 41 个国家及地区的 27.5 万名 15 岁中学生进行了测试.中国香港特区有 4 478 名中学生参加了这一项目.香港学生各学科的测试成绩均表现优异,其中数学能力名列各国家和地区之首,科学能力名列第三,解决问题的能力名列第二,紧随中国香港获得第二、三名的分别是芬兰和韩国.(《文汇报·近距离》编《影响中国》,文汇出版社,2006:105)

第六回　搞应试　中国科举有传统
萧文强　古代官学细细说

数学少年天才为什么在中国这块土地上就产生不了？这个问题有其现实原因更有其历史原因.从表面上看似乎是应试教育妨碍了天才少年的成长，但在全社会已经就应试教育有害达成共识后，自上而下的推动素质教育并没有取得预期效果，这不能不使人从传统找原因.传统的力量十分强大，它的形成有其合理性，在凤凰出版传媒集团和江苏教育出版社最新出版的《华人如何学习数学》(中文版)中，香港大学的萧文强教授有一篇题为"中国古代官学数学课程：考生是怎样学习和准备考试的?"对此问题做了详细分析.

一、引言：儒家传统文化背景下的学习者悖论和教师悖论

自20世纪90年代以来，教育工作者开始关注文化差异如何影响某些科目的教学与学习，如数学及科学，这些科目的内容向来被视为具有不分地域的普遍性.在国际教育成就评估协会(IEA)和经济合作与发展组织(OECD)等团体发起的几项国际研究所得结果的推动下，这方面的研究有了更进一步的深化.特别是过去十年中，在儒家传统文化(CHC)环境中成长的亚洲学生，其学习过程已经成为一项热门的议题.随之衍生的，儒家传统文化课堂中亚洲教师的教学过程亦受到审视.这两个紧密相关的问题集中体现为两种悖论，那就是：

(1)儒家传统文化背景下的学习者悖论.儒家传统文化课堂里学生采用的学习策略，被认为是低水平的、死记硬背的，这种策略是不利于取得好成绩的；但调查却表明他们属意于高水平、有意义的学习策略，而且他们在国际评价中取得了比其他地区的学生更为优异的成绩.

(2)儒家传统文化背景下的教师悖论.西方教育工作者认为儒家传统文化课堂缺乏产生良好成果的条件，但教师却创造出了积极的学习效果.

这里通过对中国古代官学数学课程的研究，从历史的角度来看这些问题.对中国古代数学教育作简要介绍后，我们将着重讨论唐朝(618—907)"国立大学"课程，特别是这一时期科举制度中的明算科.我们之所以选择这一时期，不仅因为明算科在唐朝建立得最为完善，而且这一制度在以后的各个朝代中，不是成为范本便是被取消.这里把大部分篇幅放在科举制度上，是因为人们通常认为，儒家传统文化课堂是由应试文化所主宰，而应试文化却妨碍了学生的学习.果真如此吗？这里通过结合中国古一代典籍中的官方记载以冀"合理重建"唐朝科举中的明算科试题(因没有尚存的数学试题的文献记载)，我们提出如下

问题：考试制度真的对学习有害吗？考试是一种"不得已之恶"还是在某种程度上有利于学习过程呢？科举仅仅是对死记硬背学习的一种测试吗？

二、中国古代的数学教育

在人类文明史上，什么才算是数学的真正开端呢？——画图？数数？计算？辩论？推理？还是证明？即使这一问题还存在着争议，相信大家都同意数学教育——狭义地视为传授数学技能和知识的活动——是伴随数学的产生而一起出现的.

中国古代正规学校体制始于夏朝（公元前 21 世纪至公元前 16 世纪）后期，约于公元前 2000 年.学校在国家的管理之下，是训练贵族子弟的场所.在商朝（公元前 16 世纪至公元前 1466 年）和西周（公元前 1466 年至公元前 771 年），官学体系变得更为制度化.公元前 770 年，蛮族入侵，迫使西周迁都，开始了东周时期（公元前 770 年至公元前 256 年）.这一时期，由于周王朝的软弱无能，群雄竞起，战乱不断.这就是持续了五个世纪的春秋战国时代.冲突与动荡的困扰，使得它是一段动乱而多事的时期.具有讽刺意味的是，从中国历史上文化发展来看，它也是一段富有生机而繁荣的时期.一方面是官学衰落，另一方面由一些有名学者主持的私学兴盛起来（未必有固定场所）.在以后的朝代，这样的私学以书院为名（有固定场所），逐渐发展成为教育体系中的重要组成部分（在唐朝，书院最初只是一个整理和校勘图书的官方机构）.关于书院的演变现在已经成为一项庞大的研究课题.然而，由于在文献中不容易找到关于这些私学的数学课程的踪迹，我们将不作深入的论述.值得注意的是，由官学和私学构成的双轨学习体制，在中国持续了两千年.

在汉朝（公元前 206 年至公元 220 年），儒学被尊为最高的国家哲学.因为重视经学的学习，而经学中往往会提及一些数学知识，所以数学还算受人关注.实际上，高等教育课程中，"六艺"包括礼、乐、射、御、书、数（在早期，算术与数字卜卦紧密相关.卜卦指的是"内算"，而我们今天所理解的数学指的是"外算"）.根据 2 世纪郑玄的注释，"六艺"中的"数"进一步分成九章，这与编写于公元前 100 年至公元 100 年之间的著名数学著作《九章算术》中"九章"的标题没有太多不同.1984 年，在挖掘湖北的汉王墓时，发现了《算数书》竹简，这本书约成于公元前 200 年左右，其内容与《九章算术》惊人的相似.这充分表明《九章算术》的内容比这本书本身更为古老（彭浩，2001）.无论如何，这两本书的模式，在后来的一千五百年内，成为所有中国数学著作的典范.《九章算术》由分成九章的 246 个数学问题组成：(1)方田；(2)粟米；(3)衰分；(4)少广；(5)商功；(6)均输；(7)盈不足；(8)方程；(9)勾股.书中先提出问题，给出答案，再给出了一般的方法（算法），作为同种类型问题的解法.值得注意的是，文本中给出的数据是具体

但并非有特殊意义,因而它们实际上是普遍的,这使得这些方法(算法)在本质上是通用的程序.早期的版本中,对这些内容没有深入的解释,可能是由教师给予讲解.后来的版本中,由不同的学者注释.这体现了学者认真而刻苦的自学精神,也为后来各代读者提供了有用的学习帮助.最有名的一位注释者,是3世纪中期的刘徽,他在前言中写道:"徽幼习《九章》,长再详览,观阴阳之割裂,总算术之根源,探赜之暇,遂悟其意,是以敢竭顽鲁,采其所见,为之作注.事类相推,各有攸归,故枝条虽分而同本干者,知发其一端而已,又所析理以辞,解体用图,庶亦约而能周,通而不黩,览之者思过半矣."这清楚地表明,为了加强理解,他均衡地运用了严格论证和启发推理的方法.更多例证,读者可查阅(Siu,1993).

全面的官学教育制度在隋朝(581—618)开始建立,并在唐朝(618—907)和宋朝(960—1279)得到了进一步巩固.对于每一门设置的科目,有详尽的课程计划,包括大纲和采用的教科书.每科的学生入学名额、教员与管理者的人数,学生入学的标准,也记录在案.这些科目的考试定期举行,成功的考生将根据他们在考试中的优秀表现而授予官职.本回第一部分已经说明,我们将只限于讨论典籍中关于唐朝官学制度的明算科的记载,这些内容将在第三部分和第五部分讨论.

虽然官学教育制度在宋朝得到进一步巩固与扩展,但明算科中除历算和天文(占星术)课程得到加强之外,其他方面却被忽略了.后来科举制度更把明算科取消.在宋朝以后的几个朝代,明算科一直没有得到恢复.从17世纪初开始,通过广泛地与西方数学的接触,先在明朝(1368—1644)晚期,然后在清朝(1616—1911)初期,再在清朝的末期(即19世纪中叶),中国数学在外国的影响下发展.随着中国数学进入现代时期并逐渐与更为"世界性"的数学相融合("世界性"指的是从事数学工作及研究所依循的方向和风格,与在世界政治及文化领域起着主导作用的国家相同),中国的数学教育与其他大多数(西方的)国家基本上没有太大区别.

读者可能会注意到,在中国古代,数学知识不只是通过官学体制的渠道传授的.一些数学经典著作的前言中提到,学生可以向师傅甚至向隐士学习,也可以通过自学而获得数学知识.一些科学史家指出,宗教网络的传播可能起了相当大的作用(Needham,1959;Volkov,1996).虽然官学制度培养了成千上万名"数学技术官员(mathocrats)",成为官方或皇家的天文学家,但几乎所有在数学史上留名的杰出数学家似乎都是通过其他渠道成长的.一位数学史学家曾经列举了活跃在公元前4世纪到公元19世纪末期间50位有名的中国数学家,其中仅有两位是由官学制度培养出来的(郭世荣,1991).

结束这一部分之前,让我们再看一部不同寻常的论著,它也许是中国最早的数学教育论文,是宋朝数学家杨辉在1274年写成的《乘除通变本末》.这部书

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2}=0$$

第一章的引言为《习算纲目》,它对传统课程大纲进行了重新组织,并列出了一个只需用 260 天完成的综合学习时间表.这相当于今天中学数学 1 500 小时的现代课程(比对一下,官学制度课程需时 7 年! 将在第三部分再作讨论).以下是该书的一些节录(英译见 Lam,1977),它们都是有趣并富启发性的,很好地解释了死记硬背并不等于重复学习,做大量练习与获得深刻理解也并非不相容.

"加法,乃生数也.减法,乃去其数也.有加则有减.凡学减,必以加法题答考之.庶知其源.用五日温习足矣."(卷 1,第 1 章)

"学九归,若记四十四句念法,非五七日不熟.今但于《详解九章算法》九归题"术"中,细看注文,便知用意之隙.而念法用法,一日可记矣.温习九归题目,一日."(卷 1,第 1 章)

"做一日学一法.用两月演习题目.须讨论用法之源,庶久而无失忘矣."(卷 1,第 1 章)

"夫算者,题从法取,法将题验.凡欲见明一法,必设一题.若遇问题,须详取用.……或日用定数,当立折变为捷,是皆得其宜也."(卷 1,第 3 章)

"题繁难见法理.今撰小题验法理,义既通,虽用繁题了然可见也."(卷 2)

三、唐朝官学数学课程

当明算被确立为唐朝官学制度的一门学习科目时,中国的数学已经建立起悠久的学术传统.在 7 世纪中期,数学家李淳风受诏整理了《算经十书》,该书在 656 年被钦定为算学的官方教科书.《算经十书》由不同年代不同作者编写的十本著作组成,按年代顺序粗略地列之于下:(1)《周髀算经》,公元前 100 年;(2)《九章算术》,公元前 100 年至公元 100 年;(3)《海岛算经》,3 世纪;(4)《五曹算经》,6 世纪;(5)《孙子算经》,4 世纪;(6)《夏侯阳算经》,5 世纪;(7)《张丘建算经》,5 世纪;(8)《五经算术》,6 世纪;(9)《缉古算经》,7 世纪;(10)《缀术》,5 世纪.《缀术》的最初版本在 10 世纪左右失传了,宋朝时,它在《算经十书》中的作用被疑为成书于 6 世纪的《数术记遗》所取代((1)至(9)这些著作的原文可以在许多参考书中找到;例如,郭书春,1993).《新唐书》和《唐六典》记载了如何学习并说明学习每书的时间.学生分为两个专业,为方便起见,这里以缩写的 A 和 B 来表示.专业 A 的学生学习(1)至(8),即《孙子算经》和《五曹算经》1 年,《九章算术》和《海岛算经》3 年,《张丘建算经》1 年,《夏侯阳算经》1 年,《周髀算经》和《五经算术》1 年.专业 B 的学生学习(9)至(10),即《缀术》4 年,《缉古算经》3 年.除了这些书以外,两个专业的学生还必须学习《数术记遗》和《三等数》(《三等数》写在 6 世纪中期或更早时期,但到宋朝已失传).七年的学习期间有定期考试,每年年末举行岁考.三次没有通过考试或在算学馆中待了九年的学生将被取消其资格.从 14 至 19 岁的入学年龄来进行判断,一个算学学生在 22 岁左

右参加科举.

虽然明算科被列为官学制度中的一门科目,但它的地位较低.例如,据《新唐书》记载,算学专业 A 和专业 B 每年分别招收 15 名学生,配有 2 名算学博士(译者注:中国古代的教授的称谓)和 1 名算学助教.但是在经学课程中,每年招收 300 名学生,配有 5 名博士和 5 名助教.如果教员的数量和相应的学生人数没能揭示科目的重要性的话,那么教员的等级和薪水却能够反映这一点.据《新唐书》记载,算学博士是最低级别的官员(30 级),而助教则根本没有级别.但经学博士有着较高的级别(11 级),连经学助教也有着只是稍微低一点的级别(17 级)!

四、唐朝的科举

"科举"是中国的国家考试的专有名词,顾名思义"科目举荐",即通过不同科目的考试,推荐合适的考生(担任一定的官职).一些史学家认为隋炀帝颁布诏令召集举行国家考试是科举制度的开始.而另一些史学家认为在 622 年,唐高祖颁布诏令,任何有资格的考生无需经省级官员推荐也能参加国家考试,这才是科举制度的开始.科举最初是富有生命力而又行之有效的制度,为国家挑选人才,它并不考虑考生的社会背景或贵族世袭因素,只看重他们的学业成绩.但是,这一制度经历了长达近 13 个世纪的不同朝代,渐渐退化为培养机械式学习和迂腐思想的一种思想束缚.到了末代王朝——清王朝,最后在 1905 年,大清帝国的皇帝下诏取消了科举制度.

"中国对世界最重要的贡献之一,是建立了国家服务管理制度以及这个制度的核心部分,即是从 622 年至 1905 年实行科举的考试."事实上,早在 17 世纪初,耶稣会教士利玛窦(Matteo Ricci)在他的日记中称赞了中国在文学和科学方面取得的成就,也表扬中国人行之有效的学术学位颁授.伏尔泰(Voltaire,即 F. M. Arouet)在 18 世纪中期作了类似的评论:"人们肯定不能想像一个比这更好的政府:所有事情都由互相隶属的裁判庭来决定,裁判庭的成员需要通过几次严格的考核才能出仕.中国的一切事情都是通过这些裁判庭来管理."孙中山于 1912 年创立中华民国,他在《五权宪法》中说:"现在各国的考试制度,差不多都是学英国的.穷流溯源,英国的考试制度原来还是从我们中国学过去的.所以中国的考试制度,就是世界上最早最好的制度."孙中山甚至创立了"五权分立"的政治学说,将国家权力机关划分为立法院、行政院、司法院、考试院、监察院.

有关科举制度(唐朝的)的官方详细记录,在某些古代典籍中可以找到,它们主要是:

《旧唐书》,941—945;

《新唐书》,1044—1058;

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2}=0$$

《唐六典》,738;

《通典》,770—801;

《唐会要》,961.

清代学者徐松在1838年编写的《登科记考》可以作为辅助的二手数据,它既收集了以上列举的典籍中许多相关数据的摘录,也包括不少有趣的资料和轶闻(本回给出的许多轶闻都能在此书找到(徐松,1838/1984)).在西方文献中,其中一部最早记载唐朝科举制度的著作是著名法国汉学家Edouard Biot写的,他似乎对官学课程没有太高的评价.他认为"'算学馆'这一名字,对这样初级的学习机构来说是夸大了",他并且认为所采用的教科书"收集的问题大部分是初级的,答案也没有给出证明".第一本用西方语言全面记载唐朝科举制度的著作,是由Robert des Rotours在1932年撰写的,书内把相关文献作了相当翔实的翻译.

在《新唐书》中,有一部分是关于选举和诠叙的,其中记载了国家的两类考试:(1)每年年初为中央官学与地方官学的在校生(生徒)或不在学校上学的知识青年(乡贡)举行的常考;(2)由皇帝颁布诏令举行的制考.第二类考试因当时的需要或皇帝的一时兴致而举行,因此涉及更大范围的专门知识,也有颇为不可思议的科目.从官方记载中能找出许多这类专门考试.这里仅仅列举一小部分,有:"博学宏词科","博通坟典达于教化科","军谋宏远堪任将帅科","贤良方正能直言极谏科","祥明政术可以理人科".最有趣的一门考试是"隐居丘园,不求闻达科",从逻辑上说,这是当且仅当一个人不要学位的情况下才被授予这一学位!(事实上,据《登科记考》记载,794年,有人拒绝接受这一学位,终于学位是缺席颁授)第一类考试最初有七门科目:秀才,明经,俊士,进士,明法,明书和明算.秀才很快被取消,而进士后来成为最受重视的科目.据《通典》记载,到752年止,"进士大抵千人得第者百一二;明经倍之,得第者十一二".当时的资料表明,在五十岁考上进士(也许经过许多次重复的努力)仍是了不起的,而在三十岁考上明经已经算是太老了.关于明算科难以找到类似的资料或评论,这也再一次表明"明算科"在各种科目中地位较低,仅与"明书"(译者注:即"书法")同等.从"国立大学"注册的学生数目更能看出这一点.唐朝的高等教育机构是按等级划分的:最高的是国子学,它只招收某级别以上的皇家贵族子弟;其次是太学,它招收地位稍低的贵族子弟;再次是四门学,它除了招收官员子弟外,也招收少量庶民的子弟.律学、书学和算学这三类学校只招收职位低的官员的子弟和庶民的子弟.根据《新唐书》记载,唐朝初期,国子学有学生300名,太学有学生500名,四门学有学生1 300名,律学有学生50名,书学有学生30名,算学有学生30名.有一段时期,约有8 000名学生在全国高等教育机构(包括省级专科学院在内)接受教育,其中也有从邻国来的留学生.在唐朝,国家高等教

育体制已经很完整了.

每年高等教育体制的大事——科举考试——对许多人而言是一段痛苦的经历.唐朝的一些作家描述了考生带着文具、食物和水、蜡烛与木炭(为准备用餐与取暖用),排成长长的队伍,站在带刺的树篱(类似现代带刺的铁丝网)围成的考试管辖区的入口处等待,经过门卫点名、搜身后进入考试的小隔间的情景;为了防止考生隐藏书稿,他们被禁止穿厚衣服,只能穿着单薄衣裳在寒冷的天气中直打哆嗦.在长达许多小时的考试中,考生只能在小隔间中活动,自己准备食物,处理个人卫生.考试失败是普遍的事.考试失败之后,这段痛苦的经历还得重复,年复一年地继续…… 867年获得进士的韦承贻,曾溜进礼部的南宫(掌管考试事务的办事处),在墙上作了一首诗:"白莲千朵照廊明,一片升平雅颂声,才唱第三条烛尽,南宫风景画难成."这首语带无奈的诗,生动地描述了那些刻苦的考生在三根照明蜡烛耗尽前争分夺秒完成答卷的情景.

现代的考试无疑比以前少了许多痛苦,但如果不指出现代一些完善的考试方法早在一千年前已经存在的话,便对唐朝的祖先有点不公平.759年,主考官李揆说:"大国选士,但务得才,经籍在此,请恣寻检."这也许是最早的开卷考试了! 742年,主考官韦陟说:"以一场之善,登其科目,不尽其才.……仍令举人自通所工诗笔,先试一日,知其所长,然后依常式考核."这可能是最早用专题研习报告和综合学业记录("行卷"和"纳卷")来评价考生的案例了! 著名的"行卷"例子是诗人白居易向主考官顾况所交的作品:800年,白居易以罕有的年轻岁数——27岁——及第进士,他的"行卷"就是传诵至今,广为流传的一首诗:"离离原上草,一岁一枯荣.野火烧不尽,春风吹又生……"

五、唐朝科举中的明算科

在科举的明算科专业A或B中,有两种类型的考试题.《新唐书》这样描述第一类问题:"录大义本条为问答.明数造术.详明术理."对于专业B的试题,还附加脚注:"无注者合数造术.不失义理."我们在第六部分将会详细讨论这类问题.第二类问题称为帖读,是测试考生是否熟读经书.从《数术记遗》或《三等数》中取出一行,再用纸贴盖住三个字,考生需要说出是哪三个一字.这类问题类似现代的填充题.值得注意的是,《数术记遗》是一本只有934个字的短书,考生不费太多力气就能记住(更不用说以七年时间来记它).挑选这本书用来作为帖读很可能有其他方面的原因,但那是另一篇文章的主题了.《三等数》到了宋朝(960—1279)已经失传了,我们只能猜测,它可能是类似《数术记遗》的一本书.

另外,实施帖读有一个原因.681年,主考官刘思立在所有科目实施帖读,是为了纠正考生普遍存在的不良学习习惯.一些考生为了通过考试,只学习以

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2}=0$$

往考题的"标准答案",而不学习原著,帖读迫使考生去阅读(至少一些)原著.然而,考试毕竟是考试,易于被滥用.帖读变得越来越困难和不合理,它测试晦涩的短语,拟题者甚至故意设置陷阱来迷惑考生.为了通过这些不合理的考试,考生的应付手法是收集晦涩的短语并记住它们.于是,本来鼓励考生读原著这样值得赞扬的目的完全被歪曲了.728 年,国家下诏:经书的摘录必须设置在合理的范围内.从企图以考试指导课程发展方面而言,这是一个值得汲取的教训.

六、一些重建的试题

因为没有任何尚存的考题可寻,我们将参考科举中关于明算科考试的说明和解释,重建一些考题以提供证据支持本文的观点:唐朝的数学课程并非是初等的,也并非是通过死记硬背的方式学得的.很难想像,一群经过挑选的年轻人花费七年的黄金岁月,只是囫囵吞枣地逐字记忆数学著作,仅仅为了最后在科举中将答案背出来而已.如果读者认为,在历史研究中不能依靠想像,作者在此引用英国历史哲学家 Collingwood 提出的研究历史的一种广泛(但稍具争议)的观点,插入一个(稍带歉意)自辩,"历史就是活着的心灵自我认识……因为历史并不包含在书本或文献中,它仅仅作为当前的一种兴趣和追求,活在评论这些文献的历史学家的心灵中,通过历史文献的评述,历史学家再次体验其所探究的心灵的状态."Collingwood 和应了意大利哲学家 Croce (1919/1920)提出的观点:"历史是活的编年史,编年史是死的历史;历史是当代的历史,编年史是过去的历史;历史主要是一种思想活动,编年史主要是一种意志活动.一切历史当其不再是思想而只是用抽象字句记录下来时,它变成了编年史,尽管那些字句一度是具体及感人的."

举例之前,先看看一本典型的教科书,领会作者是如何做数学的,对我们的讨论有帮助.有哪本书比得上伟大的著作《九章算术》呢?连同 3 世纪数学家刘徽所加的注释,这本教科书为本文的论点提供了更充分的"间接证据".

《九章算术》的第五章给出了多种立体图形的体积公式.特别是,问题 17 是一个墓穴入口的通道(羡除)的体积公式.用数学语言描述,羡除是一个三面为梯形和两侧面为三角形的几何体.这三个梯形的平行对边的长度分别为 a,b;a,c 与 b,c.顶部梯形的高为 l,羡除深 h(见图 1).

书中给出了羡除的体积公式 $V=\frac{1}{6}(a+b+c)hl$(a,b,c 在书中乃具体数值,但实际上它们的数值并没有特殊意义,是具有普遍性的).刘徽在注释中解释了如何算出体积.他将羡除剖分成一些标准的几何形状,如特殊的三棱柱(堑堵)、特殊的四面体(鳖臑),或者以正方形为底的棱锥(阳马).如果你也试着做,便会发现剖分的方法因 a,b,c 之间的大小关系不同而异.例如,若 $a>c>b$,

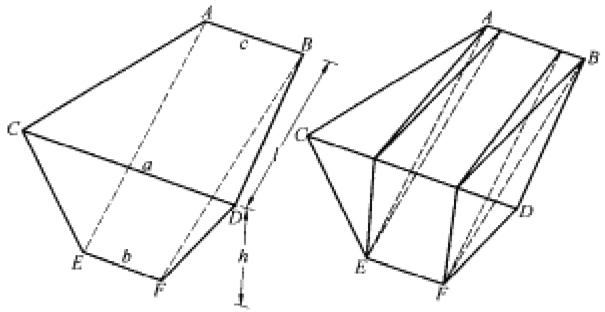


图 1

则可将其剖分为两个体积为$\frac{1}{12}\cdot(a-b)hl$ 的特殊类型的四面体、两个体积为$\frac{1}{12}(c-b)hl$的特殊类型的四面体和一个体积为$\frac{1}{2}bhl$ 的三棱柱. 它们的体积之和为$\frac{1}{6}(a+b+c)hl$. 若 $a>b>c$,则可将其剖分为两个体积为$\frac{1}{12}(a-b)hl$ 的特殊类型的四面体,两个以正方形为底、体积均为$\frac{1}{6}(b-c)hl$ 的棱锥和一个体积为$\frac{1}{2}chl$ 的三棱柱. 它们的体积之和也是$\frac{1}{6}(a+b+c)hl$. 事实上,刘徽在他的注释中列举了除"$b>a=c$"之外的所有 8 种不同情形下羡除的剖分方法. 计算因剖分方法的不同而异,但其基本思想则是一样的. 考试大概要求考生作出与此相类似,关于其他几何形状的面积或体积公式的解释,其中几何形状各边的长度可能也是一些具体数值. 只要考生掌握其基本思想,这样的试题的要求是合理的.

同章中,问题 10 是一个关于以正方形为底的亭子(方亭)的体积问题(见图 2).

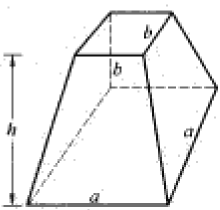


图 2

用数学语言描述,方亭是一个以正方形为底的截棱锥. 如果 a, b 分别是方亭下、上底的边长,h 是方亭的高,则方亭的体积为 $V=\frac{1}{3}(a^2+b^2+ab)h$. 刘徽又一次在他的注释中阐述了怎样巧妙地组合一些标准形状的几何体模块(他称为棋)得到方亭,从而得到方亭的体积公式. 由三种棋能组合成方亭:边长为 a,体积为 a^3 的立方体(立方);底面是边长为 a 的正方形,另一条长为 a 的棱垂直于底面的棱锥,其体积为$\frac{1}{3}a^3$(阳马);底面是腰长为 a 的等腰直角三角形,高为 a 的三棱柱,其体积为$\frac{1}{2}a^3$(堑堵).

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2}=0$$

刘徽观察到截棱锥可由一个立方、四个阳马和四个堑堵组成(细心的读者会发现这里需要 $h=b$,让我们可以运用标准形状的几何体模块). 刘徽接着观察到一个立方可以组成体积为 b^2h 的立方体块,一个立方和四个堑堵可组成一个体积为 abh 的长方体块,一个立方、八个堑堵和十二个阳马可组成一个体积为 a^2h 的长方体块(细心的读者会发现,这里要求 $h=b$ 和 $a=3b$,使得每个角是由三个阳马组合而成的立方体).

在问题 15 中,刘徽进一步阐述了怎样用无穷小分割方法推导出以长方形为底,有着任意高的更一般的四棱锥的体积公式(Wagner, 1979). 总而言之,三个立方、十二个堑堵和十二个阳马的体积之和为 $b^2h+abh+a^2h$,因而截棱锥的体积是 $\frac{1}{3}(a^2+b^2+ab)h$(见图 3).

刘徽还用另一种剖分方法给出了截棱锥的另一体积公式 $V=\frac{1}{3}(a-b)^2h+abh$(见图 4).

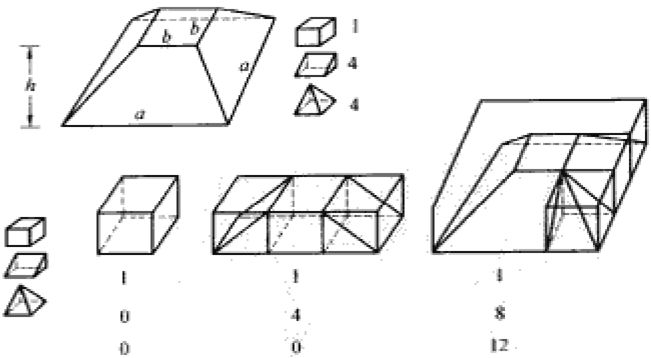


图 3

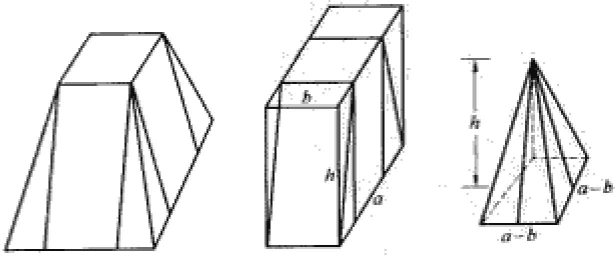


图 4

在第二种方法中,不必假设 $h=b$ 和 $a=3b$,但它只适用于上、下底均为正

方形的棱台.

这里给出一道模拟题:计算高为 h,下底和上底分别是边长为 a_1, a_2 和 b_1, b_2 的长方形($a_1 \neq a_2, b_1 \neq b_2$)的亭子的体积.如果理解了刘徽的无穷小分割方法,考生稍加变动就能得到该问题的答案,作为练习这个留给读者(读者也可以用当今学生都熟悉的方法来解决该问题,即用相似三角形的方法),答案是 $V = \frac{1}{3}(a_1a_2 + b_1b_2 + \frac{1}{2}(a_1b_2 + a_2b_1))h$.如果考生仅仅记住课本上的公式而不加以理解,很难想到这一正确公式.这也许就是所谓的"造术"(构造一个(新的)算法)的意义.而且,考虑到考生在以后的职业生涯中很可能会遇到他们在课本中所学问题的变式(如参数改变),对他们作这样的要求也是合理的.

七、科举真的对学习这么有害吗

科举制度有着奇怪的矛盾现象,既被描述为一种丰富的文化遗产,又被描述为中国历史上一种负面桎梏.科举的长短优劣,至今仍是一个广泛引起争论的主题.这里,我们不想涉足另一场冗长的争论,而是"放大"这一制度中较积极的部分,以抗衡"中国古人只是通过机械记忆和勤奋刻板训练来学习数学"这一传统观念.可惜的是,科举的积极部分被它的消极部分掩盖,这一制度在明朝和清朝的演变使消极作用更显突出.

奇怪的是,通常人们仍然认为儒家的学习等同于死记硬背的学习和一味顺从的学习,尽管圣贤早已有相反的论述.《论语》(公元前 5 世纪)中说:"学而不思则罔,思而不学则殆."《中庸》(公元前 6 世纪至公元前 5 世纪)中说:"诚之者,择善而固执之者也.博学之,审问之,慎思之,明辨之,笃行之."在宋代大儒朱熹(1130—1200)的书中,我们也可以读到"读书无疑者,须教有疑,有疑者,却要无疑,到这里方是长进."(卷 11, p. 151)人们能称此为死记硬背的学习吗?是一味顺从的学习吗?朱熹的著作读得越多,我们也许对西方观察者所指的"死记硬背"学习原来是怎样一回事理解得更深入.朱熹说:"大抵观书,先须熟读,使其言皆若出于吾之口,继以精思,使其意皆若出于吾之心,然后可以有得也.然熟读精思既晓得后,又须疑不止如此,庶几有进.若以为止如此矣,则终不复有进也."(卷 11, p. 135)朱熹进一步指出:"学便是读.读了又思,思了又读,自然有意.若读而不思,又不知其意味;思而不读,纵使晓得,终是惴惴不安……若读得熟,而又思得精,自然心与理一,永远不忘."(卷 10, p. 138)这段话明显地阐明了反复学习和机械学习的区别.当代的研究者基于这种区别解释了亚洲学习者悖论.

另一方面,在 19 世纪伴随着工业革命出现的西方现代教育,开始即强调 3Rs——读、写、算.在 1862 年,英国教育部 Robert Lowe 签发的一部法规中,对每

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2} = 0$$

个 R 的标准作了明确规定(例如,关于"读"的标准 I:朗读单音节词;"写"的标准Ⅱ:以整齐书法临摹一行印刷字体;"算"的标准Ⅳ:计算一则货币题). 狄更斯(Charles Dickens)在 1854 年写的小说《艰难时世》,开头借 Coketown 城的 Gradgrind 先生之口说话,是对当时英国强调机械式学习的生动描述(固然,小说的话带有夸大的讽刺意味):"现在,我需要的是'事实'.我教给学生们的只是'事实'.唯独'事实'是生活之所需……这是我教育自己孩子的原则,也是我教育这些孩子们的原则.先生,坚持'事实'!"

关于科举的准备,朱熹也有以下观点:

"士人先要分别科举与读书两件,孰轻孰重.若读书上有七分志,科举上有三分,尤自可;若科举七分,读书三分,将来必被它胜却."

"举业亦不害为学.前辈何尝不应举.只缘今人把心不定,所以有害.才以得失为心,理会文字,意思都别了."

"尝论科举云:非是科举累人,自是人累科举.若高见远识之士,读圣贤之书,据吾所见而为文以应之,得失利害置之度外,虽日日应举,亦不累也.居今之世,使孔子复生,也不免应举,然岂能累孔子邪!"

800 多年以前,中国的圣贤已经知道考试的主要弊端并非来自考试本身,而是来自考试所带来的利害关系!

假设不靠通过机械学习以求考试及格,那么考试可以带来哪些益处呢? 让我们首先对中国古代的考试形式与布鲁姆(Bloom, 1956)的现代评估理论作一下比较.现代评估观点既包括形成性评估,也包括总结性评估,但中国古代的考试是为了选拔,所以只关注后者的作用.布鲁姆的认知目标的六级分类与中国古代考试的四种不同类型的问题是一致的,即:(1)帖读以考查知识;(2)短的问题以考查理解与应用;(3)长的问题(关于当代时事)以考查分析与综合;(4)作文与做诗以考查评价.

有了多种多样的目标,考试即使作为总结性评估过程,它对学生和教师都能产生有益的影响.对学生而言,它有利于巩固知识,加强理解,制定学习计划,判断学习重点,发展学习策略,培养学习动机和自我提升意识.对教师而言,除了上述提到的优点之外,考试还可以用来检查学生的学习进度,判断学生消化吸收了多少,评估教学是否有效.从这种意义上来说,"素质教育"与"应试教育"不必是对立的.Crooks 说:"作为教育者,我们应该在评估中确保对我们认为是最重要的技能、知识和态度给予恰当的重视."从总结性评估的角度看,考试是一种"不得已之恶".但从形成性评估的角度看,考试是学习过程的有用组成部分.而且,严格地区分总结性评估和形成性评估是一种错误的二分法,重要的是不要本末倒置,让评估指挥了教育.中国皇朝的考试制度,尽管具有良好的初始意愿和长达 1 287 年的历史,但最终走向了消亡,这是一个值得汲取的教训.

我国著名中国数学史家严敦杰先生指出,中国古代凡受了好几年官方的数学教育并通过国家数学考试及格的人,没有一个在数学上有所造诣;唐宋的著名数学家没有一位是靠国家教育培养出来的(严敦杰.中国数学教育简史.数学通报,1965(8):44-48).这充分说明了中国古代民间数学教育对数学的发展之不可替代,而官办数学教育的状况与科举制度,却给中国数学的发展埋下了深深的隐患.另外,思想自由无压力."四大家"所处时代邻国之间战事不断,统治者既无法举行科考,也顾不上对臣民的思想控制,当时的聪敏人大多不愿出面为统治者效力,而乐于悠闲隐居,做自己爱好的学问;这样做学问,没有死记硬背与为进身而"争夺榜首"之累,因而思想自由奔放,毫无压力,更无压迫感,并以此为乐而渐至入迷.例如,李冶就总是辞官不受,乐意隐居山林,潜心钻研数学;而朱世杰则更是乐于云游四方讲授数学和研究数学.从人的兴趣与动机来说,以这样一种"跳出三界外,不在五行中"的境界来研究自己感兴趣的东西,研究状态自然是最理想的了.这样,动乱时代的数学由于较少传统和官方的束缚,往往可以出人意料的方式和速度向前发展.对此,当今世界著名数学大师陈省身教授有精辟见解:"中国的大数学家,如刘徽,祖冲之,李治等都生逢乱世.我想,治世时聪敏人都求功名做官去了,这情形现在并没有改变."(王钱,国忠.东西方科学文化之桥——李约瑟研究.北京:科学出版社,2003).

丘成桐认为:儒家的教育制度确是造就了不少政治和经济上的杰出人才,汉朝布衣可为卿相,开创了中国两千年来读书的风气.然而高倨庙堂的士大夫得以主导天下思想,学术不得自由,基本(础)科学无由发展.以后魏晋清谈,玄学兴起,官学没落,儒家不能垄断教育,数学反而兴起.

书院的改革对今天的教育可能会有所警示.

清代后期,中国社会处于世大的变革之中,这种变革深刻地影响到社会地各个方面,书院进行改革是兴学育才的一条途径,是清末改革书院制度的外部因素.而清末的书院积弊日深,腐朽衰败,已经不能培养出于时有用的人才,则是书院改革的内在因素.清末书院制度的弊端主要表现在以下三个方面.

第一,书院的山长多是庸陋之师.清廷规定书院的主持人由督抚学政等地方官员选定,用意是为了加强清廷对书院的控制,起初确实也有助于聘请一些学术造诣深湛,德行高尚堪为师表的人到书院任教,从而提高书院的教学质量.虽有不少著名的学者曾在书院担任主持人或从事讲学活动,但同清代260多年的时间里任职书院的大量山长比较起来,这类名师毕竟只占很小的比例.大多数的书院山长,如《清朝续文献通考》卷一百学校七中所指出的那样,不过是"以疲癃充数"而已.早在乾隆年间,有些书院已出现这种现象.道光以后,情况则更为严重.戴钧衡在《桐乡书院回议》的"择山长"一议中说:"山长之名始于宋,及元时,与学正,教谕并列为官,选于礼部及行省宣慰司.近世则不然.省会书院大

府主之，散府书院太守主之，以科第相高，以声气相结．其所聘为山长者，不必尽贤有德之士，类与主之者为通家故旧，或转因通家故旧之请托．降而州县书院，则牧令不能自主，其山长悉由大吏推荐，往往终岁弗得见，以束修奉之上官而已．夫为弟子延师，必将使朝夕与居，亲承讲画，瞻仰其容止起居，以资效法．而顾令远隔数百里不相闻问，以是为数，虽孔子不能得于七十子也．"山长结官吏，学识浅薄，"惟以侑脯为事"，是当时书院普遍的情形．对于书院存在的严重问题，清廷也早有察觉，曾屡次下令进行整顿改正．尽管如此，书院发展至清末，问题愈发严重．晚清学者黄以周在《论书院》中已经认为"今之书院，弊已积重，习亦难返"．

第二，书院生徒专究制艺，无裨实用．清代的大多数书院均以八股文为主要教学内容，渐渐成为科举考试的预备场所，大多数书院生徒惟科名是务．"今之应书院课者，惟八比五言之是务，弃浅固陋，逐末忘本，甚者较膏奖之多寡，争名第之先后．"戴钧衡《桐乡书院四议》指出："今天下山长所以教士者，津津焉于科举文章，揣摩得失，剽窃影响，而罕有反而求之于实学者．国家以制艺取士，士子之有奇才异能者，不由此无以自见于天下，于此而日舍之，势与理皆有所不能．虽然，制艺者所以发明圣贤之言也，欲善其言，则必通其经，明其道，讲求其曲章法度，而实体之于身心，而后言之有物，其发之也为有本．不此之务，而徒从事于揣摩得失，剽窃影响之为，则吾未见其出而实有裨于世也．"书院以考课为主要教学活动，以制艺为教士内容，已失去其原来的积极作用，很难培养出真正有用的人才．(李兆华．中国近代数学教育史稿．济南：山东教育出版社，2005)．

第三，书院生徒贪图膏火，志趣卑陋．清代的书院多数发给学生一定的津贴费用，称为膏义．此外，对官课，师课成绩优秀者，还会给予一定的奖赏．这种膏火和奖赏一般仅能维持生徒个人生计．道光以降，书院学规废弛，生徒逐末忘本之风日甚．张之洞《劝学篇·外篇·设学》中指出："中国书院积习，误以为救济寒士之地，往往专为膏火奖赏而来．本意既善，动辄计较锱铢，忿争攻讦，颓废无志，紊乱学规，剽袭冒名，大雅扫地矣．"

由于山长滥竽充数，所学大多无裨实用，生徒颓废丧志，书院已经失去其研究学问，培养人才的积极作用．因此，对书院改革已是势在必行．

李登辉(1873—1947)曾任复旦大学校长长达23年的教育家指出：

> "在过去的教育设施中，尤其中国，太偏重于智育方面，以致把其他方面都忽视了．结果是，一般所谓受过教育的人，虽是智力发达很高，然而或是体质颓弱，形同病夫，或是思想空泛，不切实际，甚至于有文无行，变为腐化的官僚政客，学痞商蠹更是自郐以下了，这种状况，在闭关自守的时期，已经是流毒社会，在今日国际竞争剧烈的时代，假使一国

的教育长此情形，国家自然是要落伍的……

"人类生活，包含德智体三原素，是缺一不可的.三者的发展，贵在平均.忽略其一，未有不牵及其他之理.单重体育，只能造成蛮横的强力，单重智育，只能造成狡猾的自私.要养成才德兼备的人才，就非重德育不可.我们若以为单靠理智的磨炼，就可令学子的志行高洁，那就大大的错了.世间最可怕的凶，不是专恃蛮力的人，而是足智多谋的人.他们逞其鬼蜮的伎俩，真可以杀人不必血刃；他们的智慧，适足以增长他们的罪恶.至于忽视体育，亦常致悲惨的结局，只须向现在学校一看，其中因体质亏损以致学成而不能用的，比比皆是.即可知视体育之害.我们不主张特别注意三育中任何一种，上面已说过，三育是不可偏废的，不过今日奸诈出贪欲炽张的时代，对于德育，似不能不多加注意."

（《复旦周刊》第二十四期，1929年11月4日出版）

经济学家米格龙等人研究了为什么企业内用计时工资，而不用100%的绩效工次.他用张五常的测度费用和不精确测度造成外部性之间的两难冲突的观点做模型，如果完全以绩效定工资，绩效难测度的事就无人做.例如只按学生考试成绩定老师的工资，则老师只教对考试有影响的书本知识，不启发学生的原创性，使学生都成了考试机器，所以西方学校不准以学生考试成绩定老师的工资.所以制度安排中有激励强度与各种活动激励平衡度的两难冲突，有效折中一般会以牺牲一定激励强度以达到各种活动中激励的平衡，也就是说，最强的激励不一定是最优的.这种模型还指出，计时工资必须与合约中的排他条款相结合才能有效折中上述两难冲突.排他条款一般是限制雇员兼职（一般西方大学限制教授在其他机构兼职，比如一周只能兼职一天及只能假期兼职）.如无排他条款，以计时工资为主（干好干坏都一样）绩效工资为辅，雇员会将大量精力用于兼职.

现在中国的教育正是这样，中学一切与升学率挂钩，老师只教高考或中考会考的内容，或者表面教素质教育内容，实质搞应试教育，或假教不考但应会的内容，真教考但不一定重要的内容，这是一出教育从业人员共同出演的"皇帝的新衣"，那么能不能在考核标准中不做那样的量化，像中考的重点率，高考的升学率，高校的SCI，EI论文篇数，问题是不量化就无法有效管理，当然其中也有考核者懒惰，或主观评价难以避免有腐败之嫌，并且如不量化，管理的信息量会指数般的增加，导致失败，著名历史学家黄仁宇在《万历十五年》中就阐述了这一观点，在解放前，大学教员的评价主要是主观评价，不论资历，论文，著作唯才是举，于是像章鸿铭，没有学历照样当大家.

清末的数学教师大致可分为三种类型.第一类，博通经史且兼及数学.其所

重视者仍是研治经史，教学多不以为数学为主. 这类学者以张文虎，陈澧等为代表. 第二类，志在经世而致力数学. 虽然对数学有兴趣，但其学习数学的主要目的是经世图强，刘光蕡，卢靖等可为这一类型的代表. 第三类，不重科各而以数学为业. 这一类型包括李善兰，邹伯奇，华蘅芳，刘彝程，方恺，席淦，支宝枬，崔朝庆，沈善蒸等人，清末的数学教师的多数均属此类.

傅斯年先生 1918 年 4 月 15 日在《新青年》杂志发表文章指出：

> 中国学人，好谈致用，其结果乃至一无所用. 学术之用，非必施于有政，然后谓之用. 凡所以博物广闻，利用成器，启迪智慧，熔陶德性，学术之真用存焉. 中国学人每以此类之大用为无用，而别求其用于政治之中，……历来所谓读书致用，每多此类拘滞之读. 既强执不能用者而用之，其能用者，又无术以用之，亦终归于不能用. 盖汗漫之病，深入肌髓，一经论及致用之方，便不剀切，势必流入浮泛.

不仅在普通教育层面有复古思潮，连现行的全国高中数学联赛试题也开始出现了八股化倾向，首先出现了所谓竞赛的大纲，意思是你只能在我划的圈内活动，不许越雷池半步. 为什么呢？因为中央强调要减轻学生负担，你漫无边际的考当然会加重负担了. 据调查，全世界只有中国才有所谓的竞赛大纲. 这首先是计划经济的余毒在数学界的反映，任何一项活动都应该是有上级主管部门的，而这个主管部门的所谓权威性是要由通过制订一系列的大纲来体现的，在经济领域有三流企业玩实业，二流企业玩概念，一流企业玩标准之说. 谁有权制订标准谁就是行业老大，谁就能赢家通吃，攫取垄断利润，教育部门也在竞相效仿，将其视为一种权力牢牢抓住. 在全国人民都在讨伐某些行政机关将"国家权力部门化，部门权力个人化，个人权力利益化"的今天，制订大纲的做法是否合适，是要打一个大大的问号的.

另外命题的风格与方向也在逐渐变味. 由于数学奥林匹克的优胜者可获保送资格所以各方力量均想分享一部分权力，博弈的结果是教育行政部门变为主导力量，而数学奥林匹克研究者逐步被边缘化，降为从属沦为工具甚至玩偶，从试题的形式可见这一怪现象，即数学竞赛试题越来越像高考题，选择、填空、解答题整个一个高考题翻版，这是世界上其他任何一个国家所没有的，美国数学邀请赛是标准化试题每个题的答案都是 1～999 间的某个整数，但内容均为纯竞赛内容，几乎所有国家的试题都是竞赛是竞赛，高考是高考泾渭分明，因为这两种考试的目的是不同的，高考是选拔合格人才，而竞赛是发现数学天才，功能不同试题当然不同，一般来说数学奥林匹克的核心内容应该是数论、图论、组合论加平面几何，这是国际上多年来的共识，但在中国的高中数学竞赛的预赛中这些内容竟一点没有，岂不怪哉，而且原来的数学竞赛活动只由非政府的民间

机构数学学会主办，命题工作均由国内知名数学家担任，如 1978 年竞赛命题由华罗庚、苏步青等大家亲自主持，后期则有常庚哲、单墫、苏淳、张筑生等中青年数学家主笔．

那时，人们的目标是单纯的，数学家热情是涨高的，竞赛活动的开展是健康的，后来变化悄然而至，一点点演变到今天，原因很多，但从根本上有两条，一是学术行政化之蔓延，这个话题太大不宜在此讨论，二是经济思维的全社会范围的泛化，我们知道"经济学话语的成功依靠其两大工具：一个是效率测算，另一个是数学模型．效率测算可以计算出各种市场交易活动的效力和产出，可以用来对不同经济组织进行比较，把现代人崇尚的观念越来越多偏向地引导到消费经济方向上来．人们崇拜那些在同样的时间内能产出更多产品的人和组织，把这些能够在同样时间内制造出更多产品和赚取更多利润的人视为商业时代的英雄．效率观念促使人们更加理性化，他们用成本效益公式来衡量一切人类行为，计算出每一个行为的成本和收入，从而在行为的利润上超越更多的机构和个人，成为赚钱的英雄．"（刘圣中．后经济学霸权时代的政治话语．《中国书评》第 C 辑，世纪出版集团，2007：143）

有人总结中国五十余年教育史，精辟之至：六七十年代，政治控制；八十年代及九十年代中期，分数成绩控制；近十余年，利益控制．此颇堪寻味，那么哪种控制最厉害呢？显然是利益控制，数学竞赛也不例外．首先是逐年增加的报名费，其次是初赛与复赛实行按比例进入，比例逐年减少，而初试由各省独立命题，题型越来越像高考，谁都可以比划一下，如此报名者众，报名费多，利益独享．而进入复赛，试卷需从上级组织购买，加之租考场，付评卷费等，所以复赛名额越少越好，于是会出现竞赛型选手开始由于不擅高考题型而被挡在门外，而高考型选手对复试题一筹莫展，考试成为目的，选手被边缘成为手段，特别是师生之间变成了纯粹金钱的雇佣关系，一切层面的问题都随之出现．

陈丹青在北京香山宾馆"中国大学的人文教育"研讨会中曾有如下"斗胆描述"：今日中国高等教育，有大学，没有大师；有教育官员，没有教育家；有教育政策，没有教育思想；有教学大纲，没有教育的灵魂；有教育的地位，没有教育的尊严．"（陈丹青．退步集续编．广西师范大学出版社，2007：144）

仿此，是否可以这样形容今日中国之数学奥林匹克，有金牌，没有热爱；有试题，没有快乐；有教练，没有导师；有考试大纲，没有数学文化；有解题思路，没有数学思想；有加分政策，没有人才产生．

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial z^2}=0$$

基础篇

第二章

第七回　建模型　微分方程有奇效[①]
　　　　数变量　一个以上称偏微

“风乍起，吹皱一池春水.”平静的湖面会因和风的煦拂而波纹起伏.“大弦嘈嘈如急雨，小弦切切如私语.”琵琶的琴弦在音乐家的弹奏下发出了激动人心的旋律.“夏日消溶，江河横溢，人或为鱼鳖.”高山上的冰雪，因太阳的照射而融化，洪水在奔流，甚至引起了巨大的灾难.历代的诗人们对于各种自然现象，写出了动人心弦的诗篇.

然而对于种种自然现象，人们除了赞赏、伤感、惊惧、激动之外，还不断在研究，企图弄清楚这些现象的规律，使人们对自然界的认识越来越深刻，从而获得改造自然的能动性.

对于自然界的规律，可以用各种不同的手段来描述，这里一定要牵涉某些数量关系.“风之积也不厚，则其负大翼也无力.”这个命题尽管不够科学，也是企图从数量关系上来描述大鹏飞行规律的一种朴素的想像.不过这类命题还有一个大缺点，就是没有确切地把数量关系表述出来，不像勾股定理那样：“勾股各自乘，并之，为弦实，开方除之，即弦也.”确切地把直角三角形三边的关系描述出来了.

① 本回引自文献[32].

随着自然科学的进步，人们对自然界的规律了解得就更加准确，能够用一些确定的公式去表示几个量之间的普遍关系，例如牛顿的万有引力公式：两个质点之间引力的大小与它们的质量乘积成正比，与距离平方成反比，写出来就是

$$F = k\frac{m_1 m_2}{r^2} \quad ①$$

人们可以利用这个公式来计算天体之间的引力，或者人造卫星的轨迹. 这类公式的特点是能把几个物理量之间的关系确定出来.

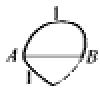
然而自然界的规律往往并不如此简单，自然界中有许多连续分布（或者说，经过模型化后是连续分布）的量，例如一个物体的温度，弹性体的应变状态，以及电磁场等等. 拿物体的温度来说吧，它往往有空间的不均匀性，这就是说，物体各个部分的温度是不一样的，而由于有了温差，就有热的传导，会使各处的温度随时间而变化，因而需要有一个说明温度的空间分布不均匀性与它随时间而变化的快慢关系的数学工具，写出来就是

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a^2\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) = 0 \quad ②$$

这里$\frac{\partial T}{\partial t}$是温度对时间的偏导数，表示温度变化的快慢，$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$等等是温度对空间坐标的二阶偏导数. 这种把偏导数联系起来的等式就是偏微分方程. 由于偏微分方程可以反映物理量的空间分布和时间变化这二者的相互依赖关系，所以就成为描述物理规律的重要数学工具. 除了热传导现象外，其他如弹性体的变形和平衡，电磁波的传播，电子在原子核外的运动规律等，都可以用偏微分方程来描述. 就是引力理论，经过爱因斯坦的进一步研究，也要用偏微分方程来刻画.

但偏微分方程和 ① 型的方程不一样，不能直接从它写出未知函数来，而且它往往有许多解. 比如说，要想单从方程 ② 知道物体温度的分布和变化，那是不可能的. 我们还需要知道物体处在什么样的环境中，即外界对它施加些什么影响（例如外界保持恒温或处于绝热状态等等），还需要知道它原来的温度分布如何，才能从方程 ② 确定出物体温度的分布和变化. 上述这些条件分别称为边界条件和初始条件，有时也通称定解条件或边界条件. 根据边界条件来决定偏微分方程解的问题称为边值问题.

一个偏微分方程要用怎样的边界条件才能把解唯一地定出来？这是偏微分方程理论中极为复杂的问题，也是最为中心的问题之一. 这种研究已进行了两个多世纪，积累了大量的研究成果，并为各门自然科学和工程技术的发展做出了重要的贡献. 在这里，我们把最简单又最典型的一些定解问题和边界条件给法列表如下：

编号	方程名称	式　　子	定解条件个数(虚线处不给定解条件)	说　　明
Ⅰ	弦振动方程	$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$		下底的2表示 $t=0$ 时弦线位置及速度,是2个定解条件;两侧的1表示弦线两端运动情况(如 u 的值),各是1个定解条件
Ⅱ	热传导方程	$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$		下底的1表示 $t=0$ 时的温度,两侧的1表示边界上的状态(如温度),都是1个定解条件
Ⅲ	拉普拉斯方程	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$		方程可表示平面物体的热平衡状态.1是边界状态(如 u 的值)
Ⅳ	特里谷米方程	$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$		方程可近似地表示某些跨音速的气体流动.直线 AB 表示 $y=0$,在此线上,只要求 u 的一阶导数连续

这表说明,不同的偏微分方程的定解条件给法是不一样的.对问题 Ⅰ 来说,有一处要两个边界条件(表示弦的初始位置和初始运动速度),而有些地方却不给边界条件;问题 Ⅲ 处处都要有边界条件,但数目只有一个;问题 Ⅱ 和 Ⅳ 只是在部分边界上各给一个边界条件.人们也早已明白,对 Ⅰ 中的方程不能提 Ⅲ 中的边界条件,因为对应于这种边界条件的解往往是不存在的.由此可见,为了将边界条件给得恰到好处,既能保证解的存在,又能使解为唯一,就必须依不同情况,作具体分析.

这样,人们就把偏微分方程划分为若干类型.Ⅰ 类方程属于双曲型,Ⅱ 类方程属于抛物型,Ⅲ 类方程属于椭圆型,此外还有其他各种类型.双曲型方程往往用来描述电磁波和声波的传播,气体的不定常流动和超音速定常流动;椭圆型方程可以描述弹性体的平衡,静电场、温度的定常分布;抛物型方程可以描述热的传导,溶质的扩散等等.这几类方程的恰当的边界条件是什么,在20世纪上半叶大体上得到了解决,所讨论的方程可以是多个自变量的,也可以是高阶的①,比如对 $2m$ 阶的椭圆型方程来说,在一个封闭区域的边界上给了 m 个适

① 偏微分方程的阶数是指方程中所包含的未知函数偏导数的最高阶数,表中所列的方程都是二阶的.

当的边界条件，一般就能把解唯一地决定下来.

表中的 Ⅳ 类方程是 20 世纪才开始研究的，它发生于气体力学中的跨音速的定常流动，1923 年，特里科米最早系统地研究过它. 这类方程称为混合型方程，因为它在一部分区域（$y > 0$）属于椭圆型，另一部分区域（$y < 0$）属于双曲型. 当气流从亚音速过渡到超音速时，就能导出这类方程. 这类方程虽然也有不少人在研究，但大都只限于两个自变数的情形. 到 20 世纪 50 年代，才有人开始提出要研究多个自变数的混合型方程的定解问题，但当时没有能深入下去. 在 50 年代后期出现了研究混合型偏微分方程的有效工具，就是弗里德里希首先提出的一阶正对称偏微分方程组的理论. 这个理论是研究一阶方程组的（未知函数个数可以是任意个），但许多二阶方程可化到这种一阶方程组去，从而改变了古典偏微分方程的分类法，这对于研究混合型方程是特别有利的. 弗里德里希本人就曾用它来研究了特里科米方程的定解问题.

特里科米（Tricomi Francesco Giacomo，1897—1978），意大利科学家，生于那不勒斯.

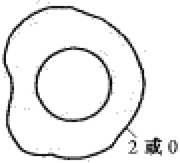
在气体力学中，除了特里科米方程外，还出现了形为

$$(1-x^2)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}+(1-y^2)\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+2ax\frac{\partial\phi}{\partial x}+$$

$$2ay\frac{\partial\phi}{\partial y}-a(a+1)\phi=f(x,y) \qquad ③$$

的偏微分方程，这里 a 是常数，$f(x,y)$ 是已知函数. 它在单位圆内是椭圆型的，在单位圆外是双曲型的，所以它是混合型的. 在 20 世纪 60 年代初，我们注意到在力学研究中早已有人讨论过这个方程的某些应用①，并且发现正对称型偏微分方程理论对于这种方程是非常有用的，我们把正对称型方程理论作了一些发展后，就用来讨论这个方程，知道了一批可解的边值问题.

弗里德里希（Friedrichs，kurt Otto，1901—1983），美国数学家. 1901 年 9 月 28 日生于德国基尔，1983 年 1 月 2 日卒于美国纽约.



特别引起我们注意的是下面的情况：讨论平面上一个有界闭区域的边值问题②，这个区域包含单位圆，它的边界的切线都在单位圆外. 我们发现：当 $a > 2$ 时，在边界上给了两个条件，方程③还能有解，而且解在单位圆（变型线）上的二阶偏导数也能保持连续. 这样的边值问题和所有的古典情况都大不相同. 对闭区域而言，Ⅰ 在边界上连一个连界条件都不好给，Ⅲ 在边界上只能给一个边界条件，而现在却给了两个边界条件还能有解. Ⅳ 在边界上一个边界条件也不能给完全，且只能保证在变型线上有一阶连续偏导数的解，而现在给了多得多的边界条件后，还能有一阶偏导数在区域内处处连续的解. 边界条件给得多了，解的性质却能更好一些. 这是一种边界条件可能给得最多的情形. 同时，我们还发现，当 $a < -1/2$ 时，对同样的区域而言，偏微分方程

① 当时华罗庚教授从微分几何出发，注意到并研究过这个方程当 $a=-1$ 时的情形.
② 当时所得到的结果是关于 n 个自变数的，现在为方便计，只就自变数为 x, y 的情况来叙述.

就只能有一个解，也就是说，不能再给任何边界条件了，方程的解就只是那么一个.这就是边界条件可能给得最少的情形，这在古典的情况中也是从未出现的.这样，我们就开始发现了一些以前未曾出现的情形，这些情形不仅在两个自变量时，而且在任意多个自变量时，都会发生.并且在后来的研究中，我们又发现，这并不是个别的混合型方程 ③ 才具有的特殊性质，而是相当一大类混合型方程都可以有这样的性质.

这样，我们就清楚了，对于一个有界闭区域，某些二阶偏微分方程需要两个边界条件，某些二阶偏微分方程需要一个边界条件，也有一些偏微分方程根本不需要什么边界条件，它在这区域只有一个解.

于是又可以提出下面的问题：是否只有二阶偏微分方程有这样的性质呢？这个问题也有了明确的回答.给一个有界闭区域，任意给一个正整数 m，又给一个整数 k，k 可以是 $0,1,\cdots,m$，就一定有 m 阶的偏微分方程

$$Lu = f, f \text{ 是任意光滑函数}^{①} \quad ④$$

使得在区域的边界上给了 k 个边界条件后，解存在而且唯一，这里 L 为常系数微分算子.从而我们就知道，对于 m 阶偏微分方程，边界条件的给法是十分多样的.

这种事实的发现，更促使我们进一步去研究边值问题.偏微分方程的种类是非常多的，除了上面所讲的那些外，还有其他许多方程，例如量子力学中的薛定谔方程，粘性流体力学中的纳维 - 斯托克斯方程，以及从浅水波中开始出现而最近研究得很多的 KdV 方程等等，它们都有各自的特性.同时，边界条件的提法也还有许多别的种类.例如以水和风的相互作用而言，水和风的运动所满足的微分方程是不同的，但它们的分界面也在运动，在分界面上也应有边界条件.又如冰的融化，冰和水的界面也在变动，也有相应的边界条件.凡此种种都有许多问题值得进一步研究.此外，20 世纪 50 年代以来，出现了偏微分方程的一般理论，它的目的是研究偏微分方程的一般性质，以期得出某些带有非常普遍意义的结论.这些研究已取得越来越多的成果，同时也越来越使人们相信，偏微分方程无论从数学的观点看还是从物理的观点看，都是非常复杂的对象，客观上就包含着多种多样的情况.在这种一般性的研究中，边值问题的讨论尚是很不充分的.上述关于边界条件个数的讨论表明，对于边值问题而言，情况将更加多种多样.总之，数学物理中的老问题和新问题的研究，偏微分方程本身理论的发展，都使我们感到，偏微分方程这个领域是一个开发不尽的宝藏.尽管至今为止开发出来的资源已经这样广泛地为人们所利用，已经这样地丰富多彩，但是我们有理由相信，已开发的只能是这个宝藏的一个很小的部分，还有许多更

---

① 左边代表一个包含 u 的到 m 阶为止的偏导数的表达式.

为宝贵的、埋藏得更深的东西，需要我们去发掘．这将是一个十分困难的任务，需要应用现代数学中各个部门的最新成果，需要创造新的工具，才能有更大的收获．“科学有险阻，苦战能过关．”我们一定能够越来越深入地探知偏微分方程的奥秘，并且能够利用它越来越充分地了解自然现象的规律，在自然界里得到更大的自由．

第八回　巧分类　线性拟线非线性①
仿解析　椭圆双曲抛物线

一个偏微分方程就是一个形如

$$F\left(x_1, x_2, \cdots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \cdots\right) = 0 \quad ①$$

的关系式，其中，F 是自变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 和未知函数 u 以及有限个偏微商的已知函数，F 可以不显含自变数及未知函数，但必须含有未知函数的偏微商．若未知函数不止一个，同时方程也不止一个，它们一起就构成一个偏微分方程组．除非另有说明，我们限制自变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 取实数值，并设函数 u 及其各阶偏微商连续．

出现在方程中未知函数的最高阶微商的阶叫做该方程的阶．而偏微分方程组的阶就是其中阶数最高的那个方程的阶．如果方程（组）对所有偏微商及未知函数都是线性的，就称它是线性偏微分方程（组），否则，称为非线性偏微分方程（组）．在非线性方程（组）中，如果对未知函数的最高阶微商是线性的，则称它是拟线性偏微分方程（组）．进而，如果最高阶微商的系数仅是自变量的函数，则称这样的拟线性方程（组）是半线性的．对线性方程（组），若出现在方程（组）中的未知函数及各阶微商的系数都是常数，则称它是常系数方程（组），否则称变系数方程．下面给出几个例子．

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x) u = f(x) \quad ②_1$$

其中，$a_{ij} = a_{ji}$，且至少有一个 $a_{ij} \neq 0$.

$$\Delta_n u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0 \quad ③$$

这里，Δ_n 叫做拉普拉斯算子．今后，在自变量的个数不会引起混淆的情况下，我们记 Δ_n 为 Δ.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u \quad ④$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u \quad ⑤$$

以上，a 是正的常数．

$$u_t + cuu_x + u_{xxx} = 0, c\text{ 为常数} \quad ⑥$$

---

① 本回引自文献[10].

$$v_x^2 + u_y^2 = u \qquad ⑦$$

$$\begin{cases} u_t - v_x = 0 \\ v_t + a(u)u_x = 0 \end{cases} \qquad ⑧$$

其中，u，v 都是自变量 t 和 x 的未知函数.

以上诸方程(组) 中，$②_1$ 是二阶线性方程，它是二阶线性偏微分方程的一般形式，其中，若 $f(x) \equiv 0$，则方程为齐次的，否则称非齐次的. ③，④ 和 ⑤ 都是二阶线性常系数方程，分别叫做调和方程、热传导方程和波动方程，是本书重点讨论的对象. ⑥ 是三阶拟线性方程，它就是有名的 Korteweg-de Vries 方程，简称 KdV 方程. ⑦ 是一阶非线性方程，但不是拟线性的. ⑧ 是一阶拟线性方程组.

若有一个函数 u(在方程组情形是一组函数) 在指定的自变量的变化区域中连续，并具有方程(组) 中所出现的一切连续微商，将它(们) 代入有关的方程(组) 后使其成为恒等式，则称函数 u(在方程组情形是一组函数) 是该方程(组) 的解或称古典解. 除了古典解，我们在本书中还将讨论广义解，它是古典解概念的推广.

许多物理现象具有叠加性：几种不同因素同时出现时所产生的效果等于各个因素单独出现时所产生效果的总和(叠加). 这种具有叠加性质的物理现象反映到方程中来就是线性微分方程. 我们以二阶线性方程 $②_1$ 为例来说明方程的解的叠加性质. 首先，引入线性偏微分算子

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j} + c(x) \qquad ⑨$$

于是，$②_1$ 可表示为

$$Lu = f \qquad ②_2$$

常常把叠加原理叙述为以下三种形式：

(1) 设 u_i 满足 $Lu_i = f_i(i = 1,2,\cdots,m)$，则它们的线性组合 $u = \sum_{i=1}^{m} c_i u_i$ 必满足方程

$$Lu = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i$$

(2) 设 u_i 满足方程 $Lu_i = f_i(i = 1,2,\cdots)$，并且级数 $u = \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i$ 收敛，且满足算子中所出现的求偏微商与求和交换次序所需要的条件，则 u 满足方程 $Lu = \sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i$.

(3) 设 $u(M,M_0)$ 满足 $Lu = f(M,M_0)$，其中 M 是自变量(可以是多维的)，M_0 表示参数(可以是多维参数)，又设积分

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2} = 0$$

$$U(M) = \int_{\Omega} u(M, M_0) \mathrm{d} M_0$$

收敛且满足 L 中出现的求偏微商与求和运算交换次序所需要的条件，则 $U(M)$ 满足方程

$$LU(M) = \int_{\Omega} f(M, M_0) \mathrm{d} M_0$$

由算子 L 的线性易知，这几个叠加性质成立.

以后将经常利用叠加原理把一个较复杂的问题的求解化为几个简单问题的求解，从而使问题得以解决.

因为处理偏微分方程的基本步骤，是先把一般形式的偏微分方程化成标准型，再给出解决标准型的基本方法，所以先对二阶线性偏微分方程进行分类与化简是必要的.

二阶线性偏微分方程的一般形式为

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_j \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f$$

其中，a_{ij}, b_j, c 和 f 都是实值函数，当 $n = 2$ 时可以写成

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + gu = f$$

它极类似于二元二次代数方程(二次曲线) $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey = f$，但是二者之间没有必然的联系(不像常微分方程)，然而，人们仍然沿有划分二次曲线的标准来划分二阶线性偏微分方程(见下表).

二次曲线	二阶方程	标准形式
双曲线	双曲型方程	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f$
椭　圆	椭圆型方程	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f$
抛物线	抛物型方程	$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f$

当然，我们上面的叙述是一种通俗的简化版，数学专业的讲法应该是更复杂.

第九回 用矢量 奥高公式于曲面[①] 格林式 拉普拉斯和泊松

拉普拉斯方程或泊松方程与第一类边界条件构成的定解问题叫做第一边值问题或迪利克雷问题；方程与第二类边界条件构成的定解问题叫做第二边值问题或纽曼问题.

设 $u(r)$ 和 $v(r)$ 在区域 T 直到其边界 Σ 上具有连续一阶导数，而在 T 中具有连续二阶导数，应用矢量分析的高斯－奥斯特洛德拉格斯基定理于曲面积分

$$\iint_{\Sigma} u \nabla v \mathrm{d}S$$

把它化为体积积分

$$\iint_{\Sigma} u \nabla v \mathrm{d}S = \iiint_{T} \nabla \cdot (u \nabla v) \mathrm{d}V = \iiint_{T} u \nabla v \mathrm{d}V + \iiint_{T} \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}V \quad ①$$

或写成 $\iiint_{T} u \nabla^2 v \mathrm{d}V$. 其中 $\nabla^2 u = \nabla \cdot (\nabla u)$.

这叫做第一格林公式.

同理，又有

$$\iint_{\Sigma} v \nabla u \mathrm{d}S = \iiint_{T} v \Delta u \mathrm{d}V + \iiint_{T} \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}V \quad ②$$

① 与 ② 两式相减，得

$$\iint_{\Sigma} (u \nabla v - v \nabla u) \mathrm{d}S = \iiint_{T} (u \Delta v - v \Delta u) \mathrm{d}V$$

亦即

$$\iint_{\Sigma} \left(u \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \right) \mathrm{d}S = \iiint_{T} (u \Delta v - v \Delta u) \mathrm{d}V \quad (\boldsymbol{n} \text{ 为外法向}) \quad ③$$

这叫做第二格林公式.

今取 $v(\boldsymbol{r})$ 为泊松方程的格林函数 $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_0)$. 对于三维空间，最简单的办法是选择取球对称的格林函数

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_0) = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{R}$$

① 本回引自文献[15].

$$R = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \qquad ④$$

r_0 是区域 T 中某个特定的点，它作为参数而进入格林函数的表达式 ④.

但是，格林函数 ④ 并不能直接作为 $v(\boldsymbol{r})$ 代入第二格林公式 ③，这是因为格林函数 ④ 在区域里的点 $\boldsymbol{r}_0$ 成为无限大，$G|_{r=r_0} = \infty$，从而高斯 – 奥斯特洛格拉德斯基定理不适用. 为此，以点 $\boldsymbol{r}_0$ 为球心作出半径为 ε 的球面 Σ_ε，把 Σ_ε 所围的体积 K_ε 从 T 挖去(图 1). 对于剩下的体积 $T - K_\varepsilon$，格林公式 ③ 又能成立，即

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_\varepsilon}\left(u\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\cdot\frac{1}{R} - \frac{1}{R}\cdot\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S = \iiint_{T-K_\varepsilon}\left(u\Delta\frac{1}{R} - \frac{1}{R}\Delta u\right)\mathrm{d}V$$

泊松方程的格林函数$\frac{1}{R}$ 只是在点 $\boldsymbol{r}_0$ 有“点电荷”，因而在除去点 $\boldsymbol{r}_0$的体积 $T - K_\varepsilon$ 中满足拉普拉斯方程. 这样，上式简化为

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_\varepsilon}\left(u\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\cdot\frac{1}{R} - \frac{1}{R}\cdot\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S = -\iiint_{T-K_\varepsilon}\frac{1}{R}\Delta u\,\mathrm{d}V \qquad ⑤$$

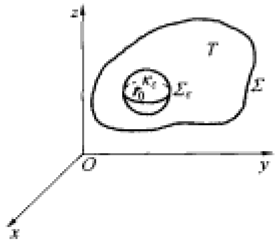


图 1

注意，所有微分和积分运算都是对点 $\boldsymbol{r}$ 的坐标 (x, y, z) 进行的，点 $\boldsymbol{r}_0$ 的坐标(x_0, y_0, z_0) 只是作为参数出现于 ⑤.

令 $\varepsilon \to 0$，考察 ⑤

$$\text{右边} \to -\iiint_T \frac{1}{R}\Delta u\,\mathrm{d}V$$

$$\text{左边的}\iint_{\Sigma_\varepsilon} u\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\cdot\frac{1}{R}\mathrm{d}S = -\iint_{\Sigma_\varepsilon} u\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{R}\mathrm{d}S = -\iint_{\Sigma_\varepsilon} u\frac{1}{R^2}\mathrm{d}S =$$

$$-\iint_{\Sigma_\varepsilon} u\frac{1}{\varepsilon^2}\mathrm{d}S = -\iint_{\Sigma_\varepsilon} u\,\mathrm{d}\Omega \to u(\boldsymbol{r}_0)\iint_{\Sigma_\varepsilon}\mathrm{d}\Omega = 4\pi u(\boldsymbol{r}_0)$$

式中，Ω 是立体角.

$$\text{左边的}\iint_{\Sigma_\varepsilon}\frac{1}{R}\cdot\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S = \varepsilon\iint_{\Sigma_\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\cdot\frac{1}{\varepsilon^2}\mathrm{d}S = \varepsilon\iint_{\Sigma_\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}\Omega \to$$

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\bigg|_{r=r_0}\iint_{\Sigma_\varepsilon}\mathrm{d}\Omega = 4\pi\varepsilon\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\bigg|_{r=r_0} \to 0$$

这样，⑤ 成为

$$u(\boldsymbol{r}_0) = \frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} - u\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\cdot\frac{1}{R}\right)\mathrm{d}S - \frac{1}{4\pi}\iiint_T\frac{\Delta u}{R}\mathrm{d}V \qquad ⑥$$

对于泊松方程 $\Delta u = f$，⑥ 即

$$u(\boldsymbol{r}_0)=\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\left(\frac{1}{R}\cdot\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}-u\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\cdot\frac{1}{R}\right)\mathrm{d}S-\frac{1}{4\pi}\iiint_{T}\frac{f}{R}\mathrm{d}V \qquad ⑦$$

这不妨叫做泊松方程的基本积分公式.

对于拉普拉斯方程 $\Delta u=0$,⑥ 即

$$u(\boldsymbol{r}_0)=\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\left(\frac{1}{R}\cdot\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}-u\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\cdot\frac{1}{R}\right)\mathrm{d}S \qquad ⑧$$

这叫做调和函数论的基本积分公式.

对于二维空间

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_0)=-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{R}$$

$$R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \qquad ⑨$$

同理可导出二维空间中的基本积分公式

$$u(\boldsymbol{r}_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma}\left(\left(\ln\frac{1}{R}\right)\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}-u\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\left(\ln\frac{1}{R}\right)\right)\mathrm{d}s-\frac{1}{2\pi}\iint_{T}\Delta u\ln\frac{1}{R}\mathrm{d}S \qquad ⑩$$

以上各个积分公式要求 u 和 $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$ 在边界 Σ 上的值都是已知的.可是在第一边值问题中,已知的只是 u 在边界 Σ 上的值;在第二边值问题中,已知的只是 $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$ 在边界 Σ 上的值.这样看来,这些积分公式既不足以解决第一边值问题,也不足以解决第二边值问题.

其实,这里离问题的解决已经很近了.原来,上面选取格林函数 ④ 和 ⑨ 时只着眼于简单,完全没有考虑边界 Σ 的存在.如果改取在边界 Σ 上为零的格林函数 $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_0)$,对于三维空间,这是说

$$\begin{cases}\Delta_3 G=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)\\ G|_{\Sigma}=0\end{cases} \qquad ⑪$$

则代替 ⑥ 的是

$$u(\boldsymbol{r}_0)=\iint_{\Sigma}\left(u\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}}-G\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S+\iiint_{T}G\Delta u\mathrm{d}V=\iint_{\Sigma}u(\boldsymbol{r})\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}}(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_0)\mathrm{d}S+\iiint_{T}G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_0)\Delta u\mathrm{d}V \qquad ⑫$$

由于 $G|_{\Sigma}=0$,在 ⑫ 中不再出现 $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$,从而 ⑫ 并不需要知道 $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$ 在 Σ 上的值,它就是第一边值问题的解的积分公式.⑪ 中的 $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_0)$ 则叫做第一边值问题的格林函数.

对于二维空间,也可以取在边界 Σ 上为零的格林函数 $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_0)$,则

$$\begin{cases}\Delta_2 G = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0) \\ G|_\Sigma = 0\end{cases} \quad ⑬$$

则代替 ⑩ 的是

$$u(\boldsymbol{r}_0) = \int_\Sigma u(\boldsymbol{r})\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}}(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_0)\mathrm{d}s + \iint_T G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_0)\Delta u \mathrm{d}V \quad ⑭$$

⑬ 叫做第一边值问题的格林函数，⑭ 是第一边值问题的解的积分公式.

积分公式 ⑫ 和 ⑭ 的物理解释有一个困难. 公式左边 u 的矢量 $\boldsymbol{r}_0$ 表明观测点在 $\boldsymbol{r}_0$，右边的积分是对 $\boldsymbol{r}$ 进行的，这表明 $\boldsymbol{r}$ 是源点的矢径；可是，格林函数 $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_0)$ 时的 $\boldsymbol{r}_0$ 却是源点的矢径，而 $\boldsymbol{r}$ 却是观测点的矢径. 看来，这两者无法协调. 这个困难是可以解决的. 原来，格林函数具有对称性 $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_0) = G(\boldsymbol{r}_0;\boldsymbol{r})$，完全可以把 $\boldsymbol{r}_0$ 当做观测点而 $\boldsymbol{r}$ 当做源点. 这样一来，积分公式的物理解释就不存在困难了.

现在来证明格林函数的对称性. 在 T 中任取两个定点 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$. 以这两点为中心，各作半径为 ϵ 的球面 Σ_1 和 Σ_2，从 T 挖去 Σ_1 和 Σ_2 所围的球 K_1 和 K_2，在剩下的区域 $T - K_1 - K_2$ 上，$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_1)$ 和 $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_2)$ 并无奇点. 以 $u = G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_1)$，$v = G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_2)$ 代人格林公式 ③，得

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}\left(u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S = \iiint_{T-K_1-K_2}(u\Delta v - v\Delta u)\mathrm{d}V$$

由于 $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_1)$ 和 $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_2)$ 是调和函数，上式右边为零. 又由于格林函数的边界条件，上式左边 $\iint_\Sigma = 0$. 这样

$$\iint_{\Sigma_1}\left(u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S + \iint_{\Sigma_2}\left(u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S = 0$$

令 $\epsilon \to 0$，上式成为 $0 - 4\pi v(\boldsymbol{r}_1) + 4\pi u(\boldsymbol{r}_2) - 0 = 0$，即 $G(\boldsymbol{r}_1;\boldsymbol{r}_2) = G(\boldsymbol{r}_2;\boldsymbol{r}_1)$.

至于第二边值问题，表面看来，似乎可以仿照第一边值问题，取法向导数在 Σ 上为零的格林函数 $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_0)$. 对于三维空间，这是说

$$\begin{cases}\Delta_3 G = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0) \\ \left.\dfrac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_\Sigma = 0\end{cases} \quad ⑮$$

则代替 ⑥ 的是 $u(r_0) = -\iint_\Sigma \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}G\mathrm{d}S + \iiint_T G\Delta u\mathrm{d}V$，对于二维空间，这是说

$$\begin{cases}\Delta_2 G = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0) \\ \left.\dfrac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_\Sigma = 0\end{cases} \quad ⑯$$

则代替 ⑩ 的是

$$u(\boldsymbol{r}_0)=-\int_{\Sigma}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}G\mathrm{d}S+\iiint_{T}G\Delta u\mathrm{d}V$$

可是,拉普拉斯方程和泊松方程的 ⑮ 和 ⑯ 这种形式的格林函数并不存在.这在物理上是容易看出来的.不妨把这格林函数看做稳定温度分布,泛定方程右边的 δ 函数表明在 Σ 所围区域 T 里有一个点热源,边界条件表明边界是绝热的.点热源不停地放出热量,而热量又不能经由边界散发出去,T 里的温度必然要不停地升高,温度的分布不可能是稳定的.这种情况下,代替格林函数 ⑮ 和 ⑯ 的应是推广的格林函数.对于三维空间

$$\begin{cases}\Delta_3 G=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)-\dfrac{1}{V_T}\\ \left.\dfrac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{\Sigma}=0\end{cases} \qquad ⑰$$

式中 V_T 是 T 的体积.对于二维空间

$$\begin{cases}\Delta_2 G=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)-\dfrac{1}{A_T}\\ \left.\dfrac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{\Sigma}=0\end{cases} \qquad ⑱$$

式中 A_T 是 T 的面积.方程右边添加的项是均匀分布的热汇密度,这些热汇的总体恰好吸收了点热源所放出的热量,不多也不少.

求格林函数的问题 ⑪ 和 ⑬ 本身也是边值问题.但这是特殊的边值问题,一旦解出这特殊的边值问题,运用解的积分公式就得到一般的边值问题的解.

例如我们在球 $r=a$ 内求解拉普拉斯方程的第一边值问题

$$\begin{cases}\Delta_3 u=0,r<a\\ u\,|_{r=a}=f(\theta,\varphi)\end{cases}$$

我们可用电像法求得球的第一边值问题的格林函数为

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_0)=-\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}+\frac{a}{r_0}\cdot\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}$$

把它代入第一边值问题的解的积分公式 ⑫ 就行了.

为了把 $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_0)$ 代入 ⑫,还必须先算出$\left.\dfrac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{\Sigma}$,引用球坐标系,极点就取在球心.

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}=\frac{1}{\sqrt{r^2-2rr_0\cos\Theta+r_0^2}} \qquad ⑲$$

其中 θ 是矢径 $\boldsymbol{r}$ 跟 $\boldsymbol{r}_0$ 之间的夹角,有

$$\cos\Theta=\cos\theta\cos\theta_0+\sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0) \qquad ⑳$$

计算法向导数

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}=\frac{\partial}{\partial r}\cdot\frac{1}{\sqrt{r^2-2rr_0\cos\theta+r_0^2}}=-\frac{r-r_0\cos\theta}{(r^2-2rr_0\cos\theta+r_0^2)^{3/2}}$$

分子里的 $\cos\theta$ 可利用 ⑲ 消去

$$\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}\right)_\Sigma=\left.\frac{r_0^2-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^2-r^2}{2r|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3}\right|_\Sigma=\left.\frac{r_0^2-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^2-a^2}{2a|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3}\right|_\Sigma$$

同理

$$\left(\frac{a}{r_0}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}\right)_\Sigma=\frac{a}{r_0}\cdot\left.\frac{r_1^2-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|^2-a^2}{2a|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|^3}\right|_\Sigma=$$

$$\left.\frac{\dfrac{a^4}{r_0^2}-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^2\dfrac{a^2}{r_0^2}-a^2}{2r_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3\dfrac{a^3}{r_0^3}}\right|_\Sigma=\left.\frac{a^2-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^2-r_0^2}{2a|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3}\right|_\Sigma$$

于是

$$\left.\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_\Sigma=-\frac{1}{4\pi}\cdot\left.\frac{r_0^2-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^2-a^2}{2a|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3}\right|_\Sigma+$$

$$\frac{1}{4\pi}\cdot\left.\frac{a^2-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^2-r_0^2}{2a|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3}\right|_\Sigma=\frac{1}{4\pi}\cdot\left.\frac{a^2-r_0^2}{a|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3}\right|_\Sigma$$

代入 ⑫,得到球的第一边值问题的解的积分公式

$$u(r_0,\theta_0,\varphi_0)=\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}f(\theta,\varphi)\frac{1}{4\pi}\cdot\left.\frac{a^2-r_0^2}{a|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3}\right|_\Sigma a^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=$$

$$\frac{a}{4\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}f(\theta,\varphi)\frac{a^2-r_0^2}{(a^2-2ar_0\cos\theta+r_0^2)^{3/2}}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \qquad ㉑$$

这叫做球的泊松积分.

再如我们在半空间 $z>0$ 内求解拉普拉斯方程的第一边值问题

$$\begin{cases}\Delta_3 u=0, z>0\\ u|_{z=0}=f(x,y)\end{cases}$$

我们先求格林函数 $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_0)$,得

$$\begin{cases}\Delta_3 G=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)\\ G|_{z=0}=0\end{cases}$$

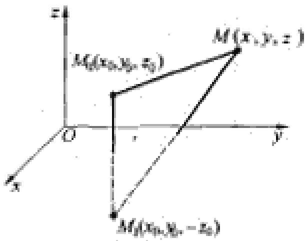


图 2

这相当于接地导体平面 $z=0$ 上方的电势,在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 放置着电量为 $-\varepsilon_0$ 的点电荷.这电势可用电像法求得.

设想在 M_0 的对称点 $M_1(x_0,y_0,-z_0)$ 放置电量为 $+\varepsilon_0$ 的点电荷,不难验证,在两个点电荷的电场中,平面 $z=0$ 上的电势确实是零(图

2). 在点 M_1 的点电荷就是电像. 格林函数

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_0) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} + \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|} = $$

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}} +$$

$$\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}} \qquad ㉒$$

为了把 $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_0)$ 代入第一边值问题的解的积分公式 ⑫, 需要先计算 $\left.\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{z=0}$, 即 $-\left.\frac{\partial G}{\partial z}\right|_{z=0}$.

$$\left.\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{z=0} = \left(\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}} - \right.$$

$$\left.\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}\right)_{z=0} =$$

$$\frac{1}{2\pi}\frac{z_0}{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2)^{3/2}}$$

代入 ⑫ 即得半空间的第一边值问题的解的积分公式

$$u(x_0,y_0) = \frac{z_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\frac{1}{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2)^{3/2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad ㉓$$

这叫做半空间的泊松积分.

我们还可在圆 $\rho = a$ 内求解拉普拉斯方程的第一边值问题

$$\begin{cases}\Delta_2 u = 0, \rho < a \\ u|_{\rho=a} = f(\varphi)\end{cases}$$

我们有

$$u(\rho_0,\varphi_0) = \frac{a^2-\rho_0^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{a^2-2a\rho_0\cos(\varphi-\varphi_0)+\rho_0^2}f(\varphi)\mathrm{d}\varphi \qquad ㉔$$

最后我们在半平面 $y > 0$ 内求解拉普拉斯方程的第一边值问题

$$\begin{cases}\Delta_2 u = 0, y > 0 \\ u|_{y=0} = f(x)\end{cases}$$

我们有

$$u(x_0,y_0) = \frac{y_0}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x-x_0)^2+y_0^2}f(x)\mathrm{d}x \qquad ㉕$$

第十四　有限元　拉氏方程变积分
半空间　迪氏问题有新意

考虑更一般的二阶椭圆偏微分方程的迪利克雷问题

$$Au = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu = f, x \in \Omega \quad ①$$

$$u\mid_{\partial\Omega} = 0 \quad ②$$

其中，a_{ij}, b_j, c 均属于 $L_\infty(\Omega), f \in L_2(\Omega), a_{ij}$ 满足条件

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \gamma \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \quad ③$$

$$\forall (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbf{R}^n, x \in \overline{\Omega}$$

其中，$\gamma > 0$ 是常数，对 $u, v \in H'_0(\Omega)$，令

$$a(u,v) = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} v + cuv\right) \mathrm{d}x$$

显然 $a(u,v)$ 是有界双线性形式，边值问题 ② 的变分形式是：求 $u \in H'_0(\Omega)$，满足

$$a(u,v) = \int_\Omega fv\,\mathrm{d}x, \forall v \in H'_0(\Omega)$$

利用伽辽金(Galerkin)有限元法还可将拉普拉斯方程化为边界积分方程.

只考虑三维拉普拉斯方程

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0 \quad ④$$

弗雷德霍姆(1866—1927)，瑞典数学家.

设 Ω 是 $\mathbf{R}^3$ 中的有界连通域，Ω' 是 $\overline{\Omega}$ 的余集，则迪利克雷问题为：求 $u \in C(\overline{\Omega})$，使 $\Delta u = 0$ 于 $\Omega, u = u_0$ 于 $\partial\Omega$，可化为弗雷德霍姆积分方程

$$\int_{\partial\Omega} \frac{1}{|x-y|} \cdot \frac{\partial u(y)}{\partial \gamma_y} \mathrm{d}s_y = f(x), x \in \partial\Omega \quad ⑤$$

$$f(x) = \int_{\partial\Omega} u_0(y) \frac{\partial}{\partial v_y} \cdot \frac{1}{|x-y|} \mathrm{d}s_y + 2\pi u_0(x) \quad ⑥$$

定义在区域(E_n 的开连通子集)上的函数 u，如果它二次可微(即二阶偏导数存在且连续)，且在区域的每一点上满足拉普拉斯方程 $\Delta u = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0$，那么称函数 u 为调和函数.

例如 $E_{n+1}^{+} = \{(x,y) = (x_1, \cdots, x_n, y) \in E_{n+1}; y > 0\}$ 通常称为上半空间(为了强调 E_{n+1}^{+} 是上半平面($n = 1$ 的情形)的推广，所以用有序数对(x,y)来

表示 E_{n+1}^{+} 中的点，其中 $x \in E_n$，y 是正实数）在 E_{n+1}^{+} 上，$P(x,y) = C_n(y/(|x|^2+y^2)^{\frac{n+1}{2}})$ 也是调和函数.

迪利克雷问题的最一般提法是：

设 D 是一个有紧闭包 $\overline{D}$ 的区域，f 是定义在其边界 $\partial D = \overline{D} - D$ 上的连续函数，问是否存在 $\overline{D}$ 上的一个连续函数，使得

(1) u 在 D 上调和；

(2) 当 $x \in \partial D$ 时，$u(x) = f(x)$.

我们对迪利克雷问题的变式感兴趣，即其中 D 是上半空间 E_{n+1}^{+} 的情形，可以提出以下问题：

给定函数 $f \in L^p(E_n)(1 \leqslant p \leqslant \infty)$，是否存在一个定义在上半空间 E_{n+1}^{+} 的调和函数 u，使得当 $g \to 0$ 时，有

$$\| u(\cdot,y) - f \|_p = \left(\int_{E_n} |u(x,y) - f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \to 0$$

假如 f 连续而 $p = \infty$，这个问题就是迪利克雷问题在无界区域 $D = E_{n+1}^{+}$ 上的直接推广，这时问题的解不一定唯一，而且，若 f 不连续，那么显然也不能存在调和(尤其还是连续)函数 u，使当 $y \to 0$ 时，有 $\| u(\cdot,y) - f \|_\infty \to 0$，然而，当 $p < \infty$ 时，问题的解是存在的. 且对 $p = \infty$ 时，如果问题提得适当，问题的解也是存在的.

下述定理告诉我们，f 的泊松积分正是我们所要找的调和函数.

定理 (1) 设 $f \in L^p(E_n)(1 \leqslant p \leqslant \infty)$，$f$ 的泊松积分是

$$u(x,y) = \int_{E_n} f(t) p(x-t,y) \mathrm{d}t$$

则 u 在 E_{n+1}^{+} 上调和，且对几乎每一个 $x \in E_n$，有 $\lim\limits_{y\to 0} u(x,y) = f(x)$，且对一切 $y > 0$，有

$$\| u(\cdot,y) \|_p = \left(\int_{E_n} |u(x,y)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \leqslant \| f \|_p$$

如果 $1 \leqslant p < \infty$，那么 $u(\cdot,y)$ 按 L^p 范数收敛于 $f(y \to 0)$，即

$$\| u(\cdot,y) - f \|_p = \left(\int_{E_n} |u(x,y) - f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \to 0, y \to 0$$

(2) 若 $f \in C_0 \subset L^\infty(E_n)$，则 f 的泊松积分 $u(x,y)$ 一致收敛于 f，即当 $y \to 0$ 时，$\| u(\cdot,y) - f \|_\infty = \sup\limits_{x \in E_n} |u(x,y) - f(x)| \to 0$，如果仅假定 f 连续并有界，则一致收敛性在 E_n 的紧子集上成立，对这两种情形，我们令 $u(x,0) = f(x)$，可将 $u(x,y)$ 扩张到 $\overline{E_{n+1}^{+}} = E_{n+1}^{+} \cup E_n$ 上，因而得到一个连续函数.

第十一回　定区域　连续函数可调和
等价于　任意边界值可解

一、调和函数的基本性质

我们先看一下下面的定义，然后再给出一些调和函数的例子.

定义 1　设 G 是 $\mathbf{C}$ 内开子集，称函数 $u:G\to\mathbf{R}$ 是调和的，如果 u 具有连续的二阶偏导数，并且

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

这个方程称为拉普拉斯方程.

我们也回忆一下下列关于调和函数的一些性质.

(1) 域 G 内的函数 f 是解析的，当且仅当 $\operatorname{Re} f=u$ 和 $\operatorname{Im} f=v$ 是调和函数，并且它们满足柯西－黎曼方程.

(2) 域 G 是单连通的，当且仅当对于 G 内的每一个调和函数 u，在 G 内存在一个调和函数 v，使得 $f=u+\mathrm{i}v$ 在 G 内是解析的.

定义 2　如果 $f:G\to\mathbf{C}$ 是解析函数，则 $u=\operatorname{Re} f$ 和 $v=\operatorname{Im} f$ 称为调和共轭.

如果 u 是 G 内的调和函数，D 为包含在 G 内的圆，则 D 内存在一个调和函数 v，使得 $u+\mathrm{i}v$ 在 D 内解析. 换句话说，每个调和函数局部地具有一个调和共轭. 最后我们注意到，如果 v_1 和 v_2 是 u 的两个调和共轭，则 $\mathrm{i}(v_1-v_2)=(u+\mathrm{i}v_1)-(u+\mathrm{i}v_2)$ 是解析函数，它的值域包含在虚轴内，因此 $v_1=v_2+c$，其中 c 为一个常数.

命题 1　如果 $u:G\to\mathbf{R}$ 是调和函数，则 u 无穷次可微.

证明　在 G 内固定 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$，取 δ 使得 $B(z_0;\delta)\subset G$，则 u 在 $B(z_0;\delta)$ 内具有一个调和共轭 v. $f=u+\mathrm{i}v$ 是解析函数，所以在 $B(z_0;\delta)$ 内无穷次可微. 由此推出，u 无穷次可微.

上面的命题指出了调和函数与解析函数的一个共同性质. 下面的结果类似于柯西积分公式.

定理 1(中值定理)　设 $u:G\to\mathbf{R}$ 为一个调和函数，$\overline{B}(a;r)$ 为包含在 G 内的闭圆. 如果 γ 为圆周 $|z-a|=r$，则

$$u(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(a+re^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta$$

证明 设 D 为一个圆使得 $\overline{B}(a;r)\subset D\subset G$, f 为 D 内的解析函数满足 $u=\operatorname{Re} f$. 由柯西积分公式容易导出

$$f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a+re^{i\theta})d\theta$$

方程两边取实部后，我们便完成了证明.

定义 3 称连续函数 $u:G\to\mathbf{R}$ 具有中值性质(MVP)，如果对于任何 $\overline{B}(a;r)\subset G$ 有

$$u(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(a+re^{i\theta})d\theta$$

后面我们将证明，定义在域内具有 MVP 的任何连续函数一定是调和函数. 证明这一点的主要工具，是下面关于调和函数的类似的最大模定理.

定理 2(最大值原理第一形式) 设 G 是一个域，u 为 G 内具有 MVP 的连续实值函数. 如果 G 内存在一点 a，使得对于 G 内所有的 z, $u(a)\geqslant u(z)$，则 u 是常数函数.

证明 设集 A 定义为

$$A=\{z\in G\mid u(z)=u(a)\}$$

由于 u 是连续的，所以 A 在 G 内是闭集. 如果 $z_0\in A$，设 r 选取得使 $\overline{B}(z_0;r)\subset G$. 假定 $B(z_0;r)$ 内有一点 b，使得 $u(b)\neq u(a)$，则 $u(b)<u(a)$. 根据连续性，对于 b 的一个邻域内所有的 z, $u(z)<u(a)=u(z_0)$. 特别地，如果 $\rho=|z_0-b|$ 及 $b=z_0+\rho e^{i\beta}$, $0\leqslant\beta<2\pi$，则 $[0,2\pi]$ 中存在一个开区间 I，使得 $\beta\in I$，及对于 I 内所有的 θ 有 $u(z_0+\rho e^{i\theta})<u(z_0)$. 因此，根据 MVP，有

$$u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z_0+\rho e^{i\theta})d\theta<u(z_0)$$

这就是一个矛盾. 所以 $B(z_0;r)\subset A$, A 是开集，由 G 的连通性，$A=G$.

定理 3(最大值原理第二形式) 设 G 为一个域，u 和 v 为 G 内具有 MVP 的两个连续的实值函数. 如果对于扩充边界 $\partial_\infty G$ 的每一个 a

$$\limsup_{z\to a}u(z)\leqslant\liminf_{z\to a}v(z)$$

则或者对于 G 内所有的点 z 有 $u(z)<v(z)$，或者 $u=v$.

证明 在 $\partial_\infty G$ 上固定 a，对于每一个数 $\delta>0$，设 $G_\delta=G\cap B(a;\delta)$. 则按照假设

$$\begin{aligned}0&\geqslant\lim_{\delta\to0}(\sup\{u(z)\mid z\in G_\delta\}-\inf\{v(z)\mid z\in G_\delta\})=\\&\lim_{\delta\to0}(\sup\{u(z)\mid z\in G_\delta\}+\sup\{-v(z)\mid z\in G_\delta\})\geqslant\\&\lim_{\delta\to0}\sup\{u(z)-v(z)\mid z\in G_\delta\}\end{aligned}$$

所以，对于 $\partial_\infty G$ 上每一点 a

$$\limsup_{z\to a}(u(z)-v(z))\leqslant0$$

因此要证明这个定理，可以假定对于 G 内所有的 z，$v(z)=0$. 即假设对于 $\partial_\infty G$ 上所有的点 a

$$\limsup_{z\to a} u(z) \leqslant 0 \quad ①$$

证明或者对于 G 内所有的 z 有 $u(z)<0$，或者 $u\equiv 0$. 由最大值原理的第一形式，只要证明对于 G 内所有的 z，$u(z)\leqslant 0$.

假设 u 满足①，且 G 内有一点 b 使 $u(b)>0$. 取定 $\delta>0$ 使 $u(b)>\varepsilon$，设 $B=\{z\in G \mid u(z)\geqslant\varepsilon\}$. 如果 $a\in\partial_\infty G$，则由①推出存在一个数 $\delta=\delta(a)$，使得对于 $G\cap B(a;\delta)$ 内所有的 z，$u(z)<\delta$. 应用勒贝格覆盖引理，可以找到一个与 a 无关的 δ. 即存在一个 $\delta>0$，使得如果 $z\in G$ 且 $d(z,\partial_\infty G)<\delta$，则 $u(z)<\delta$. 因此

$$B\subset\{z\in G \mid d(z,\partial_\infty G)\geqslant\delta\}$$

由此得出，B 在平面内是有界的. 由于 B 显然是闭的，因而它是紧集. 所以，如果 $B\neq\varnothing$，则 B 中存在一点 z_0，使得对于 B 中所有的 z，$u(z_0)\geqslant u(z)$. 由于对 $G-B$ 内的 z，$u(z)<\varepsilon$，所以 u 在 G 内一点达到最大值. 因此，u 必是常数. 但这常数必是 $u(z_0)$，并且是正的，这就与①矛盾.

勒贝格（Lebesgue, Henri Leon, 1875—1941），法国数学家. 出生于波韦，是20世纪法国最有影响的分析学家之一.

下面的系是最大值原理的一个有用的特殊情况.

系 1 设 G 为有界域，$w:\overline{G}\to\mathbf{R}$ 为 G 内具有 MVP 的连续函数. 如果对于 ∂G 上所有的 z，$w(z)=0$，则对于 G 内所有的 z，$w(z)=0$.

证明 首先在定理 3 中取 $w=u$ 和 $v=0$. 这样，对于所有的 z，或者 $w(z)<0$，或者 $w(z)\equiv 0$. 如果在定理 3 中取 $w=v$ 和 $u=0$，则对于所有的 z，或者 $w(z)>0$，或者 $w(z)\equiv 0$. 由于两者均成立，所以 $w\equiv 0$.

虽然定理 3 称为最大值原理，但它也是最小值原理. 为了完全起见，我们将对应于定理 2 的最小值原理叙述在下面. 它的证明可借助于定理 3，或者通过在定理 2 中以 $-u$ 代替 u 而得到.

定理 4（最小值原理） 设 G 为一个域，u 为 G 内具有 MVP 的连续实值函数. 如果 G 内存一点 a，使得对于 G 内所有的 z，$u(a)\leqslant u(z)$，则 u 是一个常数函数.

二、圆内调和函数

在广泛研究调和函数之前，我们必须先作局部的研究. 此即，我们必须在圆内研究这些函数. 我们的计划是，在开单位圆 $\{z \mid |z|<1\}$ 内研究调和函数，然后把结果解释到任意的圆上. 这里最基本的是泊松核.

定义 4 对于 $0\leqslant r<1$ 及 $-\infty<\theta<\infty$，函数

$$P_r(\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{in\theta} \quad ②$$

称为泊松核.

设 $z = re^{i\theta}, 0 \leqslant r < 1$;则

$$\frac{1 + re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}} = (1 + z)(1 + z + z^2 + \cdots) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in\theta}$$

所以

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1 + re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}}\right) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (e^{in\theta} + e^{-in\theta}) = P_r(\theta)$$

另外
$$\frac{1 + re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}} = \frac{1 + re^{i\theta} - re^{i\theta} - r^2}{|1 - re^{i\theta}|^2}$$

因此

$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2} = \mathrm{Re}\left(\frac{1 + re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}}\right) \qquad ③$$

命题 2 泊松核满足下列条件:

(1) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)\mathrm{d}\theta = 1$.

(2) 对于所有的 $\theta, P_r(\theta) > 0, P_r(-\theta) = P_r(\theta)$;并且 $P_r(\theta)$ 对于 θ 是周期为 2π 的周期函数.

(3) 如果 $0 < \delta < |\theta| \leqslant \pi$,则 $P_r(\theta) < P_r(\delta)$.

(4) 对于每一个 $\delta > 0$ 有

$$\lim_{r \to 1^-} P_r(\theta) = 0$$

对 θ 在 $\pi \geqslant |\theta| \geqslant \delta$ 上一致收敛.

证明 (1) 对于固定的值 $r, 0 \leqslant r < 1$,级数 ② 对 θ 一致收敛.因此

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)\mathrm{d}\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta}\mathrm{d}\theta = 1$$

(2) 由方程 ③, $P_r(\theta) = (1 - r^2)|1 - re^{i\theta}|^{-2} > 0$,因为 $r < 1$. (2) 的余下部分是 ③ 的一个明显的推论.

(3) 设 $0 < \delta < \theta \leqslant \pi$,定义 $f:[\delta,\theta] \to \mathbf{R}$ 为 $f(t) = P_r(t)$,应用 ③ 经通常的计算得到 $f'(t) < 0$,因此 $f(\delta) > f(\theta)$.

(4) 我们必须证明

$$\lim_{r \to 1^-} \sup\{P_r(\theta) \mid \delta \leqslant |\theta| \leqslant \pi\} = 0$$

但根据(3),如果 $\delta \leqslant |\theta| \leqslant \pi$,则 $P_r(\theta) \leqslant P_r(\delta)$;所以,只要证明

$$\lim_{r \to 1^-} P_r(\delta) = 0$$

但这又是方程 ③ 的一个明显的推论.

在应用泊松核之前,读者应花一点时间考虑一下命题 2 的意义.我们不把 $P_r(\theta)$ 看做是 r 和 θ 的函数,而看做是指标为 r 的 θ 的函数族.当 r 趋于 1 时,在

$[-\pi,\pi]$ 的任何不包含 $\theta=0$ 的闭子区间上，这些函数一致收敛于零(由(4))。但是命题的(1) 仍成立. 因此当 r 趋于1时，对于远离零的 θ，$P_r(\theta)$ 的图象变得越来越接近于 θ 轴，而在 θ 靠近零时图象变得很陡. 因此，命题 2(1) 保持成立.

下面的定理说明，迪利克雷问题对于单位圆可解.

定理5 设 $D=\{z \mid |z|<1\}$. 假设 $f:\partial D \to \mathbf{R}$ 是连续函数，则存在一个连续函数 $u:\overline{D}\to\mathbf{R}$，使得

(1) 对于 ∂D 上的 z，$u(z)=f(z)$；

(2) u 在 D 内是调和的；而且，u 是唯一的，并且对于 $0\leqslant r<1, 0\leqslant\theta\leqslant\pi$，$u$ 由公式

$$u(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)f(e^{it})\mathrm{d}t \tag{④}$$

定义.

证明 定义 $u:\overline{D}\to\mathbf{C}$. 当 $0\leqslant r<1$ 时 $u(re^{i\theta})$ 由式③表示，又 $u(e^{i\theta})=f(e^{i\theta})$. 显然，$u$ 满足(1). 余下要证明，u 在 D^- 上连续，在 D 内调和.

(i) u 在 D 内是调和的. 如果 $0\leqslant r<1$，则

$$\begin{aligned}u(re^{i\theta})&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{Re}\left(\frac{1+re^{i(\theta-t)}}{1-re^{i(\theta-t)}}\right)f(e^{it})\mathrm{d}t=\\&\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(e^{it})\left(\frac{1+re^{i(\theta-t)}}{1-re^{i(\theta-t)}}\right)\mathrm{d}t\right)=\\&\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(e^{it})\left(\frac{e^{t}+re^{i\theta}}{e^{t}-re^{i\theta}}\right)\mathrm{d}t\right)\end{aligned}$$

所以，定义 $g:D\to\mathbf{C}$ 为

$$g(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(e^{it})\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right)\mathrm{d}t$$

由于 $u=\mathrm{Re}\,g$，我们只要证明 g 是解析函数.

(ii) u 在 $\overline{D}$ 上连续. 由于 u 在 D 内调和，因此只要证明 u 在 D 的边界上每一点连续. 为此我们作下面的断言.

断言 在 $[-\pi,\pi]$ 上给定 α，设 $\varepsilon>0$，则存在一个数 ρ，$0<\rho<1$，及 ∂D 上以 $e^{i\alpha}$ 为中点的弧 A，使得对于 $\rho<r<1$ 及 A 内的 $e^{i\theta}$，有

$$|u(re^{i\theta})-f(e^{i\alpha})|<\varepsilon$$

证明了断言之后，由于 f 是连续函数，u 在 $e^{i\alpha}$ 的连续性便可直接推出.

为了避免记号上的困难，我们只对 $\alpha=0$ 证明这一断言(一般的情况，对变数作旋转变换，由这一情况得到). 因为 f 在 $z=1$ 连续，所以，存在一个 $\delta>0$，使得当 $|\theta|<\delta$ 时

$$|f(e^{i\theta})-f(1)|<\frac{1}{3}\varepsilon \tag{⑤}$$

设 $M = \max\{|f(e^{i\theta})| \mid |\theta| \leqslant \pi\}$；由命题 2(4)，存在一个数 $\rho, 0 < \rho < 1$，使得对于 $\rho < r < 1$ 及 $|\theta| \geqslant \frac{1}{2}\delta$，有

$$P_r(\theta) < \frac{\varepsilon}{3M} \qquad ⑥$$

设 A 为弧 $\left\{e^{i\theta} \middle| |\theta| < \frac{1}{2}\delta\right\}$. 如果 $e^{i\theta} \in A$ 及 $\rho < r < 1$，则

$$u(re^{i\theta}) - f(1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - r) f(e^{it})\mathrm{d}t - f(1) =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\delta} P_r(\theta - t)(f(e^{it}) - f(1))\mathrm{d}t +$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|t|\geqslant\delta} P_r(\theta - t)(f(e^{it}) - f(1))\mathrm{d}t$$

如果 $|t| \geqslant \delta$ 及 $|\theta| \leqslant \frac{1}{2}\delta$，则

$$|t - \theta| \geqslant \frac{1}{2}\delta$$

因此，由式 ⑤ 和式 ⑥ 推出

$$|u(re^{i\theta}) - f(1)| \leqslant \frac{1}{3}\varepsilon + 2M\left(\frac{\varepsilon}{3M}\right) = \varepsilon$$

这就证明了断言.

最后，证明 u 是唯一的. 假设 v 为 $\overline{D}$ 上的连续函数，在 D 内调和，且对于所有的 θ 有 $v(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$. 则 $u - v$ 在 D 内是调和的，对于 ∂D 上所有的 z 有 $(u - v)(z) = 0$. 由系 1 推出，$u - v \equiv 0$.

系 2 如果 $u: \overline{D} \to \mathbf{R}$ 是连续函数，且在 D 内是调和的，则对于 $0 \leqslant r < 1$，及所有的 θ

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) u(e^{it})\mathrm{d}t$$

而且，u 是解析函数

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} u(e^{it})\mathrm{d}t$$

的实部.

证明 系 2 的第一部分是定理的直接推论. 第二部分由 f 是解析函数及公式 ③ 推出.

系 3 设 $a \in \mathbf{C}, \rho > 0$，又设 h 为 $\{z \mid |z - a| = \rho\}$ 上的连续实值函数，则存在唯一的连续函数 $w: \overline{B}(a;\rho) \to \mathbf{R}$，使得 w 在 $B(a;\rho)$ 内是调和的，且对于 $|z - a| = \rho$ 有 $w(z) = h(z)$.

证明 考虑 $f(e^{i\theta}) = h(a + \rho e^{i\theta})$；则 f 在 ∂D 上连续. 如果 $u: D^- \to \mathbf{R}$ 是

连续函数，使得 u 在 D 内调和，并且 $u(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$，则容易证明

$$w(z) = u\left(\frac{z-a}{\rho}\right)$$

就是在 $\overline{B}(a;\rho)$ 上所求的函数.

现在有可能给出所希望的关于中值定理的逆命题.

定理 6 如果 $u: G \to \mathbf{R}$ 是具有 MVP 的连续函数，则 u 是调和函数.

证明 设 $a \in G$，选取 ρ 使 $\overline{B}(a;\rho) \subset G$；我们只要证明，$u$ 在 $B(a;\rho)$ 内调和. 根据系 3，存在一个连续函数 $w: \overline{B}(a;\rho) \to \mathbf{R}$，它在 $B(a;\rho)$ 内是调和的，对于所有的 θ 有 $w(a+\rho e^{i\theta}) = u(a+\rho e^{i\theta})$. 因为 $u-w$ 满足 MVP，及对于 $|z-a| = \rho$ 有 $(u-w)(z) = 0$，所以由系 1 推出，在 $B(a;\rho)$ 内 $u \equiv w$；特别地，u 必是调和函数.

第十二回 存在性 解方程前要考虑
表达式 泊松积分表调和

在这一回内，我们利用佩龙（Perron）方法或称下调和函数法，讨论拉普拉斯方程迪利克雷问题解的存在性. 先给出 n 个变元的调和函数的泊松积分表达式.

一、调和函数的泊松积分表达式

考虑下列拉普拉斯方程

$$\Delta u = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0$$

这个方程的连续解称为调和函数. 下面我们将要推导调和函数的积分表达式，为此，先证明下列引理.

引理 1 设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 是开集，$u \in C^2(\overline{\Omega})$，则对任意 $\xi \in \Omega$，有

$$u(\xi) = \int_{|x-\xi|<\rho} (\psi(|x-\xi|) - \psi(\rho))\Delta u \mathrm{d}x + \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int_{|x-\xi|=\rho} u(x) \mathrm{d}x$$

其中

$$\psi(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega_n(2-n)} r^{2-n} & , n > 2 \\ \dfrac{1}{\omega_n} \ln r & , n = 2 \end{cases}$$

而 ω_n 是 $\mathbf{R}^n$ 内单位球面的表面积.

证明 首先，不难求得拉普拉斯方程的球对称特解

$$v = \psi(r) = \begin{cases} C \dfrac{r^{2-n}}{2-n}, & n > 2 \\ C \ln r, & n = 2 \end{cases}$$

其中，C 是任意常数，$r = |x - \xi| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \xi_i)^2}$.

在下列格林公式

$$\int_{\Omega} v \Delta u \mathrm{d}x = \int_{\Omega} u \Delta v \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) \mathrm{d}s$$

中，取 $v = \psi(r)$，Ω 为 $\Omega_\rho = \Omega \setminus B(\xi, \rho)$，则得

$$\int_{\Omega_\rho} v \Delta u \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) \mathrm{d}s + \int_{S(\xi,\rho)} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) \mathrm{d}s$$

在 $S(\xi,\rho)$ 上，$v=\psi(\rho)$，$\frac{\partial v}{\partial n}=-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\rho}=-\psi'(\rho)$，故

$$\int_{S(\xi,\rho)} v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=\psi(\rho)\int_{S(\xi,\rho)}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=-\psi(\rho)\int_{B(\xi,\rho)}\Delta u\mathrm{d}x \quad ①$$

$$\int_{S(\xi,\rho)} u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}s=-C\rho^{1-n}\int_{S(\xi,\rho)}u\mathrm{d}s,\ n>2 \quad ②$$

由于 $\mathbf{R}^n$ 中半径为 ρ 的球体的体积 $\beta_n=\dfrac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\rho^n$，而它的表面积为

$$\omega_n\rho^{n-1}=2\pi^{n/2}/\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\cdot\rho^{n-1}$$

所以，当 $\rho\to 0$ 时式 ① 的右端趋于 0，而式 ② 的右端趋于 $-C\omega_n u(\xi)$. 从而得

$$\int_\Omega v\Delta u\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)\mathrm{d}s+C\omega_n u(\xi)$$

取 $C=\frac{1}{\omega_n}$，并记 $v=K(x,\xi)=\psi(|x-\xi|)$，得

$$u(\xi)=\int_\Omega K(x,\xi)\Delta u\mathrm{d}x-\int_{\partial\Omega}\left(K(x,\xi)\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial K(x,\xi)}{\partial n}\right)\mathrm{d}s \quad ③$$

完全类似地，若在格林公式中取 $v=G(x,\xi)\equiv\psi(|x-\xi|)-\psi(\rho)$，可得

$$u(\xi)=\int_\Omega G(x,\xi)\Delta u\mathrm{d}x-\int_{\partial\Omega}\left(G(x,\xi)\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial G}{\partial n}\right)\mathrm{d}s \quad ④$$

特别地，取 Ω 为 $B(\xi,\rho)$，由于

$$G|_{\partial\Omega}=0,\ \frac{\partial G}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega}=\frac{1}{\omega_n}\rho^{1-n}$$

故得 $$u(\xi)=\int_{|x-\xi|<\rho}(\psi(|x-\xi|)-\psi(\rho))\Delta u\mathrm{d}x+\frac{1}{\omega_n\rho^{n-1}}\int_{|x-\xi|=\rho}u\mathrm{d}s$$

引理证毕.

推论 1 若 u 是调和函数，则

$$u(\xi)=\frac{1}{\omega_n\rho^{n-1}}\int_{|x-\xi|=\rho}u(x)\mathrm{d}x$$

这就是调和函数的平均值公式.

推论 2 若 $\Delta u\geqslant 0$，则

$$u(\xi)\leqslant\frac{1}{\omega_n\rho^{n-1}}\int_{|x-\xi|=\rho}u(x)\mathrm{d}s$$

这是因为 $\psi(r)$ 是单调增加函数的缘故.

值得指出的是，上述函数 $v=\psi(r)$ 正是 $\Delta u=0$ 的基本解. 事实上，在式 ③ 中取 $u=\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$，则得

$$\varphi(\xi) = \int_{\Omega} K(x,\xi)\Delta\varphi \mathrm{d}x$$

或记成

$$\langle v,\Delta\varphi\rangle = \varphi\langle\xi\rangle$$

但 Δ 是自共轭算子,即

$$\langle\Delta u,\varphi\rangle = \langle u,\Delta\varphi\rangle$$

故对任意 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$,有

$$\langle\Delta v,\varphi\rangle = \varphi(\xi) = \langle\delta(x-\xi),\varphi\rangle$$

这就证明,在分布意义下 $\Delta v = \delta(x-\xi)$,即 $v = \psi(|x-\xi|)$ 是 $\Delta u = 0$ 的基本解.

下面我们将着手建立调和函数的泊松积分表达式.取 $v(x,\xi) \in C^2(\overline{\Omega})$,且对 $\xi \in \Omega$,有 $\Delta_x v = 0$,作

$$G(x,\xi) = K(x,\xi) + v(x,\xi)$$

使对任意 $\xi \in \Omega$,满足

$$G\bigg|_{\partial\Omega} = 0$$

则称 G 为拉普拉斯方程的格林函数,在式 ④ 中取 G 为格林函数,则得

$$u(\xi) = \int_{\Omega} G(x,\xi)\Delta u \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial n}\mathrm{d}s$$

这个公式可以提供拉普拉斯方程迪利克雷问题的解,不过,为了确定格林函数,还得解一个特殊的迪利克雷问题.然而,对于一些特殊的区域,例如半空间、球域,它们的格林函数可以用初等方法求得.例如,对球形区域 $\Omega = B(0,a) = \{x \mid |x| < a\}$ 可以通过镜像法求出它的格林函数为

$$G(x,\xi) = K(x,\xi) - \left(\frac{|\xi|}{a}\right)^{2-n} K(x,\xi^*)$$

其中 ξ^* 是 ξ 关于 $S(0,a)$ 的反演点,即 $\xi^* = \dfrac{a^2}{|\xi|^2}\xi$,且

$$K(x,\xi) = \frac{1}{(2-n)\omega_n}r^{2-n}, K(x,\xi^*) = \frac{1}{(2-n)\omega_n}(r^*)^{2-n}, r^* = |x-\xi^*|$$

对于 $B(0,a)$,对任意 $\xi \in (0,a)$ 可得 $\Delta u = 0$ 解的表达式为

$$u(\xi) = \int_{|x|=a} H(x,\xi)u(x)\mathrm{d}s \tag{⑤}$$

其中

$$H(x,\xi) = \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial n} = \frac{1}{a\omega_n}\cdot\frac{a^2-|\xi|^2}{|x-\xi|^n} \tag{⑥}$$

称为 poisson 核.式 ⑤ 称为调和函数的泊松积分表达式.

容易验证,若 $f \in C^0(\partial\Omega)$,则

格　林 (Green, George, 1793—1841),英国数学家,生于英国的诺廷尼姆附近的斯内顿.

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2} = 0$$

$$u(\xi) = \int_{|x|=a} H(x,\xi)f(x)\mathrm{d}x, \xi \in B(0,a)$$

是下列迪利克雷问题

$$\begin{cases}\Delta u = 0, & |x| < a \\ u = f, & |x| = a\end{cases}$$

的解.

二、导数的估计

作为泊松积分表达式的一个应用,我们来建立调和函数导数的估计式,从而说明调和函数的紧性.

阿尔泽拉(Arzela, Cesars, 1847—1912),意大利数学家,提出了著名的阿斯科利－阿尔泽拉定理.

为了方便起见,首先考虑球域的情形. 设 $u \in C^2(\overline{\Omega})$,在 $\Omega = B(0,a)$ 内 $\Delta u = 0$,则由式⑤,⑥得

$$u_{\xi_j}(0) = \frac{n}{\omega_n a^{n+1}} \int_{|x|=a} x_j u(x)\mathrm{d}s \tag{7}$$

因此

$$|u_{\xi_j}(0)| \leqslant \frac{n}{a} \max_{|x|=a} |u(x)| \tag{8}$$

其次,设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 内任一开集,$\xi \in \Omega$,记 $d(\xi) = \mathrm{dist}(\xi, \partial\Omega)$,取 $a < d(\xi)$,由式⑧并令 $a \to d(\xi)$,得

$$|u_{\xi_i}(\xi)| \leqslant \frac{n}{d(\xi)} \sup_{\Omega} |u|^*$$

类似的估计式对于高阶导数也成立.

现取 $\omega \subset \Omega$ 是 Ω 的紧子集,则 $\xi \in \omega$ 时,$d(\xi) \geqslant d$(为常数)> 0,从而若 $|u| \leqslant M$,则

$$|u_{\xi_i}(\xi)| \leqslant \frac{n}{d} M$$

即当调和函数具有一致上界时,它的一阶导数在 Ω 的紧子集 ω 内也具有一致的上界. 由此即可推得调和函数的紧性:设 $\{u_k\}$ 是调和函数序列,且 $u_k \in C^0(\overline{\Omega})$,$|u_k||_{\partial\Omega} \leqslant M$,由极值原理及上述调和函数一阶导数的估计式知,$\{u_k\}$ 及其一阶导数在紧集 $\omega \subset \Omega$ 内一致有界. 利用阿尔泽拉定理可知,存在 $\{u_k\}$ 的子序列 $\{u_{k_j}\}$,在 ω 内 $u_{k_j} \xrightarrow{\text{一致地}} u$,且 u 也是调和函数.

* 设 u 是 Ω 内的调和函数,Ω' 是 Ω 的任一紧子集,则对任一重指标 α,有

$$\sup_{\Omega'} |D^\alpha u| \leqslant \left(\frac{n|\alpha|}{d}\right)^{|\alpha|} \sup_{\Omega} |u|$$

其中 $d = \mathrm{dist}(\Omega', \partial\Omega)$.

三、佩龙方法

现在就较一般的区域，证明拉普拉斯方程迪利克雷问题解的存在性. 先引入下列下调和函数的概念.

定义 1 Ω 内的连续函数 u 称为是下调和函数，如果对每个 $\xi \in \Omega$，下列不等式

$$u(\xi) \leqslant \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int_{|x-\xi|=\rho} u(x)\mathrm{d}s$$

对充分小的 ρ 成立.

由前面的叙述可知，若 $u \in C^2(\Omega)$，且 $\Delta u \geqslant 0$，则 u 是下调和函数. 下调和函数也具有如下极值原理.

引理 2 设 u 是 Ω 内的下调和函数，则 u 或者是常数或者对任意 $\xi \in \Omega$，成立

$$u(\xi) < \sup_{\Omega} u \tag{⑨}$$

证明 记 $M = \sup u$，且将 Ω 分解成两个不相交的子集

$$\Omega_1 = \{\xi \in \Omega \mid u(\xi) = M\}, \Omega_2 = \{\xi \in \Omega \mid u(\xi) < M\}$$

由 u 在 Ω 内连续，显然可知 Ω_2 是开集. 现证当 u 是下调和函数时，Ω_1 也是开集. 事实上，设 $\xi \in \Omega_1$，则对所有充分小的 ρ，有

$$0 \leqslant \int_{|x-\xi|=\rho} u(x)\mathrm{d}s_x - \omega_n \rho^{n-1} u(\xi) = \int_{|x-\xi|=\rho} (u(x) - u(\xi))\mathrm{d}s_x = \int_{|x-\xi|=\rho} (u(x) - M)\mathrm{d}s_x$$

因 $u(x) - M \in C^0(\Omega)$，且非正，故对每个充分小的 ρ，在 $|x - \xi| = \rho$ 上，$u(x) - M = 0$. 特别是在 $\xi \in \Omega_1$ 的充分小的邻域内 $u(x) = M$，或者说，Ω_1 是开集. 而每个连通开集不可能分解成两个不相交非空的开集. 所以 Ω_1 或 Ω_2 是空集，即式 ⑨ 得证.

引理 2 说明非常数的下调和函数不能在 Ω 内取得其上确界.

推论 3 若 u 是 Ω 内的下调和函数，且 $u \in C^0(\overline{\Omega})$，则或者 u 为常数，或者对任意 $\xi \in \Omega$，有

$$u(\xi) < \max_{\partial\Omega} u$$

下面为了方便，以 $M_u(\xi,\rho)$ 表示连续函数 u 在 $S(\xi,\rho)$ 上的积分平均值，即

$$M_u(\xi,\rho) = \frac{\rho^{1-n}}{\omega_n} \int_{S(\xi,\rho)} u(x)\mathrm{d}s_x$$

设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 是一开的有界连通域，按前面的定义，u 是 Ω 内的下调和函数，如果

$u \in C^0(\overline{\Omega})$，且对任意 $\xi \in \Omega$ 及所有充分小的 ρ，有

$$u(\xi) \leqslant M_u(\xi, \rho)$$

以 $\sigma(\Omega)$ 表示 Ω 内下调和函数的集合. 推论 3 可叙述为下列引理.

引理 3 对 $u \in \sigma(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$，成立

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leqslant \max_{\partial\Omega} u \qquad ⑩$$

定义 2 对 $u \in C^0(\Omega)$ 及 $\overline{B}(\xi, \rho) \subset \Omega$，我们定义 $u_{\xi,\rho} \in C^0(\Omega)$ 如下.

(1) 对任意 $x \in \Omega, x \notin B(\xi, \rho)$，有

$$u_{\xi,\rho}(x) = u(x) \qquad ⑪$$

(2) 对任意 $x \in B(\xi, \rho)$，有

$$\Delta_x u_{\xi,\rho}(x) = 0 \qquad ⑫$$

即 $u_{\xi,\rho}$ 在 $B(\xi, \rho)$ 是调和的，在 $B(\xi, \rho)$ 以外及 $S(\xi, \rho)$ 上与 $u(x)$ 一致. 解球内迪利克雷问题可知，这样的函数是存在而且唯一的.

引理 4 设 $u \in \sigma(\Omega)$，且 $\overline{B}(\xi, \rho) \subset \Omega$，则对任意 $x \in \Omega$，有

$$u(x) \leqslant u_{\xi,\rho}(x) \qquad ⑬$$

且

$$u_{\xi,\rho} \in \sigma(\Omega) \qquad ⑭$$

我们称这样的 $u_{\xi,\rho}$ 为 u 的提升.

证明 按定义，当 $x \notin B(\xi, \rho)$ 时，$u_{\xi,\rho} = u$. 故只要证明，在 $B(\xi, \rho)$ 内 $u \leqslant u_{\xi,\rho}$. 因为 $u \in \sigma(\Omega)$，且 $u_{\xi,\rho}$ 在 $B(\xi, \rho)$ 内调和，故 $-u_{\xi,\rho} \in \sigma(B(\xi, \rho))$，从而 $u - u_{\xi,\rho} \in \sigma(B(\xi, \rho))$. 又 $u - u_{\xi,\rho} \in C^0(\overline{B}(\xi, \rho))$，且 $(u - u_{\xi,\rho}) = 0$ on $S(\xi, \rho)$，由引理 3 知 $u - u_{\xi,\rho} \leqslant 0$ in $B(\xi, \rho)$. 这样就证明了 ⑬.

为了证明式 ⑭，我们必须说明对任意 $\zeta \in \Omega$ 及所有充分小的 τ，有

$$u_{\xi,\rho}(\zeta) \leqslant M_{u_{\xi,\rho}}(\zeta, \tau) \qquad ⑮$$

由式 ⑪ 知，当 $\zeta \notin \overline{B}(\xi, \rho)$ 时，式 ⑮ 成立，因为 $u \in \sigma(\Omega)$. 另外，当 $\zeta \in B(\xi, \rho)$ 时，由于 $u_{\xi,\rho}$ 是调和的，故式 ⑮ 也成立. 剩下只要证明当 $\zeta \in S(\xi, \rho)$ 时它也成立. 这是显然的，因为对充分小的 τ，有

$$u_{\xi,\rho}(\zeta) = u(\zeta) \leqslant M_u(\zeta, \tau) \leqslant M_{u_{\xi,\rho}}(\zeta, \tau), \zeta \in S(\xi, \rho)$$

引理 5 若 $u \in \sigma(\Omega)$，则当 $\overline{B}(\xi, \rho) \subset \Omega$ 时，有

$$u(\xi) \leqslant M_u(\xi, \rho)$$

成立.

证明 由式 ⑪ 与式 ⑬ 及调和函数的平均值公式，得

$$u(\xi) \leqslant u_{\xi,\rho}(\xi) = M_{u_{\xi,\rho}}(\xi, \rho) = M_u(\xi, \rho)$$

引理 6 u 是 Ω 内的调和函数的充要条件是 u 与 $-u$ 同时属于 $\sigma(\Omega)$.

证明 必要性由调和函数的平均值公式即得. 只须证充分性. 设 $u \in \sigma(\Omega)$, $-u \in \sigma(\Omega)$,由引理4知,当 $\overline{B}(\xi,\rho) \subset \Omega$ 时,对任意 $x \in \Omega$,有

$$u(x) \leqslant u_{\xi,\rho}(x), \ -u(x) \leqslant -u_{\xi,\rho}(x)$$

即 $u = u_{\xi,\rho}$. 因此,在 $B(\xi,\rho)$ 内 u 是调和的,由 $B(\xi,\rho)$ 的任意性,可知 u 在Ω 内调和.

引理 7 若 $u \in C^0(\Omega)$,且对任意 $\xi \in \Omega$ 及所有充分小的 ρ,成立

$$u(\xi) = M_u(\xi,\rho)$$

则 u 在 Ω 内是调和的.

所给条件意味着 $u \in \sigma(\Omega)$ 及 $-u \in \sigma(\Omega)$.

定义 3 设 $f \in C^0(\partial\Omega)$,定义

$$\sigma_f(\overline{\Omega}) = \{u \mid u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap \sigma(\Omega), u \leqslant f \text{ on } \partial\Omega\} \tag{16}$$

因为任意 $x \in \Omega$,有

$$w_f(x) = \sup_{u \in \sigma_f(\overline{\Omega})} u(x) \tag{17}$$

记 $m = \inf f$, $\mu = \sup f$,显然 $m \in \sigma_f(\overline{\Omega})$,故 $\sigma_f(\overline{\Omega})$ 非空. 同时由引理2知,对任意 $u \in \sigma_f(\overline{\Omega})$, $x \in \overline{\Omega}$,有

$$u(x) \leqslant \mu \tag{18}$$

故 $w_f(x)$ 是存在的.

引理 8 设 $u_1,\cdots,u_k \in \sigma_f(\overline{\Omega})$, $v = \max(u_1,\cdots,u_k)$,则 $v \in \sigma_f(\overline{\Omega})$.

证明 因 $u_1,\cdots,u_k \in C^0(\overline{\Omega})$,故易知 $v \in C^0(\overline{\Omega})$. 另外,由 $u_i \in \sigma(\Omega)$,故对任意 $\xi \in \Omega$ 及所有充分小的 ρ,有

$$\begin{aligned} v(\xi) &= \max(u_1(\xi),\cdots,u_k(\xi)) \leqslant \\ &\max(M_{u_1}(\xi,\rho),\cdots,M_{u_k}(\xi,\rho)) \leqslant M_v(\xi,\rho) \end{aligned} \tag{19}$$

即 $v \in \sigma(\Omega)$,且因 $u_i \leqslant f$ on $\partial\Omega$,故 $v \leqslant f$ on $\partial\Omega$. 综合上述得 $v \in \sigma_f(\overline{\Omega})$.

引理 9 w_f 是 Ω 内的调和函数.

证明 设 $\overline{B}(\xi,\rho) \subset \Omega$, $\rho' < \rho$, $x^1,\cdots,x^k,\cdots$ 是 $B(\xi,\rho)$ 内的点序列,由式 ⑰ 知,对每个 k 存在函数序列 $u_k^j \in \sigma_f(\overline{\Omega})$,使得

$$\lim_{j\to\infty} u_k^j(x^k) = w_f(x^k), k = 1,2,\cdots \tag{20}$$

对 $x \in \overline{\Omega}$,定义函数列

$$u^j(x) = \max(u_1^j(x),\cdots,u_j^j(x))$$

由引理8知,$u^j(x) \in \sigma_f(\overline{\Omega})$,且当 $x \in \Omega$, $j \geqslant k$ 时,$u^j(x) \geqslant u_k^j(x)$,从而对任意 k,有

$$\lim_{j\to\infty} u^j(x^k) = w_f(x^k)$$

不失一般性. 我们可以假定 $u^j(x)$ 在 $B(\xi,\rho)$ 内调和,且满足

$$\inf f = m \leqslant u^j(x) \leqslant \mu = \sup f \tag{㉑}$$

事实上,由于 $u^j_{\xi,\rho}$ 在 $B(\xi,\rho)$ 内调和,且在 $B(\xi,\rho)$ 外部有

$$u^j_{\xi,\rho} = u^j$$

故由 $u^j(x) \in \sigma_f(\overline{\Omega})$ 可知 $u^j_{\xi,\rho} \in \sigma_f(\overline{\Omega})$,从而,$u^j_{\xi,\rho} \leqslant \mu$. 再取 $\max(u^j_{\xi,\rho}, m)$ 作为上述要求的 u^j. 这样的 u^j 既满足式 ⑳,㉑,又在 $B(\xi,\rho)$ 内为调和函数. 既然 $m \leqslant u^j \leqslant \mu$,由调和函数的紧性可知,必存在 u^j 的子序列,这个子序列在 $B(\xi,\rho)$ 的紧子集 $B(\xi,\rho')$ 内收敛于调和函数 $W(x)$. 由式 ⑳ 知,对任意 k,有

$$w_f(x^k) = W(x^k)$$

首先,取 x^k 在 $B(\xi,\rho')$ 内收敛于 x,由 $W(x)$ 的连续性知 $\lim\limits_{k\to\infty} w_f(x^k)$ 存在,即 $w_f(x)$ 在 $B(\xi,\rho')$ 内连续. 其次,x^k 是一个在 $B(\xi,\rho')$ 内稠密的序列. 由于对所有 x^k,w_f 与 W 相同,再根据连续性知对所有 $x \in B(\xi,\rho')$,它们均相同. 这说明 w_f 在 ξ 的邻域内是调和的,从而在整个 Ω 内调和.

调和函数 w_f 有希望作为拉普拉斯方程迪利克雷问题的解,为此,还要证明它满足边界条件 f. 要做到这一点,还应当对 Ω 的边界补充一些要求.

可定义下调和函数的闸函数. 假定对每个 $\eta \in \partial\Omega$,存在函数 $Q_\eta(x)$ 满足

$$Q_\eta(x) \in C^0(\overline{\Omega}) \cap \sigma(\Omega)$$

且对任意 $x \in \partial\Omega, x \neq \eta$,有

$$Q_\eta(\eta) = 0, Q_\eta(x) < 0 \tag{㉒}$$

引理 10 设 $\eta \in \partial\Omega$,则

$$\liminf_{\substack{x\in\Omega \\ x\to\eta}} w_f(x) \geqslant f(\eta) \tag{㉓}$$

证明 令 ε, K 均为正数,则

$$u(x) = f(\eta) - \varepsilon + KQ_\eta(x) \in C^0(\overline{\Omega}) \cap \sigma(\Omega) \tag{㉔}$$

且对任意 $x \in \partial\Omega$,有

$$u(x) \leqslant f(\eta) - \varepsilon$$
$$u(\eta) = f(\eta) - \varepsilon$$

因 f 是连续的,故存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$,使当 $x \in \partial\Omega$, $|x - \eta| < \delta$ 时 $f(x) > f(\eta) - \varepsilon$. 再由式 ㉒,㉔ 可知,当 $x \in \partial\Omega$, $|x - \eta| < \delta$ 时,有

$$u(x) \leqslant f(x) \tag{㉕}$$

当 $|x - \eta| \geqslant \delta$ 时,$Q_\eta(x)$ 有负的上界,故可找到 $K = K(\varepsilon)$ 充分大,使得对 $x \in \partial\Omega$, $|x - \eta| \geqslant \delta$,式 ㉕ 仍成立. 于是 $u \in \sigma_f(\overline{\Omega})$,且对任意 $x \in \Omega$,有

$$u(x) \leqslant w_f(x)$$

因此
$$f(\eta) - \varepsilon = \lim_{x\to\eta} u(x) \leqslant \liminf_{\substack{x\in\Omega \\ x\to\eta}} w_f(x)$$

令 $\varepsilon \to 0$ 得式 ㉓.

引理 11 设 $\eta \in \partial\Omega$ 处存在闸函数，$f(x)$ 在 $x = \eta$ 处连续，则

$$\lim_{\substack{x\in\Omega \\ x\to\eta}} w_f(x) = f(\eta) \quad ㉖$$

证明 由引理 10，只要证明

$$\limsup_{\substack{x\in\Omega \\ x\to\eta}} w_f(x) \leqslant f(\eta) \quad ㉗$$

我们在 Ω 内对任意 $u \in \sigma_{-f}(\overline{\Omega})$，考虑函数

$$-w_{-f}(x) = -\sup u(x)$$

令 $u = -U$，则

$$-w_{-f}(x) = \inf U(x) \quad ㉘$$

这里 $U(x)$ 满足

$$-U \in C^0(\overline{\Omega}) \cap \sigma(\Omega),\ -U \leqslant -f \text{ on } \partial\Omega \quad ㉙$$

对任意 $u \in \sigma_f(\overline{\Omega})$ 及 U 满足式 ㉙，有

$$u - U \leqslant 0 \text{ on } \partial\Omega$$

于是由引理 2，在 Ω 内也有 $u - U \leqslant 0$.

再由式 ⑰ 与式 ㉘ 知，对任意 $x \in \Omega$，有

$$w_f(x) \leqslant -w_{-f}(x)$$

将引理 ⑩ 用于 $w_{-f}(x)$，得

$$\limsup_{\substack{x\in\Omega \\ x\to\eta}} w_f(x) \leqslant \limsup_{\substack{x\in\Omega \\ x\to\eta}}(-w_{-f}(x)) = -\liminf_{\substack{x\in\Omega \\ x\to\eta}} w_{-f}(x) \leqslant f(\eta)$$

即式 ㉗ 得证.

引理 11 说明，当我们在 $\partial\Omega$ 上定义 $w_f = f$ 时，$w_f \in C^0(\overline{\Omega})$. 这样一来，我们就证明了下列结论.

定理 1 设 Ω 具有所述闸的要求，则对任意连续有界函数 f，拉普拉斯方程迪利克雷问题存在解 $w \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.

注 对于一大类区域 Ω，闸的要求是能够被验证的. 例如，我们取 Ω 为严格凸的开集，即通过 $\partial\Omega$ 上每一点 η 可以作一个超平面 π_η，它与 $\overline{\Omega}$ 只有一个公共点 η. 这时可取 $Q_\eta(x)$ 为一适当的线性函数，它在 π_η 上恒为 0，在 $\overline{\Omega}$ 上除去 η 外恒为负.

四、拉普拉斯方程的定性讨论

已经知道，解析函数

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

的实部 $u(x, y)$（或虚部 $v(x, y)$），一定是二维拉普拉斯方程的解，即

$$\Delta u(x, y) = 0 \quad ㉛$$

称为二维调和函数. 另外，还可以证明：在解析函数的解析区域内，任意一点 a

的函数值，一定等于以该点为圆心的圆周上各点函数值的平均值

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\oint_{|z-a|=R} f(z)\mathrm{d}\theta \quad ⑪$$

如果进一步比较等式两端的实部和虚部，当然就看出，均值定理对解析函数的实部（或虚部）单独也成立，即

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi R}\oint_C u(x, y)\mathrm{d}l \quad ⑫$$

$$C:(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

由此，还可以推断出，只要 $u(x, y) \neq$ 常数，$u(x, y)$ 的最大值和最小值，一定只能出现在圆周上．用反证法就可以证明这个结论（称为极值原理）．它可以看成是最大模原理在 $u(x, y)$ 上的具体表现．这样，均值定理和极值原理就是二维调和函数的最基本特性．

也可以建立三维调和函数的概念．如果在区域 V 内函数的二阶偏导数存在，且满足三维拉普拉斯方程，则称该函数为 V 内的三维调和函数．

可以证明，均值定理对于三维调和函数也仍然成立，因此，极值原理也仍然成立．

作为三维调和函数的具体实例，我们讨论三维拉普拉斯方程（在直角坐标系中）的多项式解．二维调和函数可以看成是它们的特殊情形．

因为拉普拉斯方程中，对各自变量的偏导数阶数相同，所以，这样的多项式独立解一定是自变量的齐次函数．容易看出，常数（0 次齐次式）和一次函数（一次齐次式）x, y, z 就是这样的独立解．对于二次函数，独立解有五个，可以取为

$$2z^2 - x^2 - y^2, xz, yz, xy, x^2 - y^2$$

三次函数的独立解有七个，可取为

$$(4z^2 - x^2 - y^2)x, (4z^2 - x^2 - y^2)y, (2z^2 - 3x^2 - 3y^2)z$$

$$xyz, (x^2 - y^2)z, (y^2 - 3x^2)y, (x^2 - 3y^2)x$$

更一般地，l 次函数的独立解有 $2l + 1$ 个．

第十三回　调和性　拉氏方程可判断
黎曼面　局部调和难成片

一、拉普拉斯方程、调和函数的等价定义

对于具有二阶连续偏导数的实值函数 u,用拉普拉斯方程判断其调和性仍是可行的.由于黎曼曲面的相邻关系是解析的,因此在不同的参数下,拉普拉斯算子满足关系

$$\Delta_{z_1} u = 4\frac{\partial^2 u}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} = 4\frac{\partial z}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}_1}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} =$$

$$4\left|\frac{\partial z}{\partial z_1}\right|^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = 4\left|\frac{\partial z}{\partial z_1}\right|^2 \Delta_z u$$

所以,在不同局部参数下,$\Delta u = 0$(或 > 0,或 < 0)是不变的.

定义1　设 D 是黎曼曲面 R 的子区域.若 $u(z)$ 是定义在 D 中具有二阶连续偏导数且满足拉普拉斯方程 $\Delta u(z) = 0$ 的函数,则称

$$^*\mathrm{d}u := -\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y$$

为微分

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y$$

的共轭微分.而

$$\mathrm{d}u + \mathrm{i}^*\mathrm{d}u = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}z$$

称为解析微分,尽管它未必是某个解析函数的微分.

注　当积分沿着给定的分段光滑的弧 α 进行时,为方便起见,常用 $\pm\frac{\partial u}{\partial v}\mathrm{d}s$ 代替 $^*\mathrm{d}u$,其中 v 为 α 上的法线方向.若积分沿着区域 D 的分段光滑的边界 ∂D 进行时,则

$$^*\mathrm{d}u = -\frac{\partial u}{\partial v}\mathrm{d}s$$

其中,v 为 ∂D 上关于区域 D 的内法向.

现在设 $\Delta u(z) = 0$.如果将 u 限制在参数圆 U 中,定义

$$f(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y} \qquad ①$$

则 $f(z)$ 必在 U 中解析. 事实上, 若令 $\tilde{u}=\frac{\partial u}{\partial x},\tilde{v}=\frac{\partial u}{\partial y}$, 则它们必满足柯西 - 黎曼方程. 又由 ① 可得

$$f\mathrm{d}z=\mathrm{d}u+\mathrm{i}^*\mathrm{d}u \qquad ②$$

据柯西定理, $f\mathrm{d}z$ 沿 U 中任一同调于零的任一闭曲线 γ 积分为 0. 又 $\mathrm{d}u$ 是正合微分, 故沿 U 中任一同调于零的任一闭曲线 γ 的积分也为 0. 从而由 ② 可得

$$\int_\gamma {}^*\mathrm{d}u=\int_\gamma -\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y=0 \qquad ③$$

虽然上面 $f(z)$ 定义只限制在 U 中, 但 $f\mathrm{d}z$ 却在整个 D 中有意义. 因而式 ③ 对于 D 中任一同调于 0 的闭曲线 γ 都成立. 于是对单连通区域 $D'\subset D$, 函数

$$v(z):=\int_{z_0}^{z}{}^*\mathrm{d}u=\int_{z_0}^{z}-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y\quad ,z_0\in D'$$

在 D' 中是单值函数. 容易验证 $\Delta v(z)=0$ 且函数

$$g(z)=u(z)+\mathrm{i}v(z)$$

必为 D' 上的单值解析函数, 从而满足平均值定理, 即对任意参数圆 $U':=O(z',\rho')\subset D'$, 对任意实数 $\rho\in(0,\rho')$ 有

$$g(z')=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(z'+\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta$$

从而有

$$u(z')=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z'+\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta$$

由此可见 $u(z)$ 在 D' 内是调和的. 再由 D' 的任意性可知 $u(z)$ 是 D 上的调和函数.

根据上面的证明, 有下面定理.

定理 1 具有二阶连续偏导数的实值函数 u 为调和函数的充分必要条件是

$$\Delta u:=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

二、共轭调和函数

定义 2 设 D 是黎曼曲面 R 的子区域. 若 $u(z)$ 是 D 上的调和函数, 则函数

$$v(z):=\int_{z_0}^{z}-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y=\int_{z_0}^{z}{}^*\mathrm{d}u$$

称为 $u(z)$ 的共轭调和函数, 记为 $u^*(z)$, 其中积分是沿连接 z_0 和 z 的分断光滑的弧求积.

共轭调和函数是多值的, 且在相差一常数的意义下是唯一的. 另外还有

$$\mathrm{d}(u^*)={}^*\mathrm{d}u$$

虽然解析函数的实数和虚部都是互为共轭的调和函数, 但两个调和函数

$u(z)$、$v(z)$ 的线性组合 $u(z)+\mathrm{i}v(z)$ 未必是解析函数.

根据上一段的证明,任意调和函数在其定义域中每一点的足够小的单连通邻域内必有(单值)共轭调和函数,但一般说来,这些局部共轭调和函数未必能连合成整个区域 D(或曲面 R)上的(单值)共轭调和函数.不过,如果 D(或曲面 R)是单连通的,那么,根据单值性定理,这种(单值)共轭调和函数是存在的.更令人感兴趣的是下面的关于解析函数的单值性定理.

定理 2 设 z_0 是单连通区域 G 之一点,$f_0(z)$ 是在 z_0 的一个邻域内定义的解析函数.若 $f_0(z)$ 可以沿从 z_0 引出且全部位于 G 中的折线进行解析延拓,则所有可能的这种延拓之全体可用来定义一个在整个 G 中正则的单值解析函数.

哈纳克(Harnack, Carl Gustav Alex, 1851—1888),德国数学家.

三、哈纳克原理

设 $u(z)$ 是圆盘 $U_\rho:=O(0,\rho)$ 内的调和函数,而在闭圆盘 $\overline{U}_\rho$ 连续.据不等式

$$\frac{\rho-r}{\rho+r}\leqslant\frac{\rho^2-r^2}{|\rho e^{i\varphi}-re^{i\theta}|^2}\leqslant\frac{\rho+r}{\rho-r} \tag{④}$$

若在 U_ρ 内 $u(z)\geqslant 0$,则

$$u(z)\leqslant\frac{\rho+r}{\rho-r}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\rho e^{i\theta})\mathrm{d}\theta\leqslant\frac{\rho+r}{\rho-r}u(0),\ z=re^{i\theta} \tag{⑤}$$

同理易估计另一方向不等式.由此得哈纳克不等式

$$\frac{\rho-|z|}{\rho+|z|}u(0)\leqslant u(z)\leqslant\frac{\rho+|z|}{\rho-|z|}u(0) \tag{⑥}$$

哈纳克不等式可以推广为下面形式.

定理 3 设 $\overline{G}$ 是黎曼曲面 R 的一紧致子区域,对任意正数 ρ,记 $G(\rho)=\bigcup_{z\in\overline{G}}O(z,\rho)$,存在一常数 $K_\rho(G)$ 使得对任意定义在 $\overline{G(\rho)}$ 的恒取正值的调和函数 $u(z)$,对任意两点 $z,z_0\in\overline{G}$ 有

$$u(z)\leqslant K_\rho(G)u(z_0) \tag{⑦}$$

证明 由于 $\{O(z,\rho/2)\mid z\in\overline{G}\}$ 是 $\overline{G}$ 的一个开覆盖,则必有一个有限子覆盖,记其为 $\mathscr{A}$.不妨设该子覆盖族由 $m(\rho)$ 个圆盘组成并含有 $O(z_0,\rho/2)$.记

$$K_\rho(G)=(3\rho)^{2m(\rho)}$$

现在,用一曲线 L 连接 z、z_0,使得 $L\subset\overline{G}$.于是存在 $\mathscr{A}$ 的某个子族 $\{O(z_j,\rho/2)\}_{j=0}^{J}$ 覆盖 L,其中 $z\in O(z_J,\rho/2)$,而每个 $O(z_j,\rho/2)$ 都与 $O(z_{j-1},\rho/2)$、$O(z_{j+1},\rho/2)$ 相交,其中 $j=1,2,\cdots,J-1$.根据哈纳克不等式即可得

$$u(z)\leqslant\frac{\rho+r}{\rho-r}u(z_J),\ u(z_j)\leqslant\left(\frac{\rho+r}{\rho-r}\right)^2u(z_{j-1}),\ r\leqslant\rho/2$$

其中 $j = 1,\cdots,J$. 由此可得 $u(z) \leqslant K_{\rho}(G)u(z_0)$.

推论 设 $\overline{G}$ 是黎曼曲面 R 的一紧致子区域，而 $u(z)$ 是定义于 $\overline{G}$ 的调和函数. 若在 $\overline{G}$ 上恒有 $u(z) > 0$. 则存在一仅与区域 G 有关的常数 $K(G)$ 使得

$$u(z) \leqslant K(G)u(z_0), \forall z, z_0 \in \overline{G} \tag{8}$$

由哈纳克不等式可导出一重要定理，即哈纳克原理.

定理 4 设 $u_n(z)$ 是定义在黎曼曲面 R 的子区域 D_n 内的调和函数. 记 $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. 如果对任一 $z \in D$，存在邻域 U_z，使得除有限个区域外所有的 D_n 都包含 U_z；而且在 U_z 中，当 n 足够大时有 $u_n(z) \leqslant u_{n+1}(z)$，那么或者 $u_n(z)$ 在 D 内紧致一致收敛于 $+\infty$，或者在 D 内紧致一致收敛于 D 内的一个调和函数 $u(z)$.

证明 设 $z_0 \in D$ 使 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(z_0) = +\infty$. 考虑 z_0 满足定理条件的参数圆 $V_0: = O(z_0, r)$，则有自然数 m，使当 $n \geqslant m$ 时 $u_n(z)$ 在 V_0 内调和且 $u_n(z) \leqslant u_{n+1}(z)$. 若在式 ③ 的左边不等式内以 $u_n - u_m$ 代替，则可得 u_n 在圆盘 $V'_0: = O(z_0, r/2)$ 内一致趋于 $+\infty$.

另一方面，若有 $z_1 \in D$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(z_1) < +\infty$，应用式 ③ 右边不等式同样可证 $u_n(z)$ 在 $V'_1: = O(z_1, r_1/2)$ 上有界. 记

$$D_1 = \{z \in D \mid \lim_{n\to\infty} u_n(z) = +\infty\}$$

$$D_2 = \{z \in D \mid \lim_{n\to\infty} u_n(z) < +\infty\}$$

据上面证明，D_1 和 D_2 都是开集，且 $D = D_1 \cup D_2$. 由于 D 是连通集，故 D_1 和 D_2 中必有一为空集.

若至少有一点 $z' \in D$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(z') = +\infty$，那么 $D_1 \neq \varnothing$，由此即得 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(z) = +\infty$. 其紧致一致收敛性可由海涅 – 波莱尔有限覆盖定理来证明.

另一方面，若 $u_n(z)$ 的极限处处有限，采用上述对应情形的记号，对圆盘 V'_1 及 $n \geqslant m$ 必有 $u_n(z) - u_m(z) \leqslant 3(u_n(z_1) - u_m(z_1))$. 这说明 $u_n(z)$ 在一点收敛必导致在某一邻域内一致收敛. 应用海涅 – 波莱尔有限覆盖定理，可得 $u_n(z)$ 在 D 上紧致一致收敛. 至于极限函数 $u(z): = \lim\limits_{n\to\infty} u_n(z)$ 的调和性可从 $u(z)$ 能以泊松积分表示，并且积分核是调和函数得出.

四、哈纳克原理的一般形式

定理 5 设黎曼曲面 R 上有一调和函数族 $\mathscr{U}$ 满足条件：对任意 $u_1, u_2 \in \mathscr{U}$ 存在 $u \in \mathscr{U}$ 使 $u \geqslant \max(u_1, u_2)$，则函数

$$U(z): = \sup_{u\in\mathscr{U}} u(z)$$

或者为调和，或者恒等于 $+\infty$.

证明　对任一点 $z_0 \in R$，存在一函数列 $u_n \in \mathscr{U}$ 使

$$\lim_{n\to\infty} u_n(z_0) = U(z_0)$$

取 $v_1 = u_1$，由条件可取 $v_2 \in \mathscr{U}$ 使 $v_2 \geqslant \max(u_2, v_1)$. 归纳假设 v_{n-1} 已取好，则取 $v_n \in \mathscr{U}$ 使 $v_n \geqslant \max(u_n, v_{n-1})$. 由此得一 $\mathscr{U}$ 中非减函数列 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$，同样有

$$\lim_{n\to\infty} v_n(z_0) = U(z_0)$$

根据哈纳克原理

$$U_0(z) := \lim_{n\to\infty} v_n(z)$$

或为调和，或恒为 $+\infty$，且满足条件 $U_0(z_0) = U(z_0)$.

现在，对另一点 $z'_0 \in R$ 必有一函数列 $u'_n \in \mathscr{U}$ 使

$$\lim_{n\to\infty} u'_n(z'_0) = U(z'_0)$$

于是，类似于前面推理，根据条件 $v'_n \geqslant \max(u'_n, v_n, v_{n-1})$，取一 $\mathscr{U}$ 中非减函数列 $\{v'_n\}_{n=1}^{\infty}$，其极限函数

$$U'_0(z) := \lim_{n\to\infty} v'_n(z)$$

必满足下列两条件：

(1) $U'_0(z) \geqslant U_0(z)$;

(2) $U'_0(z_0) = U_0(z_0)$, $U'_0(z'_0) = U(z'_0)$.

如果 U_0 和 U'_0 都是有限的，则 $U_0 - U'_0$ 在 z_0 有极大值是 0. 据最大值原理，必有 $U_0 = U'_0$. 又由于 $U(z'_0) = U_0(z'_0)$，故 z_0 的任意性蕴含 $U(z) \equiv U_0(z)$ 的调和性.

若 $U_0(z) \equiv +\infty$，则 $U'_0(z) \equiv +\infty$. 从而 $U(z'_0) = U'_0(z'_0) = +\infty$. 由 z'_0 的任意性得 $U(z) \equiv +\infty$.

五、迪利克雷原理

引理 1　设 $w(z)$ 是闭圆环 $\Delta := \{z \mid 0 < \rho \leqslant |z| \leqslant 1\}$ 上的连续函数，且在开圆环 $\Delta^o := \{z \mid \rho < |z| < 1\}$ 上具有分片连续的一阶偏导数. 又设 $u(z)$ 是 Δ^o 内的调和函数，且在 Δ 上是连续的. 若在 Δ 边界 $\partial\Delta := \Delta \setminus \Delta^o$ 上 $u = w$，且 $D[w] := D_\Delta[w] < \infty$，则

$$D[u] \leqslant D[w]$$

如果 w 在 Δ^o 上不是调和的，那么 $D[u] < D[w]$.

证明　设在 Δ^o 内

$$u(z) = u(re^{i\theta}) = A\log r + a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k r^k + a_{-k}r^{-k})\cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty}(b_k r^k + b_{-k}r^{-k})\sin k\theta \qquad ⑨$$

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2} = 0$$

其中

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})d\theta = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w(e^{i\theta})d\theta \\ a_k + a_{-k} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})\cos k\theta d\theta = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} w(e^{i\theta})\cos k\theta d\theta \\ b_k + b_{-k} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})\sin k\theta d\theta = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} w(e^{i\theta})\sin k\theta d\theta \end{cases} \quad ⑩$$

$$\begin{cases} A\log\rho + a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\theta})d\theta = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w(\rho e^{i\theta})d\theta \\ a_k\rho^k + a_{-k}\rho^{-k} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\theta})\cos k\theta d\theta = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} w(\rho e^{i\theta})\cos k\theta d\theta \\ b_k\rho^k + b_{-k}\rho^{-k} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\theta})\sin k\theta d\theta = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} w(\rho e^{i\theta})\sin k\theta d\theta \end{cases} \quad ⑪$$

$$u_n(z) = A\log r + a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k r^k + a_{-k}r^{-k})\cos k\theta + \sum_{k=1}^{n}(b_k r^k + b_{-k}r^{-k})\sin k\theta \quad ⑫$$

则 $\Delta u_n = 0$，且

$$\frac{\partial u_n}{\partial r} = \frac{A}{r} + \sum_{k=1}^{n} k(a_k r^{k-1} - a_{-k}r^{-k-1})\cos k\theta + \sum_{k=1}^{n} k(b_k r^{k-1} + b_{-k}r^{-k-1})\sin k\theta$$

所以

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u_n(e^{i\theta})\left(\frac{\partial u_n}{\partial r}\right)_{r=1} d\theta = 2a_0A + \sum_{k=1}^{n} k(a_k^2 - a_{-k}^2) + \sum_{k=1}^{n} k(b_k^2 - b_{-k}^2)$$

且根据 ⑩ 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} w(e^{i\theta})\left(\frac{\partial u_n}{\partial r}\right)_{r=1} d\theta = {} & \frac{A}{\pi}\int_0^{2\pi} w(e^{i\theta})d\theta + \\ & \sum_{k=1}^{n} k(a_k - a_{-k})\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} w(e^{i\theta})\cos k\theta d\theta + \\ & \sum_{k=1}^{n} k(b_k - b_{-k})\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} w(e^{i\theta})\sin k\theta d\theta = \\ & 2a_0A + \sum_{k=1}^{n} k(a_k^2 - a_{-k}^2) + \sum_{k=1}^{n} k(b_k^2 - b_{-k}^2) \end{aligned}$$

因此
$$\int_0^{2\pi}(w(e^{i\theta}) - u_n(e^{i\theta}))\left(\frac{\partial u_n}{\partial r}\right)_{r=1} d\theta = 0$$

类似可得

$$\int_0^{2\pi}(w(\rho e^{i\theta}) - u_n(\rho e^{i\theta}))\left(\frac{\partial u_n}{\partial r}\right)_{r=\rho} d\theta = 0$$

根据格林公式有

$$D_\Delta[w - u_n, u_n] = 0$$

从而 $$D_\Delta[w] = D_\Delta[u_n] + D_\Delta[w - u_n] \geqslant D_\Delta[u_n] \geqslant D_{\Delta'}[u_n]$$

其中 Δ' 是包含在 Δ 内的圆环域. 先令 $u \to \infty$, 然后令 $\Delta' \to \Delta$ 则得

$$D[u] \leqslant D[w] \tag{13}$$

下面证明若 $D[u] = D[w]$, 则 $u \equiv w$.

设 $v(z) = w(z) + \lambda(u(z) - w(z))$, 它显然满足关于 $w(z)$ 的条件, 则

$$D[u] \leqslant D[v] = D[w] + 2\lambda D[w, u - w] + \lambda^2 D[u - w]$$

因此, 若 $D[u] = D[w]$, 则

$$2\lambda D[w, u - w] + \lambda^2 D[u - w] \geqslant 0$$

由于 λ 的任意性可得 $D[w, u - w] = 0$, 故等式 $D[u] = D[w] + D[u - w]$ 成立. 因此

$D[u - w] = 0$, 即得 $u - w \equiv const$. 但在 Δ 边界 $\partial\Delta := \Delta \setminus \Delta^o$ 上有 $u - w = 0$, 故 $u - w \equiv 0$, 即 $u \equiv w$. 因此, 如果 w 在 Δ^o 上不是调和的, 那么 $D[u] < D[w]$.

类似地可证.

引理 2 设 $w(z)$ 是闭圆盘 $\overline{O(0,1)}$ 上的连续函数, 且在开圆盘 $O(0,1)$ 上的具有分片连续的一阶偏导数. 又设 $u(z)$ 是开圆盘 $O(0,1)$ 内的调和函数, 且在闭圆盘 $\overline{O(0,1)}$ 上是连续的. 若在圆周 $\{z \mid |z| = 1\}$ 上 $u = w$, 且 $D[w] < \infty$, 则

$$D[u] \leqslant D[w]$$

如果 w 在 $O(0,1)$ 内不是调和的, 那么 $D[u] < D[w]$.

引理 3 设 $\{u_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ 是闭黎曼的区域 D 内的调和函数. 如果存在一正数 K 和点 $z_0 \in D$ 使得对任意自然数 n, $D[u_n] \leqslant K$ 且 $u_n(z_0) = 0$, 那么 $\{u_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ 是一正规族.

证明 设 $\Delta := \overline{O(z_0, \rho)}$ 是包含在 D 内的闭圆盘. 又设 $v_n(z)$ 是 $u_n(z)$ 在 Δ 内的共轭调和函数. 将 $u_n(z)$ 规范化, 使得 $v_n(z_0) = 0$, 并置 $f_n(z) = u_n(z) + \mathrm{i}v_n(z)$. 则 $f_n(z)$ 在 Δ 内为正则且 $f_n(z_0) = 0$.

根据引理 1, $|f'_n(z)|^2$ 是下调和的, 于是对于 $\Delta_1 := \overline{O(z_0, \rho_1)}(\rho_1 < \rho)$ 内的任一点 z 有

$$|f'_n(z)|^2 \leqslant \frac{1}{\pi(\rho - \rho_1)^2}\int_0^{\rho-\rho_1}\int_0^{2\pi} |f'_n(z + re^{i\theta})|^2 r\,dr\,d\theta \leqslant$$

$$\frac{D[u_n]}{\pi(\rho - \rho_1)^2} \leqslant \frac{K}{\pi(\rho - \rho_1)^2}$$

$$|f'_n(z)|^2 \leqslant \sqrt{\frac{K}{\pi}} \cdot \frac{1}{\rho - \rho_1}, \forall z \in \Delta_1 \tag{14}$$

所以对任意 $z \in \Delta_1$ 有

$$|u_n(z)| \leqslant |f_n(z)| \leqslant \int_0^z |f'_n(z_0 + re^{i\theta})| \, \mathrm{d}r \leqslant \sqrt{\frac{K}{\pi}} \cdot \frac{\rho_1}{\rho - \rho_1} \tag{15}$$

于是对于任意两点 $z_1, z_2 \in \Delta_1$ 有

$$|u_n(z_1) - u_n(z_2)| \leqslant |f_n(z_1) - f_n(z_2)| \leqslant$$

$$\int_{z_1}^{z_2} |f'_n(z)| \, |\mathrm{d}z| \leqslant \sqrt{\frac{K}{\pi}} \cdot \frac{|z_2 - z_1|}{\rho - \rho_1} \tag{16}$$

因此 $\{u_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ 必为一致有界且在 Δ_1 上是等度连续的，从而在 D 的任意一个紧子域 D_1 上亦如此. 根据阿尔泽拉定理，$\{u_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个正规族.

约当(Jordan, Camille, 1838—1922)，法国数学家，生于里昂.

定理 6(迪利克雷原理)　设闭黎曼曲面 R 覆盖在复球面 $K := \{z \mid |z| \leqslant \infty\}$ 上. 设 D 是 R 的一个子区域，其关于 R 的相对边界 Γ 由有限条互不相交的约当曲线组成：$\Gamma = \bigcup_{i=1}^{k} \Gamma_i$. 又设 D 上存在这样一个函数 $w_0(z)$，它在 $\overline{D}$ 上连续、具有分片连续一阶偏导数且其迪利克雷积分 $D[w_0]$ 有限. 将全体与 $w_0(z)$ 具有相同性质且在 Γ 上与 w_0 相等的函数 $w(z)$ 组成之族记为 $\mathscr{F}$. 若置

$$d = \inf_{w \in \mathscr{F}} D[w]$$

则存在一调和函数 $u(z) \in \mathscr{F}$ 使得 $D[u] = d$.

证明　根据 d 的定义，可在 $\mathscr{F}$ 中选取一个函数列 $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得 $D[w_n] \to d\ (n \to \infty)$. 设 Γ'_i 是 D 中的位于 Γ_i 之足够小邻域内的一解析约当曲线，它与 Γ_i 所围区域是一个二连通区域 Δ_i，其中 Δ_i 与 $\Delta_j\ (i \neq j)$ 不交.

设 $u_n^{(i)}(z)$ 是 Δ_i 的调和函数，使在 $\Gamma'_i \cup \Gamma_i$ 上 $u_n^{(i)}(z) = w_n(z)$. 现在将 Δ_i 共形映上 ζ - 平面的圆环域

$$V_i := \{\zeta \mid 0 < \rho_i < |\zeta| < 1\}$$

使得 Γ'_i 和 Γ_i 分别对应 $\{\zeta \mid |\zeta| = \rho_i\}$ 和 $\{\zeta \mid |\zeta| = 1\}$. 将 $u_n^{(i)}(z)$ 和 $w_n(z)$ 视为 V_i 上关于变量 ζ 的函数，由于迪利克雷积分是共形不变的，则由引理 2 可得 $D_{\Delta_i}[u_n^{(i)}] \leqslant D_{\Delta_i}[w_n]$.

因此，若在 D 上定义 $\tilde{w}_n(z)$ 使得在 Δ_i 上 $\tilde{w}_n = u_n^{(i)}\ (i = 1, 2, \cdots, k)$，而在 $D \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \Delta_i$ 上 $\tilde{w}_n(z) = w_n(z)$，则 $\tilde{w}_n \in \mathscr{F}$ 且 $D[\tilde{w}_n] \leqslant D[w_k]$，所以 $D[\tilde{w}_n] \to d\ (n \to \infty)$. 由此可假设

$$w_n(z) \text{ 在 } \Delta_i\ (i = 1, 2, \cdots, k) \text{ 内调和} \tag{17}$$

如果在 V_i 上置 $w_n(z) = v_n(\zeta)$，由于 $v_n(\zeta) - v_1(\zeta)$ 在 V_i 内调和且在 $\{\zeta \mid |\zeta| = 1\}$ 取值 0，则在 $V_i^* := \{\zeta \mid \rho_i < |\zeta| < 1/\rho_i\}$ 内调和且

$$D_{V_i^*}[v_n - v_1] = 2D_{V_i}[v_n - v_1] = 2D_{\Delta_i}[w_n - w_1] \leqslant$$

$$2\left(\sqrt{D_{\Delta_i}[w_n]}+\sqrt{D_{\Delta_i}[w_1]}\right)^2$$

所以 $D_{V_i^*}[v_n - v_1]$ 关于 $n = 1,2,\cdots$ 有界. 又因为在 $\{\zeta \mid |\zeta| = 1\}$ 上 $v_n - v_1 = 0$,应用引理4,可以从 $\{v_n - v_1\}$ 选一子列,仍用原记号,使其在 V_i^* 上一致收敛,从而 v_n 在 V_i^* 上也一致收敛. 由此可见存在 $w(z)$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} w_n(z) = w(z) \text{ 在 } \Delta_i \text{ 是一致的}, i = 1,2,\cdots,k \qquad ⑱$$

于是 $w(z)$ 在 $\bigcup_{i=1}^{k}\Delta_i$ 内调和,在 Γ 上连续,且在 Γ 上 $w = w_1 = w_0$.

设 γ_i 是Δ_i 内分离Γ'_i 和Γ_i 的解析约当曲线. 又设 Ω_0 是以 $\bigcup_{i=1}^{k}\gamma_i$ 为边界的且包含 $\bigcup_{i=1}^{k}\Gamma'_i$ 的 D 的连通子区域. 置 $\Omega = D \setminus \Omega_0$,则由 ⑱ 得

$$D_{\Omega}[w] = \lim_{n\to\infty} D_{\Omega}[w_n] \qquad ⑲$$

设 $\varphi_n(z)$ 是 Ω_0 内的调和函数,使得在 $\bigcup_{i=1}^{k}\gamma_i$ 上 $\varphi_n = w_n$. 根据假设 ⑰,$w_n(z)$ 在 γ_i 调和. 由于在 γ_i 上 $\varphi_n - w_n = 0$,故 $\varphi_n - w_n$ 在γ_i 的某邻域U_i 内调和,从而 φ_n 亦在 U_i 内调和. 所以$\partial\varphi_n/\partial v$ 在γ_i 上连续,其中 v 表示关于Ω_0 的内法向. 根据格林公式

$$D_{\Omega_0}[w_n - \varphi_n, \varphi_n] = -\sum_{i=1}^{k}\int_{\gamma_i}(w_n - \varphi_n)\frac{\partial\varphi_n}{\partial v}\mathrm{d}s = 0$$

从而

$$D_{\Omega_0}[w_n] = D_{\Omega_0}[\varphi_n] + D_{\Omega_0}[w_n - \varphi_n]$$

故

$$D_{\Omega_0}[\varphi_n] \leqslant D_{\Omega_0}[w_n] \qquad ⑳$$

由 ⑱ 知 $w_n(z)$ 在 U_i 内是一致收敛的. 由 ⑳ 知 $D_{U_i}[\varphi_n - w_n]$ 关于 $n = 1,2,\cdots$ 是有界的,而且在 γ_i 上有 $\varphi_n - w_n = 0$. 因此,在 U_i 内 $\varphi_n = w_n$,从而 φ_n 是一致收敛的. 置

$$\varphi(z) = \lim_{n\to\infty}\varphi_n(z)$$

则 $\varphi(z)$ 在 $\Omega_0 \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k}U_i\right)$ 内调和,且 $D_{\Omega_0}[\varphi] = \lim_{n\to\infty}D_{\Omega_0}[\varphi_n]$. 故根据 ⑳ 有

$$D_{\Omega_0}[\varphi] \leqslant \varliminf_{n\to\infty} D_{\Omega_0}[w_n] \qquad ㉑$$

现在,在 D 内定义函数$u(z)$ 如下:在 Ω_0 内定义 $u = \varphi$,在 $D \setminus \Omega_0$ 上定义 $u = w$. 那么根据 ⑲ 和 ㉑ 有

$$D[u] \leqslant \lim_{n\to\infty} D[w_n] = d$$

由于 $u \in \mathscr{F}$,则

$$D[u] = d \qquad ㉒$$

显然 u 在$D \setminus \bigcup_{i=1}^{k}\gamma_i$ 内调和. 下面证明 u 在 $\bigcup_{i=1}^{k}\gamma_i$ 调和. 为此假设 u 在某点

$$\frac{\partial^2\mathscr{U}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathscr{U}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mathscr{U}}{\partial z^2}=0$$

$z_0 \in \gamma_i$ 处不调和. 设 Δ 是以 z_0 为圆心的 D 内的足够小的圆盘, 而 $v(z)$ 是以 $u(z)$ 为边界值的 Δ 的迪利克雷解. 则根据引理 3, $D_\Delta[v] \leqslant D_\Delta[u]$. 于是若在 D 上定义函数 $\tilde{u}$ 如下: 在 Δ 内置 $\tilde{u} = v$, 在 $D \setminus \Delta$ 上置 $\tilde{u} = u$, 则 $\tilde{u} \in \mathscr{F}$, 且 $D[\tilde{u}] < D[u] = d$. 矛盾. 从而 u 在 $\bigcup_{i=1}^{k} \gamma_i$ 调和, 即得知在 D 内调和.

注 若 $w \in \mathscr{F}$ 且 $D[w] = d$, 则根据引理 3, w 在 D 内调和, 因此 $w \equiv u$. 从而 w 是唯一的.

应用篇

第三章

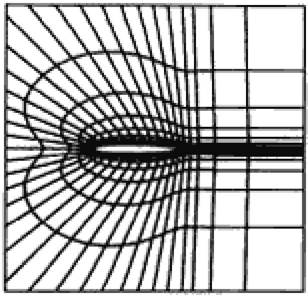
第十四回　PDE　　数学模型的基础[①]
造飞机　机翼设计全靠它

偏微分方程(PDE)是众多描述物理、化学和生物现象的数学模型的基础,而且其最新的应用已经扩展到经济、金融预测、图像处理及其他领域.要通过相应的 PDE 模型研究这些现象,通常我们需要结合一些对简单特例的分析,采用数值方法求得这些方程的近似解;而在一些最新的应用中数值模型几乎已经是独当一面了.

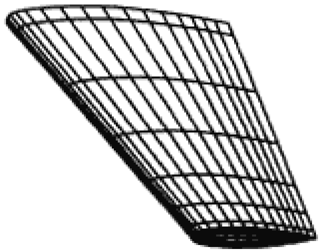
我们来考虑如图 1 所示的机翼设计问题.当然,还有许多可供我们选择的好例子,例如天气预报、污染物的扩散、喷气发动机或内燃机的设计、核反应堆的安全性、石油的勘探与开采等等.

在定常(Steady)飞行状态中,机翼两个重要的设计指标是由空气流过机翼而产生的升力和阻力.我们为一个设计方案计算这些量时,根据边界层(Boundary layer)理论,在很好近似的意义下,在靠近机翼表面有一个很薄的边界层,层内粘力起着重要的作用,而在边界层之外,可以假设气流是无粘的(Inviscid).因此,假设机翼是局部平坦的,则机翼附近的气体流动可由以下模型方程描述,即

① 本回引自文献[59].



(a)一种典型的(无粘)环绕机翼截面的计算网格



(b) 机翼表面的相应网格

图1　计算网格

$$u\frac{\partial u}{\partial x}-v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(1-\rho)\frac{\partial p}{\partial x} \qquad ①$$

其中 u 是切空间坐标 x 方向的流动速度，y 是法向坐标，v 是粘性，ρ 是密度，p 是压力；我们在该方程中忽略了法向速度．这是一个典型的关于 u 的抛物型方程(Parabolic equation)，其中 $(1/\rho)\partial p/\partial x$ 作为外力项．

在机翼边界层之外，仅限于二维横截面(Cross section)上，我们可以假设气流是无粘的且其速度可以表示为 $(u_\infty+u,v)$，其中 u 和 v 与气流在无穷远处沿 x 方向的速度 u_∞ 相比是小量．我们通常还可以假设气流是无旋的(Irrotational)，因此有

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0 \qquad ②$$

假设气流是等熵的(Homentropic)，则结合质量和 x 方向动量的守恒律(Conservation laws)且仅保留一阶小量，我们就得到了简化的模型

$$(1-M_\infty^2)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad ③$$

其中 M_∞ 是无穷远处的马赫数(Mach number)，$M_\infty=u_\infty/a_\infty$，$a_\infty$ 是声速．

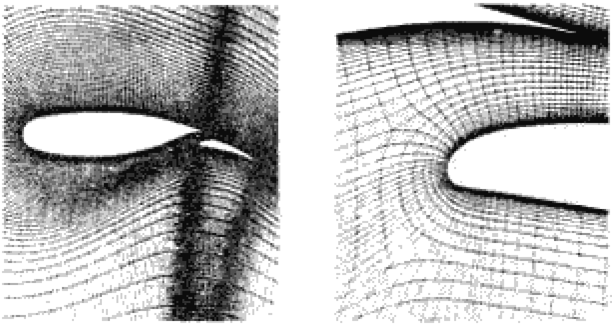
显然当气流是亚音速(Subsonic)时，即 $M_\infty<1$ 时，方程组②，③与柯西－黎曼方程等价，是椭圆型方程组(Elliptic equations)．而对于超音速流 $M_\infty>1$，该方程组等价于一维波动方程，为双曲型方程组(Hyperbolic equations)．我们也可以在③上作用 $\partial/\partial x$，在②上作用 $\partial/\partial y$ 并消去 v，从而得到与拉普拉斯方程或二阶波动方程(Wave equation)等价的方程组．

尽管本书的重点放在分别单独讨论某一类型的方程上，我们必须指出的是在许多实际问题中这些类型的方程会同时出现在一个方程组中．有着广泛应用的欧拉－泊松方程组就是这样一个例子：在空间变量为二维，时间为 t 时，该方程组是关于两个速度分量和前面所提到过的压力这3个变量的偏微分方程组；

若使用更紧凑的记号(例如用 ∂_t 代替 ∂/∂_t),则欧拉 - 泊松方程组可以表示为以下形式,即

$$\begin{cases}\partial_t u + u\partial_x u + v\partial_y u + \partial_x p = 0 \\ \partial_t v + u\partial_x v + v\partial_y v + \partial_y p = 0 \\ \partial_x^2 p + \partial_y^2 p = 0\end{cases} \qquad ④$$

回到前面机翼设计的例子,我们不妨提一下实际当中会出现的一些复杂情况.对于民用飞机,最主要的是考虑其在设计速度下定常飞行时的性能;然而,对于军用飞机,操控性也是很重要的,也就是说要考虑气流是非定常的,即方程包含时间变量的情况.这时,即便是亚音速流,相应于②,③的方程组也是双曲型的(一个时间变量和两个空间变量),该方程组与欧拉 - 泊松方程组④类似但更为复杂.同时还必须考虑更大的几何复杂度:特别是在计算机翼尖端和机翼与机体的结合部附近的气流时,必须考虑三维的机翼;而在着陆和起飞阶段,为在低速时提供更大的升力,飞机的襟翼会展开,这时机翼的横截面就会如图2所示.



(a)整体情况　　(b)计算 Navier-Stokes 方程时可能会用到的网格局部细节

图2　一种典型的复合型机翼(DRA, Farnborough 提供)

另外,我们一直假设流动是光滑的,但在实际中我们需要研究诸如激波、涡片、湍流及其相互间的作用.我们将要研究建立的方法可以应用于模拟所有这些现象,但其所涉及的内容远远超出了本书的范围.目前,工业界可以做到的事包括,近似求解绕整架飞机流动的非定常粘性流(Unsteady viscous flow)的平均雷诺数(Reynolds-averaged)Navier-Stokes 方程,如图3所示,进而,其终极目标是将这些对流体运动的预测能力融合到飞机整体设计的环节中去:我们希望通过设计飞机的形状使气流按给定的方式绕飞机运动,而不是仅仅满足于计算绕给定形状的飞机运动的气流.

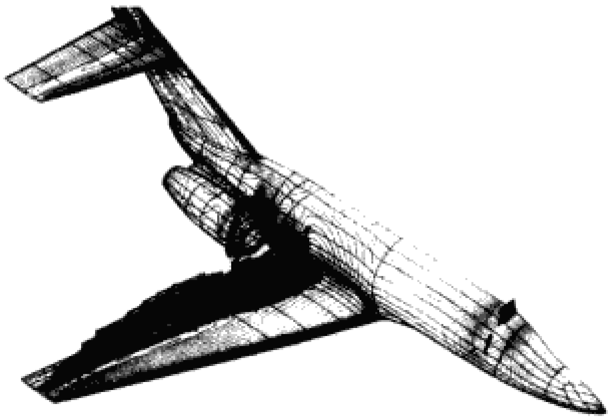


图 3　巡航条件下整架飞机的压力等高线和部分网格(British Aerospace 提供)

第十五回 造导弹 超音绕流气动力[①] 数学家 职业习惯是推广

数学家的职业习惯是:当一个特殊的命题被证明了之后,马上会想到将其推广.偏微分方程大师谷超豪教授的学生陈恕行教授,长期从事偏微分方程理论与应用的研究,并曾从事超音绕流气动力计算,为远程导弹的型号设计作出了重要贡献,以下是陈恕行教授对迪利克雷问题的高阶椭圆型方程的研究成果.

一、高阶椭圆型方程的定义

这里讨论高阶椭圆型方程的迪利克雷问题.设

$$L = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial_x^\alpha \quad ①$$

是定义在有界区域 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 上的偏微分算子,$a_\alpha(x)$ 为 $C^\infty(\overline{\Omega})$ 函数,L 的齐 m 阶部分

$$L_0 = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x) \partial_x^\alpha \quad ②$$

称为算子 L 的主部.将 ∂_x^α 替换成 $(i\xi)^\alpha$,可以分别得到 L 与 L_0 的象征,且 L_0 的象征称为 L 的主象征.除去一常数因子,这个主象征可写成

$$\sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x) \xi^\alpha \quad ③$$

定义 1 若算子 L 的主象征 ③ 满足

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha \neq 0, \forall \xi \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \quad ④$$

则称 L 在点 x 为椭圆型的.若对 Ω 上每一点 x,算子 L 都为椭圆型,则称 L 在 Ω 中为椭圆型的.又如果存在一个常数 $C > 0$,使得

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha \geqslant C \mid \xi \mid^m, \forall x \in \Omega, \xi \in \mathbf{R}^n \quad ⑤$$

则称 L 在 Ω 中为一致椭圆的.

引理 1 若 L 为具有实系数的椭圆算子,则 m 必为偶数.

证明 由于 $\sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x)(-\xi)^\alpha = (-1)^m \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$,所以要 $\sum a_\alpha(x) \xi^\alpha$ 与 $\sum a_\alpha(x)(-\xi)^\alpha$ 均大于零,必须有 $(-1)^m > 0$,从而 m 为偶数.证毕.

---

① 本回引自文献[61].

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2} = 0$$

以下讨论高阶椭圆型方程的边值问题，并设其主部具有实系数，这时 m 阶椭圆型方程的边值问题一般需在边界 $\partial\Omega$ 上给出 $\frac{m}{2}$ 个条件，其中最常见的是齐次迪利克雷问题，它的形式为

$$\begin{cases}\sum\limits_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\partial_x^\alpha u = f, \text{在 } \Omega \text{ 中} & ⑥\\ u = \partial_n u = \cdots = \partial_n^{\frac{m}{2}-1} u = 0, \text{在 } \partial\Omega \text{ 上} & ⑦\end{cases}$$

其中 ∂_n 为 $\partial\Omega$ 的外法向导数. 与二阶方程情形相似，解 u 在 $\partial\Omega$ 上应满足的边界条件可以用限制解 u 所在的空间来表示. 例如，对于 $f \in H^{-\frac{m}{2}}(\Omega)$，要求寻找 $u \in H_0^{\frac{m}{2}}(\Omega)$，使得

$$\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\partial_x^\alpha u = f$$

成立.

二、先验估计

与二阶椭圆型方程的情形相仿，我们将证明 m 阶椭圆型方程的各种先验估计式，它在证明高阶椭圆型方程边值问题的可解性与解的正则性中起着重要作用. 为以后运算的方便，我们将 ⑥ 写成它的等价形式，即

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|\leq\frac{m}{2}} \partial_x^\alpha(a_{\alpha\beta}(x)\partial_x^\beta u) = f \qquad ⑧$$

其中，$a_{\alpha\beta}(x)$ 可以用 $a_\alpha(x)$ 及其各阶导数表示，反之亦然. 又对于一致椭圆算子显然有

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|\leq\frac{m}{2}} a_{\alpha\beta}(x)\xi^\alpha\xi^\beta = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\xi^\alpha \geq C|\xi|^m \qquad ⑨$$

为以下讨论的需要，我们先证明一个引理.

引理 2　若 $u \in S(\mathbf{R}^n)$，$t_1 > s > t_2$，则对任意 $\varepsilon > 0$，有

$$\|u\|_s \leq \varepsilon\|u\|_{t_1} + \varepsilon^{-\frac{s-t_2}{t_1-s}}\|u\|_{t_2} \qquad ⑩$$

证明　由 H^s 范数的定义知，为使上式成立只须证明

$$(1+|\xi|^2)^s \leq \varepsilon(1+|\xi|^2)^{t_1} + \varepsilon^{-\frac{s-t_2}{t_1-s}}(1+|\xi|^2)^{t_2} \qquad ⑪$$

成立. 为证式 ⑪，记 $a = (1+|\xi|^2)$，$t_1 - s = p > 0$，$t_2 - s = q < 0$，则该式等价于

$$1 \leq \varepsilon a^p + \varepsilon^{\frac{q}{p}} a^q$$

或

$$1 \leq (\varepsilon^{\frac{1}{p}}a)^p + (\varepsilon^{\frac{1}{p}}a)^q$$

因为 $p > 0$，$q < 0$，故上式右边两项中至少有一项不小于 1，从而其和必大于 1.

所以 ⑪ 成立,由此立刻得 ⑩.证毕.

注 很明显,式 ⑩ 对 $H^{t_1}(\mathbf{R}^n)$ 函数也成立.又由于 $C_c^\infty(\mathbf{R}^n) \subset S(\mathbf{R}^n)$,而任一 $C_c^\infty(\Omega)$ 函数可以作零延拓而视为 $C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ 函数,故当 $t_1 > s > t_2$ 为三个非负整数时,对 $C_c^\infty(\Omega)$ 函数也有式 ⑩,其中 $\|u\|_s$ 即 $\|u\|_{H^s(\Omega)}$,且当 $u \in H^{t_1}(\Omega)$ 时式 ⑩ 也成立.

定理 1(Gårding不等式) 设 Ω 为 $\mathbf{R}^n$ 的有界区域,具有 C^∞ 光滑的边界.① 中给定的算子 L 在 Ω 上为一致椭圆,则存在正常数 C_1, C_2,使得对一切 $C_c^\infty(\Omega)$ 函数 u 有

$$\mathrm{Re}((-1)^{\frac{m}{2}} Lu, u) \geqslant C_1 \|u\|_{\frac{m}{2}}^2 - C_2 \|u\|_0^2 \tag{⑫}$$

证明 定理的证明分以下几步.

(1) 设 L 仅含主部 L_0,且所有系数为常数.

由于 $u \in C_c^\infty(\Omega)$,故可以在 Ω 上通过分部积分推得

$$\mathrm{Re}((-1)^{\frac{m}{2}} L_0 u, u) = \sum_{|\alpha|,|\beta|=\frac{m}{2}} \mathrm{Re}(-1)^{\frac{m}{2}} \int_\Omega \partial_x^\alpha (a_{\alpha\beta} \partial_x^\beta u) \overline{u} \mathrm{d}x =$$

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|=\frac{m}{2}} \mathrm{Re}(-1)^{\frac{m}{2}} \int_{\mathbf{R}^n} \partial_x^\alpha (a_{\alpha\beta} \partial_x^\beta u) \overline{u} \mathrm{d}x$$

利用傅里叶变换,上式等于

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{|\alpha|,|\beta|=\frac{m}{2}} \int_{\mathbf{R}^n} a_{\alpha\beta} \xi^\alpha \xi^\beta |\hat{u}|^2 \mathrm{d}\xi$$

于是由 ⑨ 知

$$((-1)^{\frac{m}{2}} L_0 u, u) \geqslant C \sum_{|\alpha|=\frac{m}{2}} \|\partial^\alpha u\|^2$$

由于 $u \in C_c^\infty(\Omega)$,故不等式右端可控制 $\|u\|_{\frac{m}{2}}^2$,从而有

$$((-1)^{\frac{m}{2}} L_0 u, u) \geqslant C \|u\|_{\frac{m}{2}}^2 \tag{⑬}$$

(2) 设 Lu 的形式为 $\sum_{|\alpha|,|\beta|=\frac{m}{2}} \partial_x^\alpha (a_{\alpha\beta}(x) \partial_x^\beta u)$,其中所有系数 $a_{\alpha\beta}(x) \in C^\infty(\overline{\Omega})$.对于每一点 $x_0 \in \overline{\Omega}$,有

$$(-1)^{\frac{m}{2}} \sum_{|\alpha|,|\beta|=\frac{m}{2}} (\partial_x^\alpha (a_{\alpha\beta}(x_0) \partial_x^\beta u), u) \geqslant C \|u\|_{\frac{m}{2}}^2, \forall u \in C_c^\infty(\Omega) \tag{⑭}$$

因此,只要 ϵ 充分小,在此以 x_0 为中心,以 ϵ 为半径的球 $\omega = B(x_0, \epsilon)$ 中

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|=\frac{m}{2}} |a_{\alpha\beta}(x) - a_{\alpha\beta}(x_0)| \leqslant \frac{C}{2} \tag{⑮}$$

故对于任意的 $u \in C_c^\infty(\omega)$,有

$$\mathrm{Re}\sum_{|\alpha|,|\beta|\leq\frac{m}{2}}\int_{\omega}a_{\alpha\beta}(x)\partial_x^{\beta}u\cdot\partial_x^{\alpha}\bar{u}\mathrm{d}x=$$

$$\mathrm{Re}\sum_{|\alpha|,|\beta|\leq\frac{m}{2}}\int_{\omega}(a_{\alpha\beta}(x_0)\partial_x^{\beta}u\cdot\partial_x^{\alpha}\bar{u})\mathrm{d}x+$$

$$\mathrm{Re}\sum_{|\alpha|,|\beta|\leq\frac{m}{2}}\int_{\omega}((a_{\alpha\beta}(x)-a_{\alpha\beta}(x_0))\partial_x^{\beta}u\cdot\partial_x^{\alpha}\bar{u})\mathrm{d}x\geqslant$$

$$C\|u\|^2_{H^{\frac{m}{2}}(\omega)}-\frac{C}{2}\|u\|^2_{H^{\frac{m}{2}}(\omega)} \tag{16}$$

由于 $\overline{\Omega}$ 为紧集,故可以找到有限个球 $\omega=B(x_0,\varepsilon)$ 覆盖 $\overline{\Omega}$,而在每个球 ω 上 $((-1)^{\frac{m}{2}}Lu,u)_{\omega}\geqslant C_1\|u\|^2_{H^{\frac{m}{2}}(\omega)}-C_2\|u\|^2,\forall u\in C_c^{\infty}(\omega)$. 记这些球为 $\{\omega_j\},j=1,\cdots,J$,寻求函数 $h_j\in C_c^{\infty}(\omega_j)$,满足

$$\sum_{j=1}^{J}h_j^2=1,\text{在 }\overline{\Omega}\text{ 上} \tag{17}$$

从而

$$\mathrm{Re}(-1)^{\frac{m}{2}}\sum_{|\alpha|,|\beta|=\frac{m}{2}}(\partial_x^{\alpha}(a_{\alpha\beta}(x)\partial_x^{\beta}u),u)=$$

$$\mathrm{Re}\int_{\Omega}\sum_{|\alpha|,|\beta|=\frac{m}{2}}\sum_{j=1}^{J}h_j^2(x)a_{\alpha\beta}(x)\partial_x^{\beta}u\cdot\partial_x^{\alpha}\bar{u}\mathrm{d}x=$$

$$\sum_{j=1}^{J}\mathrm{Re}\int_{\omega_j}\sum_{|\alpha|,|\beta|=\frac{m}{2}}a_{\alpha\beta}(x)\partial_x^{\beta}(h_ju)\partial_x^{\alpha}(h_j\bar{u})\mathrm{d}x+\mathrm{Re}\int_{\Omega}\sum_{\substack{|\alpha|,|\beta|\leq\frac{m}{2}\\|\alpha|+|\beta|<m}}b'_{\alpha\beta}(x)\partial_x^{\beta}u\cdot\partial_x^{\alpha}\bar{u}\mathrm{d}x\geqslant$$

$$\sum_{j=1}^{J}\frac{C}{2}\|h_ju\|^2_{H^{\frac{m}{2}}(\omega_j)}-C'\|u\|_{H^{\frac{m}{2}}(\Omega)}\|u\|_{H^{\frac{m}{2}-1}(\Omega)}$$

另一方面

$$\sum_{j=1}^{J}\|h_ju\|^2_{H^{\frac{m}{2}}(\Omega)}=\sum_{j=1}^{J}\sum_{|\alpha|\leq\frac{m}{2}}\int_{\Omega}\partial^{\alpha}(h_ju)\partial^{\alpha}(h_j\bar{u})\mathrm{d}x=$$

$$\sum_{j=1}^{J}\sum_{|\alpha|\leq\frac{m}{2}}\int_{\Omega}h_j^2(\partial^{\alpha}u)(\partial^{\alpha}\bar{u})\mathrm{d}x+$$

$$\int_{\Omega}\sum_{\substack{|\alpha|,|\beta|\leq\frac{m}{2}\\|\alpha|+|\beta|<m}}b''_{\alpha\beta}(x)\partial_x^{\beta}u\cdot\partial_x^{\alpha}\bar{u}\mathrm{d}x\geqslant$$

$$\|u\|^2_{H^{\frac{m}{2}}(\Omega)}-C''\|u\|_{H^{\frac{m}{2}}(\Omega)}\|u\|_{H^{\frac{m}{2}-1}(\Omega)}$$

于是

$$\mathrm{Re}(-1)^{\frac{m}{2}}\sum_{|\alpha|,|\beta|=\frac{m}{2}}(\partial_x^{\alpha}(a_{\alpha\beta}(x)\partial_x^{\beta}u),u)\geqslant$$

$$\frac{C}{2}\|u\|^2_{H^{\frac{m}{2}}(\Omega)}-\left(C'+\frac{CC''}{2}\right)\|u\|_{H^{\frac{m}{2}}(\Omega)}\cdot\|u\|_{H^{\frac{m}{2}-1}(\Omega)} \qquad ⑱$$

利用引理 2 及其后的注知，对 $\varepsilon>0$ 有

$$\|u\|_{H^{\frac{m}{2}-1}(\Omega)}\leqslant\varepsilon\|u\|_{H^{\frac{m}{2}}(\Omega)}+\varepsilon^{1-\frac{m}{2}}\|u\|_{L^2(\Omega)} \qquad ⑲$$

取 ε 充分小，使 $\varepsilon\left(C'+\frac{CC''}{2}\right)<\frac{C}{4}$，将 ⑲ 代入 ⑱ 可得

$$\mathrm{Re}(-1)^{\frac{m}{2}}\sum_{|\alpha|,|\beta|=\frac{m}{2}}(\partial_x^\alpha(a_{\alpha\beta}(x)\partial_x^\beta u),u)\geqslant\frac{C}{4}\|u\|^2_{\frac{m}{2}}-K_\varepsilon\|u\|_{\frac{m}{2}}\|u\|_0 \qquad ⑳$$

其中 K_ε 为与 ε 有关的常数. 再将

$$\|u\|_{\frac{m}{2}}\|u\|_0\leqslant\frac{C}{8K_\varepsilon}\|u\|^2_{\frac{m}{2}}+\frac{8K_\varepsilon}{C}\|u\|^2_0$$

代入 ⑳，即得 ⑫.

(3) Lu 是具有一般形式 ① 的椭圆型算子.

容易将 L 定成

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|=\frac{m}{2}}(\partial_x^\alpha(a_{\alpha\beta}(x)\partial_x^\beta u))+\sum_{\substack{|\alpha|,|\beta|\leqslant\frac{m}{2}\\|\alpha|+|\beta|<m}}\partial_x^\alpha(b_{\alpha\beta}(x)\partial_x^\beta u)$$

的形式. 于是，$\mathrm{Re}((-1)^{\frac{m}{2}}(Lu,u))$ 可相应地分成两项，对第一项的估计就利用 (2) 中的结果，对第二项的估计与前面估计 $(\sum\partial_x^\alpha(b'_{\alpha\beta}(x)\partial_x^\beta u),u)$ 相仿. 于是式 ⑫ 成立. 证毕.

定理 2 在定理 **1** 的假定下，存在常数 C 与 Λ，使当 $\mathrm{Re}\lambda>\Lambda$ 时，对一切 $C_c^\infty(\Omega)$ 函数 u 有

$$\|(-1)^{\frac{m}{2}}Lu+\lambda u\|_{-\frac{m}{2}}\geqslant C\|u\|_{\frac{m}{2}} \qquad ㉑$$

定理 3 在定理 **1** 的假定下，对任意正整数 t，存在常数 $C_1^{(t)}$ 和 $C_2^{(t)}$，使得对一切 $C_c^\infty(\Omega)$ 函数 u 有

$$\mathrm{Re}((-1)^{\frac{m}{2}}Lu,u)_t\geqslant C_1^{(t)}\|u\|^2_{\frac{m}{2}+t}-C_2^{(t)}\|u\|^2 \qquad ㉒$$

又存在正常数 $C^{(t)}$ 与 $\Lambda^{(t)}$，使对一切 $\mathrm{Re}\,\lambda>\Lambda^{(t)}$ 有

$$\|(-1)^{\frac{m}{2}}Lu+\lambda u\|_{t-\frac{m}{2}}\geqslant C^{(t)}\|u\|_{t+\frac{m}{2}} \qquad ㉓$$

三、两择性定理与正则性定理

利用上面建立的先验估计式可以建立高阶椭圆型方程迪利克雷问题的两择性定理与相应的正则性定理. 记 L^* 为 L 的形式共轭算子，我们有如下定理.

定理 4 对于与椭圆型算子 ① 相关的一组迪利克雷问题：

$$Lu=f,\text{在 }\Omega\text{ 内};u=\cdots=\partial_n^{\frac{m}{2}-1}u=0,\text{在 }\partial\Omega\text{ 上} \qquad ㉔$$

$$Lu = 0,\text{在 }\Omega\text{ 内};u = \cdots = \partial_n^{\frac{m}{2}-1}u = 0,\text{在 }\partial\Omega\text{ 上} \qquad ㉕$$

$$L^* u = g,\text{在 }\Omega\text{ 内};v = \cdots = \partial_n^{\frac{m}{2}-1}v = 0,\text{在 }\partial\Omega\text{ 上} \qquad ㉖$$

$$L^* v = 0,\text{在 }\Omega\text{ 内};v = \cdots = \partial_n^{\frac{m}{2}-1}v = 0,\text{在 }\partial\Omega\text{ 上} \qquad ㉗$$

以下的结论成立.

(1) ㉕ 与 ㉗ 的解空间均为有限维空间,且维数相同.

(2) ㉔ 对于 $f \in H^{-\frac{m}{2}}(\Omega)$ 有解的充分必要条件是

$$\langle f, \bar{v}\rangle = 0, \forall v \in V \qquad ㉘$$

其中 V 是 ㉗ 的解空间.

(3) 存在复平面 C^1 上一个至多为可列的离散点集 Λ,使得对于任意 $\lambda \notin \Lambda$,问题

$$\begin{cases}((-1)^{\frac{m}{2}}L + \lambda)u = 0,\text{在 }\Omega\text{ 中}\\ u = \cdots = \partial_n^{\frac{m}{2}-1}u = 0,\text{在 }\partial\Omega\text{ 上}\end{cases} \qquad ㉙$$

只有零解. 而当 $\lambda \in \Lambda$ 时,㉙ 有非零解.

定理 5 设 L 是定义在具光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域 Ω 上的 m 阶椭圆型算子,系数为 $C^\infty(\overline{\Omega})$ 函数,$u \in H_0^{\frac{m}{2}}(\Omega)$,$Lu \in H^k(\Omega)\left(k \geqslant -\frac{m}{2}\right)$,则 $u \in H^{k+m}(\Omega)$,且

$$\| u \|_{k+m} \leqslant C_k(\| u \|_0 + \| Lu \|_k) \qquad ㉚$$

定理 6 设 L 是定义在区域 Ω 上的 m 阶椭圆型算子,系数为 $C^\infty(\Omega)$ 函数. 若对整数 k,$Lu \in H_{\text{loc}}^k(\Omega)$,则 $u \in H_{\text{loc}}^{k+m}(\Omega)$.

第十六回　安普顿　土木工程创奇迹①
边界元　加权剩余特殊用

边界元法一词是由英国南安普顿(Southampton)大学土木工程系的科学家们创立的.它是求解数学物理方程的一种新的数值计算方法.这种方法处理问题的步骤与目前广泛使用的有限元法和有限差分法有某些类似之处,但其出发点却完全不同,因而实现了相当程度的简化,所以成为一种不同于上述诸法的新方法.

目前常用的有限元法和有限差分法,统属于所谓的"域法".这些方法的出发点是把问题的连续"域"划分成许多细小的单元或网格,然后把各单元或网格换成简单的等价模型,再把它们联系起来作为网进行全部计算,也就是说,把原来的分布参数系统问题化为集中参数系统的问题来求解.这些方法的基本思想是用完全(或局部)满足定义域上边界条件的函数逼近问题的控制方程.而边界元法则正好相反,它是把定义域的边界划分成一系列单元,用满足控制方程的函数逼近边界条件,所以,这种方法被称为"边界元法".

众所周知,关于经典边界法的研究开始较早,统称为"边界积分法".边界元法是一种后期才发展起来的属于加权剩余法的边界法.

边界元法与域法一样,有多种类型.一种比较简单的方法称为间接法.它是从一个基本解入手.该解在定义域内满足控制方程,但却含有某些未知数.这些未知数则是通过在许多点(或子域)上施行边界条件来确定.

另一种比较通用的方法称为直接法.它是以格林公式为出发点,因而可以看成是一种加权剩余法.

总之,边界元法是加权剩余法的一种特殊应用.现代计算理论表明,所有近似方法,都可以看成是加权剩余法的特殊应用.

加权剩余法是求解数学物理方程的普遍方法.它的出发点是把未知解按一组规定的试探函数展开,通过调整系数(或函数),有选择地给出方程的最佳解.其一阶近似给出量级解答(约 10% ~ 20% 内),而计算高阶近似则可得到所希望的精确解.

设拉普拉斯方程为

$$\nabla^2 u = 0 \quad ①$$

$$u = u_0, \text{在 } \Omega \text{ 的边界 } \Gamma \text{ 上} \quad ②$$

① 本回引自文献[74].

取试探函数为

$$u = u_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i u_i \quad ③$$

其中,规定函数 u_i 满足齐次边界条件 $u_i = 0$. 不过,试探函数 ③ 对系数 C_i 的各种选择都要满足边界条件. 把试探函数代入方程 ①,形成剩余

$$R(C_i, u_0, u_i) = \nabla^2 u_2 + \sum_{i=1}^{n} C_i \nabla^2 u_i \quad ④$$

如果试探函数是精确解,则剩余 $R = 0$.

在加权剩余中,系数 C_i 是这样选择的,即迫使加权剩余在平均的意义上为零. 也就是说,剩余的加权积分为零,即

$$(w_j, R) = 0, j = 1, 2, \cdots, n \quad ⑤$$

其中,w_j 为权函数,(w_j, R) 为内积,其定义为

$$(w_j, R) = \int_{\Omega} w_j R \mathrm{d}\Omega \quad ⑥$$

若 $(w_j, R) = 0$,则 w_j 与 R 正交. 把 ④ 与 ⑤ 结合起来,给出

$$\sum_{i=1}^{n} C_i (w_j, \nabla^2 u_i) = -(w_j, \nabla^2 u_0) \quad ⑦$$

或简化为

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{B}_{ji} \boldsymbol{C}_i = \boldsymbol{d}_j \quad ⑧$$

其中,$\boldsymbol{B}_{ji} = (w_j, \nabla^2 u_i)$, $\boldsymbol{d}_j = -(w_j, \nabla^2 u_0)$.

因为函数 u_0 和 u_i 是已知的,只要规定了 w_j,就可以计算 $\boldsymbol{B}_{ji}$ 和 $\boldsymbol{d}_j$. 对矩阵 $\boldsymbol{B}_{ji}$ 求逆,即得到 $\boldsymbol{C}_i$,于是,得到方程 ① 的近似解 ③.

第十七回 金融热 期权期货难定价
获诺奖 随机变量入方程

期权定价是一个古老的问题，早在 1900 年，Louis Bachelier 发表了他的学位论文《Théorie de la spéculation》(《投机交易理论》)，它被公认为是现代金融学的里程碑，在他的论文中首次利用随机游动的思想给出了股票价格运行的随机模型，在这篇论文中，他就提到了期权的定价问题.

1964 年 Paul Samuelson(诺贝尔经济奖的获得者)对 L. Bachelier 的模型进行了修正，以股票的回报代替原模型中的股票价格，若 S_t 表示股票价格，那么 $\frac{dS_t}{S_t}$ 表示股票的回报，P. Samuelson 提出的随机微分方程是

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t \qquad ①$$

这个修改克服了原先模型中可能使股票价格 S_t 出现负值的不合理情况.

基于这个模型，P. Samuelson 还研究了看涨期权的定价问题(同时研究这个问题的还有 C. Sprenkle(1965) 和 J. Baness(1964))，他们的结果可以表述如下.

设 V 是看涨期权的期权金，S 是股价，K 是敲定价，T 是到期时间，则

$$V = e^{-\alpha_c T}(Se^{\alpha_s T}N(d_1) - kN(d_2)) \qquad ②$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (\alpha_s + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \qquad ③$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}, N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha$$

其中，α_s，α_c 分别是原生资产价格 S_t 和期权的价格 V_t 的回报在 $t = V$ 时刻的数学期望值. 这两个量依赖于投资人的个人偏好，因此虽然这个定价公式很漂亮，但在实际交易中它是不能应用的.

1973 年 Fischer Black 和 Myron Scholes 建立了看涨期权定价公式

$$V = SN(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2) \qquad ④$$

与公式 ② 相比较，在这里 α_s，α_c 已经不再出现，取而代之的是无风险利率 r，这个公式的创新之处在于不依赖于投资人的偏好，它把所有投资人引向同一个以无风险利率作为投资回报率的风险中性世界(Riskneutral world). 1997 年由于这个光辉的公式以及由此产生的期权定价理论方面的一系列贡献，M. Scholes 和 R. Merton(F. Black 已故)获得诺贝尔经济学奖.

第十八回　炒期货　伊腾定理有奇效
布莱克　随机倒向偏微分

我们先看布莱克 - 休尔斯(Black - Scholes)微分方程的推导.

我们假设股票价格 S 遵循下列随机过程

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad ①$$

假设 f 是依赖于 S 的衍生证券的价格. 变量 f 一定是 S 和 t 的某一函数. 由伊腾定理可得

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S dz \quad ②$$

方程 ① 和 ② 的离散形式为

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta t \quad ③_1$$

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S \Delta z \quad ③_2$$

其中 ΔS 和 Δf 是 S 和 f 在短时间间隔 Δt 后的变化量. 由伊腾[①]定理知 f 和 S 遵循的维纳过程相同. 也就是说方程 $③_1$ 和 ② 中的 Δz 相同. 所以选择某种股票和衍生证券的证券组合就可以消除维纳过程.

恰当的证券组合应该是

$$-1: \text{衍生证券}$$

$$+\frac{\partial f}{\partial S}: \text{股票}$$

此证券组合的持有者卖出一份衍生证券，买入数量为 $+\frac{\partial f}{\partial S}$ 的股票，定义证券组合的价值为 π，根据定义

$$\pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S}S \quad ④$$

Δt 时间后证券组合的价值变化 $\Delta\pi$ 为

$$\Delta\pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S}\Delta S \quad ⑤$$

将方程 $③_1$ 和 $③_2$ 代入方程 ⑤，得到

$$\Delta\pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t \quad ⑥$$

因为这个方程不含有 Δz，经过 Δt 后证券组合 π 必定没有风险，由假设可得

① 现年 90 岁的伊腾因此项工作在 2006 年国际数学家大会上获高斯奖.

出该证券组合的瞬时收益率一定与其他短期无风险证券收益率相同.如果该证券组合的收益率大,套利者就可以通过卖出无风险证券然后用其收入购买该证券组合来获取无风险收益;如果该证券组合的收益率小,套利者就可以通过卖出该证券组合购买无风险证券来获取无风险收益.所以结果应该是

$$\Delta\pi = r\pi\Delta t$$

其中 r 为无风险利率.再由方程 ④ 和方程 ⑥ 可以得到

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t = r\left(f - \frac{\partial f}{\partial S}S\right)\Delta t$$

化简为

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf \qquad ⑦$$

方程 ⑦ 是 Black – Scholes 微分方程.对应于所有的可用标的变量 S 定义的不同衍生证券,此方程有许多解.解方程时得到的特定的衍生证券取决于使用的边界条件(Boundary conditions).这些边界条件确定了在 S 和 t 可能取值的边界上衍生证券的价值.对于欧式看涨期权的情况,关键的边界条件为

$$f = \max(S - x, 0),当\ t = x\ 时$$

对于欧式看跌期权,边界条件为

$$f = \max(x - S, 0),当\ t = T\ 时$$

所谓欧式看涨期权(Call option)是指在一既定日期,以既定价格买入既定数额的基础金融资产的购买权.注意,它是持有者在到期日购买的选择权力而不是义务,从而是一种有限责任的证券.这样的期权使买方可以从基础金融资产市场价格上涨中获益.如果市场上某人希望从资产市场价格下跌获利,则需要用另一种期权,这种期权叫看跌期权(Put option),所谓欧式看跌期权是指在一既定日期,以既定价格出售既定数额的基础金融资产的卖出权,同样,它是授予期权的买方一种权力而不是义务,因而它是一种有限责任证券.

下面介绍布莱克 – 休尔斯方程的求解.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rc = 0$$

初始条件(这里实际上是终值条件)为

$$C(S,t) = \max(S - k, 0)$$

边界条件为 $$\begin{cases} C(0,t) = 0, S \to 0 \\ C(S,t) \sim S, S \to \infty \end{cases}$$

尽管布莱克 – 休尔斯方程看上去很像扩散方程,但是它的项数更多,而且不是常数.我们可以将其化为扩散方程来解.

先去掉乘在偏微分项前的 S 和 S^2 项.令

$$S = ke^x, t = T - \tau / \frac{1}{2}\sigma^2, C = k\gamma(x,\tau)$$

根据导数运算法则和复合函数求导法则，布莱克 - 休尔斯方程变形为

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} + (k-1)\frac{\partial \gamma}{\partial x} - kv \qquad ⑧$$

其中 $k = r / \frac{1}{2}\sigma^2$.

同时初始条件相应地变成

$$\gamma(x,0) = \max(e^x - 1, 0) \qquad ⑨$$

再令

$$\gamma = e^{\alpha x + \beta\tau} u(x,\tau) \qquad ⑩$$

利用函数 e^x 的 n 阶导数形式不变的性质，求导得

$$\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} = \partial^2 u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (k-1)\left(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x}\right) - ku \qquad ⑪$$

我们想同时消去上式中的 u 和 $\partial u / \partial x$ 项，就必须使得下面的联立方程组

$$\begin{cases} \beta = \alpha^2 + (k-1)\alpha - k \\ 0 = 2\alpha + (k-1) \end{cases} \qquad ⑫$$

成立. 注意到 k 是常数，解这个二元方程得

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2}(k-1) \\ \beta = -\frac{1}{4}(k+1)^2 \end{cases} \qquad ⑬$$

这样式 ⑩ 就变为

$$\gamma(x,\tau) = e^{-\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} u(x,\tau) \qquad ⑭$$

而方程 ⑪ 变成了一维齐次热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, -\infty < x < \infty, \tau > 0 \qquad ⑮$$

而初始条件由式 ⑨ 变为

$$u(x,0) = u_0(x) = \max(e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0)$$

经过这种略显复杂的代换，我们就得到了在数学物理方法中的热传导方程. 这样就使得问题的解决有了一个数百年积累获得的深厚知识基础.

第十九回　联系深　拉氏算子进数论①
涉及广　模型式中非解析

以分析方法研究、解决数论问题已有数百年的历史，并形成了解析数论这一数论的重要分支. 但是以分析方法研究数论并不局限于古典解析数论，还有所谓的非解析模形式理论，它需要利用泛函分析的工具得到非欧拉普拉斯算子的谱分解. 更进一步，通过对上半平面中的不变微分算子与不变积分算子的研究，赛尔伯格提出了赛尔伯格迹公式的理论与结论. 利用这个公式可以推出非欧拉普拉斯算子特征值的分布估计，同时也可看出非欧拉普拉斯算子特征值的分布与素数分布的类似性.

提起模形式我们可能首先想到的是解析模形式，即作为 z 的一个函数，其定义在上半平面 $D = \{z \in C \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ 上，在 $SL(2,z)$ 或其某一个算术子群的作用下不变或满足某种"模" 的性质，并且在 D 上包括无穷远点处都全纯.

20世纪40年代Maass引进了非解析模形式，被称为Maass波动形式，之所以加之"波动" 二字是由于非解析模形式 $f(z)$ 作为上半平面 D 上的函数，是非欧拉普拉斯算子的一个特征函数，在欧氏几何中这对应于振动膜的特征值问题.

在复平面 C 上的拉普拉斯算子为

$$\Delta^e = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

在上半平面 D 上的非欧拉普拉斯算子则为

$$\Delta = -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

这个非欧拉普拉斯算子在 $SL(2,R)$ 的作用下不变，即

$$\Delta\left(f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)\right) = (\Delta f)\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)$$

可引入以下定义.

定义 1　在上半平面 D 上定义的一个非零实解析函数 $f(z)$ 如果满足下列条件：

(1) 对所有的 $g \in SL(2,Z)$，$f(gz) = f(z)$ 成立；

(2) $f(z)$ 是非欧拉普拉斯算子的一个特征函数

$$\Delta f = \lambda f$$

这里 λ 是 Δ 的一个特征值.

---

① 本回引自文献[121].

(3) 对于某一个正整数 N, $f(z) = O(y^N)$, 当 $y \to +\infty$ 时成立.

则称为群 $\Gamma = SL(2, Z)$ 的一个 Maass 波动形式.

我们要考虑在希尔伯特空间 $L^2(\Gamma \setminus D)$ 中非欧拉普拉斯算子的谱分解问题,这个谱分解是模形式理论在数论中应用的一个重要基石.

顺便指出,模形式理论是现代数学的一个重要分支,它在函数论、李群表示论、数论、几何、通信等分支都有广泛的应用,模形式可分为解析的与非解析的两大类,解析模形式起源于20世纪20年代,目前已臻完善,非解析形式则发展较晚,它在现代物理学中有更重要的应用.

第二十回　朗兰兹　群表示论与自守[①]
华罗庚　利用数论解偏微

在19世纪末，希尔伯特在他的"Zahlbericht"中一方面总结了数论直到19世纪的发展，同时指出重要的研究方向.20世纪初，在他的启发下，弗厄特万格勒，高木贞治以及阿廷(Artin)等人建立了类域论以及互反律，使数论的发展开始了一个新的阶段，到了20世纪40年代，安德鲁·韦尔提出了他著名的猜想，指出了数论与代数几何的内在联系，这不但促进了代数几何的巨大发展，而且为数论的研究开辟了一个崭新的领域，从而得到了不少非常重要的结果.而在20世纪70年代前后，朗兰兹提出了一系列新的猜想，指出了群的表示论与自守形式的联系，为数论的进一步研究提出了一个新的思想与计划.由于它的重要性，人们称之为"朗兰兹计划"或"朗兰兹思想".近几十年来，数论在这个方向取得的大量重要的成果证实了"朗兰兹计划"不但是正确的，而且是极其深刻的.

弗厄特万格勒(Furtwängler，1869—1940)，奥地利人，生于德国，工作在维也纳，主要研究代数学和数论，在测量学方面也有重要贡献.

在大自然中有很多周期现象，我们用周期函数来描述这些现象，周期函数 $\sin 2\pi z$ 的周期是整数群 z，即是说，对整数 n

$$\sin 2\pi(n+z)=\sin 2\pi z$$

z 是一个简单的交换群，假如一个复杂的现象的周期 Γ 是一个类似 z(不一定交换)的群，例如 Γ 是系数是整数且行列式等于1的 2×2 矩阵群 $SL(2,Z)$，则我们便会问：是否存在以 Γ 为周期，类似 $\sin 2\pi z$ 的函数 f?即是说，对 $\gamma\in\Gamma$

$$f(\gamma,z)=f(z)$$

这样的函数我们称它为模函数.模函数便是研究以矩阵群为周期的现象的工具，如果现象空间是高维流形，则相应于模函数的微分形式便是自守形式了.

高木贞治(Teiji，Takagi，1875—1960)，日本数学家，曾获沃尔夫奖.

1956年赛尔伯格发表了现称为赛尔伯格迹公式：称 $\mathrm{PSL}(2,R)$ 的元 γ 为双曲元，若 γ 与 $\begin{pmatrix}\rho & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 共轭，$\rho>1$，称 ρ 为 γ 的范数，将它记为 $N\{\gamma\}$，设 Γ 为 $\mathrm{PSL}(2,R)$ 的离散子群，称双曲元 $\gamma\in\Gamma$ 为本原双曲元，若不存在 $\gamma_1\in\Gamma$，使 $\gamma=\gamma_1^m$，$m>1$，把 $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\gamma\in\Gamma$ 看做上半平面 $H=\{z=x+yi\mid y>0\}$ 的麦比乌斯变换，即 $\gamma z=\dfrac{az+b}{cz+d}$.对这个作用取基本集 D，即 $H=\Gamma D$，假若：(1)D 为紧黎曼面；(2)Γ 在 H 中无固定点，则对适当的复变函数 h，赛尔伯格迹

① 本回引自文献[122].

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2}=0$$

公式便是

$$\sum_n h(r_n) = \frac{A(D)}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} r\frac{e^{\pi r}-e^{-\pi r}}{e^{\pi r}+e^{-\pi r}}h(r)\mathrm{d}r +$$
$$2\sum_{\{\gamma\}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\log N\{\gamma\}}{(N\{\gamma\})^{k/2}-(N\{r\})^{-k/2}}\times g(k\log N\{\gamma\})\right)$$

阿廷(Artin, Emil, 1898—1962)，德国数学家. 生于维也纳.

其中 r_i 是由 D 上的拉普拉斯算子的特征根决定的，即

$$y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)F = -\left(\frac{1}{4}+r^2\right)F$$

$A(D)$ 是 D 的面积，$\sum_{\{\gamma\}}$ 是对本原双曲共轭类求和，对 $u\in\mathbf{R}$ 定义

$$g(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-iru}h(r)\mathrm{d}r$$

朗兰兹(Langlands, Robet P., 1936—)，美国数学家. 生于加拿大不列颠哥伦比亚.

1960 年玉河恒夫发表了任意紧齐次空间 $\Gamma\setminus G$ 的迹公式. Arhur 于 1980 年提出任意既约代数群的迹公式.

华罗庚与王元也曾利用数论解拉普拉斯方程.

我们来研究椭圆型方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_s^2}\right)u = f \qquad ①$$

的近似解法问题.

赛尔伯格(Selberg, Atle, 1917—)，美国数学家. 生于挪威朗厄松. 于 1950 年获菲尔兹奖章，1985 年获沃尔夫奖.

假定 $f\in E_s^{\alpha}(C)(\alpha>1)$，而且关于每一变数都是奇函数，迪利克雷问题是求出满足 ①，而且在 G_s 边界上取值 0 的解 u 的渐近表达式.

华罗庚和王元证明了假定 $s\geqslant 2$，若同余式

$$(a,m) = \sum_{i=1}^{s}a_im_i \equiv 0 \pmod n \qquad ②$$

在范围

$$\|m\|\leqslant M, m\neq 0 \qquad ③$$

中无解，则

$$\sup_{x\in \bar{G}_s}\left|u(x)-\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{ka}{n}\right)\psi_k(x)\right|\leqslant C\cdot c(\alpha,s,\epsilon)M^{-\gamma(\alpha,\frac{2}{s})+\epsilon}$$

这里

$$\psi_k(x) = -\frac{1}{4\pi^2 n}\sum_{\|x\|<N}\frac{e^{2\pi i\left(m,x-\frac{ka}{n}\right)}}{(m,m)}, 1\leqslant k\leqslant n \qquad ④$$

其中 $$N=[M^{\frac{\alpha}{2\alpha-1}}], \gamma(\alpha,w) = \frac{\alpha(\alpha+w-1)}{2\alpha-1}$$

第二十一回 谈引入 三角函数和序列①
医疗中 拉东变换是关键

用 P_k 表示 $\mathbf{R}^n$ 上全体 K 阶齐次多项式所构成的线性空间，$A_k \subset P_k$ 是全体调和的 k 阶齐次多项式所构成的空间，$p_k(x) \in A_k$ 在单位球面 $\sum_{n-1}$ 的限制 $\overline{y}_k(x) = p_k(\frac{x}{|x|})(x \neq 0)$ 称为 k 次球调和函数，全体 k 阶球调和函数 $\{\overline{y}_k(x)\}_k$ 所构成的线性空间记为 H_k，球调和函数亦称为球面调和函数.

为了更好地了解球调和函数重新回到 $n = 2$ 的情形，我们将说明 $e^{ik\theta}$ 就是相应的球调和函数，考察三角函数

$$S(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\theta}$$

的对称部分和序列

$$S_n(\theta) = \sum_{k=-n}^{n} C_k e^{ik\theta} = C_0 + \sum_{k=1}^{n}(C_k e^{ik\theta} + C_{-k}e^{-ik\theta})$$

当 $C_k = \overline{C_{-k}}$ 时，这个和式是实值的，此时 $S_n(\theta)$ 恰是多项式且

$$p_n(z) = C_0 + 2\sum_{k=1}^{n} C_k z^k, \quad z = re^{i\theta}$$

的实部 $u_n(z)$ 在单位球 Σ_1 上的限制. 由于

$$q_k(z) = \mathrm{Re}(2C_k z^k) = C_k z^k + \overline{C_k}\,\overline{z_k} = C_k(x + \mathrm{i}y)^k + \overline{C_k}(x - y\mathrm{i})^k$$

$$\frac{\partial^2 q_k(z)}{\partial x^2} = k(k-1)C_k(x + \mathrm{i}y)^{k-2} + k(k-1)\overline{C_k}(x - \mathrm{i}y)^{k-2}$$

$$\frac{\partial^2 q_k(z)}{\partial y^2} = k(k-1)\mathrm{i}^2 C_k(x + \mathrm{i}y)^{k-2} + \overline{C_k}(k-1)k(-\mathrm{i})^2(x - \mathrm{i}y)^{k-2}$$

从而

$$\Delta q_k(z) = 0$$

即 $q_k(z)$ 是 k 阶齐次实调和多项式. 这同时说明 $u_n(z) = \mathrm{Re}\, p_n(z)$ 是调和多项式. 故 $S_n(\theta)$ 是实调和多项式 $u_n(z)$ 在 Σ_1 上的限制.

为了求解迪利克雷问题人们还引进了带调和函数.

对每一个 $x' \in \Sigma_{n-1}$ 考虑 H_k 上线性泛函 L 如下，即

$$L(\overline{Y}) = \overline{Y}(x'), Y \in H_k$$

因 H_k 是有限维希尔伯特的空间，必存在唯一 $Z_{x'}^{(k)}(t') \in H_k$，使得

---

① 本回引自文献[117].

$$L(Y) = y(x') = (y(t'), Z_{x'}^{(k)}(t')), t' \in \Sigma_{n-1}$$

称函数 $Z_{x'}^{(k)}(t')$ 是具有极点 x' 的带调和函数.

带调和函数可以用超球多项式(即 Gegen bauger 多项式)$P_k^\lambda(t)$ 来刻画,而超球多项式可用母函数来定义,如果我们记

$$(1 - 2rt + r^2)^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k^\lambda(t) r^k$$

这里 $0 \leqslant |r| < 1$, $|t| \leqslant 1$, $\lambda > 0$,系数多项式 $P_k^\lambda(t)$ 就称为 k 阶 λ - 超球多项式.

对 $\forall x, y \in \Sigma_{n-1}$,有

$$Z_x^{(k)}(y) = C_{k,n} P_k^{\frac{n-2}{2}}(x, y), \forall x, y \in \Sigma_{n-1}$$

这里 $P_k^{\frac{n-2}{2}}(t)$ 是 k 阶 $\frac{n-2}{2}$ - 超球多项式. 为简单起见, 可用 $F(x, y) = C_{k,n} P_k^{\frac{n-2}{2}}(x, y)$ 简记.

记 π_k 是 $L^2(\Sigma_{n-1})$ 到 H_k 上的正交投影,则 π_k 有如下表示公式

$$\pi_k f(x) = \int_{\Sigma_{n-1}} f(y) F_k(x, y) \mathrm{d}y, x \in \Sigma_{n-1}$$

下面我们将其应用到拉普拉斯方程中,考虑如下迪利克雷问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, x \in B_1 \\ u(x) = f, x \in \Sigma_{n-1} \end{cases} \qquad ①$$

若 $f \in H_k$,则 $u(x) = |x|^k f(\frac{x}{|x|})$, $x \in B$,就是 ① 的唯一解.

若 $f \in L^2(\Sigma_{n-1})$,则 ① 的解可由

$$u(rx) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \pi_k f(x), x \in \Sigma_{n-1}, 0 \leqslant r \leqslant 1$$

给出,对每一个固定 $r \leqslant 1$, 此级数在 $L^2(\Sigma_{n-1})$ 中收敛, 对 $x \in \Sigma_{n-1}$, $r \leqslant r_0 < 1$,级数关于 $y = rx$ 一致收敛.

记

$$\Delta q = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

若 $H(x)$ 满足 $\Delta q H(x) = 0$,称 $H(x)$ 为调和函数,若 $H(x)$ 是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 n 次齐次多项式,且为调和函数,则称 $S_n(\xi) = H_n(\xi)$ 为 q 维空间 n 次球面调和函数,其中 ξ 表单位向量,$X = r\xi$, $r = |x|$.

易见 $H_n(x) = H_n(r\xi) = r^n H_n(\xi)$,即 $H_n(\xi) = \frac{1}{r^n} H_n(x)$.

$S_n(\xi)$ 具有如下性质.

性质 1 $S_n(-\xi)=(-1)^n S_n(\xi)$.

性质 2 正交性,若 $m\neq n$,则有

$$\int_{\Omega_q} S_m(\xi)S_n(\xi)\mathrm{d}w_q=0$$

其中 Ω_q 表 q 维空间的单位球面,$\mathrm{d}w_q$ 表单位球面面积元素,即两不同次数的球面调和函数在单位球面上正交.

性质 3 若记 q 维空间中 n 次球面调和函数线性无关的个数为 $N(q,n)$,则

$$N(q,n)=\frac{(2n+q-2)\Gamma(n+q-2)}{\Gamma(n+1)\Gamma(q-1)},q\geqslant 2$$

性质 4 q 维空间中的 n 次球面调和函数 $S_{l_1},S_{l_2},S_{l_3},\cdots,S_{l_n}$ 为标准正交基,即

$$\int_{\Omega_q} S_{lm}(\xi)S_{l'm'}(\xi)\mathrm{d}w_q=\delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

任何 n 次球面调和函数 $S_n(\xi)$ 都可以由 $\{S_{l_i}\}$ 线性表出.

性质 5 (加法定理) 设标准正交基 $S_{n_1},S_{n_2},\cdots,S_{n_N}$,则有

$$P_n(\xi\cdot\eta)=\frac{w_q}{N(q,n)}\sum_{i=1}^{N}S_{ni}(\xi)S_{ni}(n)$$

其中,ξ 是 q 维空间的单位向量,有 $q-1$ 个自由度;w_q 是 q 维空间的单位球面面积;$P_n(x)$ 是 q 维空间中 n 次勒让德多项式;$\xi\cdot\eta$ 是两向量的点积;$\varphi(\xi\cdot\eta)$ 是一维函数;$N(q,n)$ 为性质 3 中的 N.

性质 6(Funk-Hecke 定理) 若 $f(t)$ 在 $[-1,1]$ 上连续,则对每一个 n 次球面调和函数 $S_n(\xi)$,有

$$\int_{\Omega_q} f(\alpha\cdot\eta)S_n(\eta)\mathrm{d}w_q=\lambda S_n(\alpha)$$

其中
$$\lambda=w_{q-1}\int_{-1}^{1}f(t)P_n(t)(1-t^2)^{\frac{q-3}{2}}\mathrm{d}t$$

w_{q-1} 表 $q-1$ 维空间的单位球面积,$|\alpha|=1$.

拉东(Radon,Johann,1887—1956),捷克数学家,生于捷克斯洛伐克的波希米亚,卒于奥地利的维也纳.

格根鲍尔(Gegenbauer,Leopold,1849—1903),奥地利数学家.

在医疗中,CT 成像的数学基础是拉东变换,它与著名的格根鲍尔变换之间有如下建立在球面调和函数上的关系.

假设 n 维空间的 ξ 为单位向量,X 为球坐标,即 $X=rw$,$r=|x|$,r 为向径,w 为单位向量 $w=\frac{x}{|x|}$,并设

$$f(x)=g_l(r)S_{lm}(w)$$

其中 S_{lm} 为 l 阶球面调和函数,$m=1,2,\cdots,N$. $g_l(r)$ 属于基本空间 k,则

$$\check{f}(p,\xi)=R\{f(x)\}=\check{g}_l(p)S_{lm}(\xi)$$

其中

$$\check{g}_l(p) = \frac{w_{n-1}}{C_l^{\gamma}(1)}\int_{|p|}^{\infty} r^{2\gamma} g_l(r) C_l^{\gamma}\left(\frac{p}{r}\right)\left(1 - \frac{p^2}{r^2}\right)^{\gamma - \frac{1}{2}} \mathrm{d}r$$

$$\gamma = \frac{n-2}{2}, C_l^{\gamma}(1) = (2\gamma)l/l!$$

$$(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1) = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}, (\alpha)_0 = 1$$

$C_l^{\gamma}(t)$ 称为格根鲍尔函数,它是勒让德多项式的推广,其母函数是

$$(1 - 2xt + t^2)^{-\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\lambda}(x) t^n, \lambda > \frac{1}{2}, -1 < x < 1, |t| < 1$$

$$C_n^{\lambda}(x) = \frac{(2\lambda)_n}{n!} F\left(-n, n+2\lambda; \lambda + \frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}\right)$$

并称 $\check{g}_l(p)$ 为 $g_l(r)$ 的格根鲍尔变换.

第二十二回 杆横振 方程列为双调和 方程解 一到四阶有导数

一、双调和方程

杆的横振动方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \qquad ①$$

没有载荷且在边缘上固定的薄钣的振动问题也用类似的方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}\right) = 0 \text{ 或} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \Delta\Delta u = 0 \qquad ②$$

及边界条件

$$\text{在边界上}, u = 0 \text{ 与} \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \qquad ③_1$$

描述.此外,u 应满足下列的初始条件

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = \psi(x, y) \qquad ④$$

若有外力作用于这钣上,且该外力按密度 $f(x, y)$ 分布,那么这固定边缘的钣的静力挠曲将由方程

$$\Delta\Delta u = f \qquad ⑤_1$$

及边界条件

$$u = 0, \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \qquad ③_2$$

定出.

方程

$$\Delta\Delta u = 0 \qquad ⑤_2$$

叫做双调和方程,而它的具有自一阶到四阶的导数的解就叫做双调和函数.

双调和方程的基本的边界问题提出如下.

试求一个函数 $u(x, y)$,使这个函数及其一阶导函数在闭区域 $S + C$ 是连续的,而且函数 u 在 S 有直到四阶的导函数,同时它在 S 的内部能满足方程 $⑤_1$(或方程 $⑤_2$),又在 C 上能满足如下的边界条件

$$u\,|_C = g(s), \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_C = h(s) \qquad ⑥$$

上式的 $g(s)$ 与 $h(s)$ 是围线 C 的弧长 s 的连续函数.

当解决前述的带有初始条件的问题②～④时，我们采用分离变量法．像通常一样，令

$$u(x,y,t)=v(x,y)T(t) \qquad ⑦$$

把式⑦代入方程②分离变量后，就得到一个求该方程的固有值问题

$$\Delta\Delta v-\lambda v=0 \qquad ⑧$$

其边界条件为

$$在\ C\ 上, v=0, \frac{\partial v}{\partial n}=0 \qquad ⑨$$

1．解的唯一性

我们来证明边界条件为

$$u\mid_C=g(s), \frac{\partial u}{\partial n}=h(s) \qquad ③_3$$

的双调和方程 $\Delta\Delta u=0$

只有唯一的解．

证明 若方程有两个解 u_1 与 u_2 存在，让我们考察二者之差

$$v=u_1-u_2$$

函数 v 满足双调和方程 $⑤_2$ 及齐次的边界条件

$$v\mid_C=0, \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_C=0$$

把格林公式

$$\iint_G(\Delta\varphi\psi-\varphi\Delta\psi)\mathrm{d}S=\int_C\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)\mathrm{d}S$$

应用到函数 $\varphi=v$ 与 $\psi=\Delta v$ 上，则得

$$\iint_G(\Delta v)^2\mathrm{d}S=0$$

由此得

$$\Delta v=0$$

注意到 $v\mid_C=0$，则得 $v\equiv0$ 与 $u_1\equiv u_2$．

所以，双调和函数是由条件 $③_3$ 唯一定出的．

2．用调和函数表示双调和函数

我们来证如下定理．

设 u_1 与 u_2 是在某一区域 G 的两个调和函数，则函数 $u=xu_1+u_2$ 在 G 上是双调和函数．

为了证明，要利用如下恒等式

$$\Delta(\varphi\psi) = \varphi\Delta\psi + \psi\Delta\varphi + 2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) \qquad ⑩$$

令

$$\varphi = x, \psi = u_1$$

则得

$$\Delta(xu_1) = 2\frac{\partial u_1}{\partial x} \qquad ⑪$$

应用算子 Δ,并考虑到 $\Delta\Delta u_2 = 0$,则得

$$\Delta\Delta(xu_1 + u_2) = 0$$

若每一条与 x 轴平行的直线与区域 G 的边界相交都不会超过两点,那么,对于这样的区域 G,如下的逆定理亦成立.

对于每一个给定在区域 G 的双调和函数 u,必能找到两个调和函数 u_1 与 u_2,使

$$u = xu_1 + u_2$$

为了证明这结论,显然只要证明:可以选出一个函数 u_1 满足下列二条件

$$\Delta u_1 = 0 \qquad ⑫$$

与

$$\Delta(u - xu_1) = 0 \qquad ⑬$$

就够了.

自条件 ⑬ 与式 ⑪ 推得

$$\Delta u = \Delta(xu_1) = 2\frac{\partial u_1}{\partial x} \qquad ⑭$$

函数

$$\overline{u}_1(x, y) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{2}\Delta u(\xi, y)\mathrm{d}\xi$$

能满足条件 ⑭. 因为

$$\frac{\partial}{\partial x}\Delta\overline{u}_1 = \Delta\frac{\partial}{\partial x}\overline{u}_1 = \frac{1}{2}\Delta\Delta u = 0$$

所以 $\Delta\overline{u}_1$ 只依赖于自变量 y,由

$$\Delta\overline{u}_1 = v(y)$$

定出这样的一个函数 $\overline{\overline{u}}_1(y)$,使

$$\Delta\overline{\overline{u}}_1 = \frac{\partial^2\overline{\overline{u}}_1}{\partial y^2} = -v(y)$$

并令

$$u_1 = \overline{u}_1 + \overline{\overline{u}}_1$$

则这函数 u_1 显然满足 ⑫ 与 ⑬ 两个条件.

让我们考虑表示双调和函数的另一形式. 假定坐标原点选在区域 G 的内部,又假定自原点出发的任一射线与 G 的边界只相交于一点,那么在 G 的任何一个双调和函数都可以用两个调和函数 u_1 与 u_2 表示如下

$$u = (r^2 - r_0^2)u_1 + u_2 \qquad ⑮$$

上式的 $r^2 = x^2 + y^2$,而 r_0 是已给的常数.

用恒等式 ⑩ 及如下关系式

$$\Delta r^2 = 4, \frac{\partial u_1}{\partial r} = \frac{\partial u_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r}$$

可以像前面那样作出证明.

3. 圆的双调和方程的解

让我们来考察一圆,其圆心是坐标原点,而半径为 r_0,我们来找满足在 $r = r_0$ 时具有边界条件 ⑥ 的双调和函数. 前面已指出,所找的函数 u 能表为如下的和式

$$u = (r^2 - r_0^2)u_1 + u_2$$

上式的 u_1 与 u_2 都是调和函数. 自边界条件得

$$u_2 \big|_{r=r_0} = g \qquad ⑯$$

由此看出,u_2 是拉普拉斯方程的第一种边界问题的解,并且可以用泊松积分

$$u_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(r_0^2 - r^2)g}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\alpha - \theta)} \mathrm{d}\alpha \qquad ⑰$$

表出.

自第二个边界条件得

$$2r_0u_1 + \frac{\partial u_2}{\partial r}\bigg|_{r=r_0} = h \qquad ⑱$$

用直接微分法不难验证,这函数

$$2r_0u_1 + \frac{r}{r_0} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial r} \qquad ⑲$$

能满足拉普拉斯方程,所以能用泊松积分

$$2r_0u_1 + \frac{r}{r_0} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial r} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(r_0^2 - r^2)h\mathrm{d}\alpha}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\alpha - \theta)} \qquad ⑳$$

表出. 将式 ⑰ 对 r 微分,并以 $\frac{\partial u_2}{\partial r}$ 的值代入公式 ⑳,就找到 u_1. 在公式 ⑮ 中,用 u_1 与 u_2 的表达式替换 u_1 与 u_2,则得

$$u = \frac{1}{2\pi r_0}(r^2 - r_0^2)^2\left(\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{-h\mathrm{d}\alpha}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\alpha - \theta)} + \int_0^{2\pi} \frac{g(r_0 - r\cos(\alpha - \theta))\mathrm{d}\alpha}{(r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\alpha - \theta))^2}\right)$$

试题篇

第四章

第二十三回　创意新　问题征解播遐迩[①]
　　　　　　解答巧　构思奇特不凡响

美国数学协会主办的《美国数学月刊》,其"问题征解栏"创始于1894年,早已声播遐迩.该栏问题的提出者及解答者来自世界各地(据1954年统计达98个国家和地区),因而有较广泛的基础与影响.这些问题往往是数学家及数学爱好者在教学科研中的妙手偶得,因此不落一般试题的窠臼;而不少解答也出自名家手笔,因此构思奇巧不同凡响,想一想著名数学家哈尔莫斯为其主编,波利亚、爱尔特希等都是积极供稿者便可知.第3 043题,刊登在第31卷9月号中的问题便是迪利克雷问题.

设 T 表示 xy 平面的一个开连续统,例如一个光滑的单闭曲线的内部.那么,若 V 在 T 内连续,且对一切具连续二阶导数而在 T 边界上为零的函数 V 有

$$\iint_T V\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

则 V 是调和的,即满足拉普拉斯方程 $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0$(若 V 在 T 的边界点的邻域内变为无穷大,则应进一步限制 V 使积分有意义).

① 本回引自文献[41].

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2}=0$$

这个问题此处的叙述有一个失误.那里给出的条件是 V 在 T 的边界上变为零.

正确的表述应该是:

设 T 表示 xy 平面的一个开连续统,譬如说一个光滑简单闭曲线的内部.那么,若 V 在 T 内连续,且对一切在 T 内具连续二阶导数的函数 V,有

$$\iint_T V\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0 \qquad ①$$

以及使(i) 在 T 的边界上 V 的法向导数为零,或(ii) 边界不是光滑曲线时,当 P 趋于 T 的任何边界点,V 在点 P 的一阶导数趋于零,则在 T 内 V 是调和的,即 V 满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0$$

在位势论中有一个熟知的结论:区域 T 内的调和函数,在任何一点上的值是 T 内以 P 为圆心任何圆上的值的算术平均.1906 年科伯证明了这个定理的逆定理也成立(见柏林数学会会报,Vol.5(1906):39)即 V 在 T 内连续,且设在 T 的每一点 P 上的值是 T 内以 P 为心任何圆上它的值的算术平均值,则 V 是调和的.

用反证法,假设现在问题中的函数 V 不满足科伯定理的假设,则必有 T 内的点 P,及以 P 为心整个在 T 内的圆 C,使

$$V(P)\neq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}V(B)\mathrm{d}\theta \qquad ②$$

其中 B 是 C 上具极角 θ 的一点.我们将证明关系 ② 是不正确的,所以 V 必满足科伯定理的条件,因而是调和的.

借助于以 P 为极点的极坐标,在 V 上的条件 ① 对一切许可的 V 可写成

$$\iint_T V\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=0 \qquad ③$$

在这些 V 中,我们着手构造其中的一个.令 c 表 C 的半径,令 α 是一正参数,限制它小于 $c/3$,且小于 C 与 T 的边界间的最小距离.再使 $\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right)$ 等于一个连续函数 $f(r)$,在 $0\leqslant r\leqslant\alpha$ 时,它是正的,在 $c-\alpha\leqslant r\leqslant c+\alpha$ 时它是负的,在别处它是零,且使 $\int_0^{c+\alpha}f(r)\mathrm{d}r=0$.于是所得的微分方程有一解 V,这函数以及它的一阶、二阶偏导数是连续的,且它的一阶导数在半径为 $r=c+\alpha$ 的圆外为零.这个解是个许可的 V.

现在将 ③ 中关于 θ 的积分(③ 中的 V 是确定的函数) 写为 $\overline{V}(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}V(r,\theta)\mathrm{d}\theta$,有

$$\int_0^a \overline{V}(r)f(r)\mathrm{d}r + \int_{c-a}^{c+a} \overline{V}(r)f(r)\mathrm{d}r = 0$$

若用中值定理,这个方程会导致

$$\overline{V}(\theta'a) = \overline{V}(c + \theta''a), 0 < \theta' < 1, -1 < \theta'' < 1$$

因为 V 是连续的,且最后的方程对 0 附近的一切正 a 都成立,我们断定

$$\overline{V}(0) = \overline{V}(c)$$

所以正如我们所希望的,关系式 ② 被否定了.故原命题正确.

第二十四回 竞赛热 风气蔓延到大学[①]
题目好 拉普拉斯是经典

数学竞赛在中国已经成为一个从小学到大学的一个庞大体系. 当然最顶端当属中国科学院数学研究所主办的全国大学生夏令营数学竞赛. 不过这个赛事只搞了10届. 以后便是各高校各自举办, 其中不乏涉及拉普拉斯方程的优秀试题, 如北京信息工程学院1998年高等数学竞赛最后一题如下.

试题1 令 $u(x,y)$ 于单位圆盘 $D: x^2+y^2<1$ 内有二阶连续偏导数, 且 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$, 则 $\int_{C^+}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s=\pi(1-\mathrm{e}^{-1})$. (这里 $\boldsymbol{n}$ 是 D 的边界 C 的单位外法向量)

解 令 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta)$, 则

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}=\cos\alpha\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\cos\beta\cdot\frac{\partial u}{\partial y}$$

所以 $$\int_{C^+}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s=\int_{C^+}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta\right)\mathrm{d}s=\int_{C^+}\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x=$$

$$\iint_D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{e}^{-r^2}r\mathrm{d}r=$$

$$-\pi\mathrm{e}^{-r^2}\Big|_0^1=\pi(1-\mathrm{e}^{-1})$$

北京建筑工程学院1988年数学竞赛第二大题中的第3题如下.

试题2 将拉普拉斯方程 $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 化成极坐标的形式.

1996年第八届北京市大学生(非数学专业)数学竞赛本科甲组试题八.

试题3 设函数 $f(x,y)$ 在区域 $D: x^2+y^2\leqslant 1$ 上有二阶连续偏导数, 且 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$, 证明: $\iint_D\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2\mathrm{e}}$.

1992年第四届北京市大学生数学竞赛(非数学专业)试题4如下.

试题4 设 $f(t)$ 在 $[1,+\infty)$ 上有连续的二阶导数, $f(1)=0, f'(1)=1$, 且二元函数 $z=(x^2+y^2)f(x^2+y^2)$ 满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

求 $f(t)$ 在 $[1,+\infty)$ 上的最大值.

---

① 本回引自文献[120]、[75].

1990 年第二届北京市大学生(非理科)数学竞赛试题 7 如下.

试题 5 设函数 $u = f(\ln\sqrt{x^2+y^2})$,满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$$

试求函数 f 的表达式.

1987 年美国加利福尼亚大学伯克利分校秋季博士生资格考试题中有一题如下.

令 u 是在 $\mathbf{R}^2$ 上的一个正的调和函数,即 u 满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

证明 u 是一个常数.

证明 令 v 为 u 的调和共轭,于是,$f = u + iv$ 是一个整函数,考虑 $h = e^{-f}$,由于 $u \geqslant 0$, $|h| \leqslant 1$,h 是一个有界的整函数并且由柳维尔定理,它是一个常数,因此,u 也是常数.

第二十五回　读教材　纸上来的终觉浅[①]
做习题　深知此事要躬行

下面一组小问题能帮助我们理解调和函数.

例 1　(1) 若 $u = u(x,y)$ 为调和函数，u^2 是调和函数吗？

(答案：不一定)

(2) 若 $u = u(x,y)$ 为调和函数，对怎样的函数 $f(u) = \varphi(x,y)$，亦为 x,y 的二元调和函数？

(答案：$f(u)$ 为 u 的线性函数时，$f(u)$ 方为 x,y 的调和函数)

(3) 是否存在形如 $u = \varphi\left(\dfrac{x^2+y^2}{x}\right)$ 的调和函数？若存在，试求此调和函数.

(答案：$u = \dfrac{C_1 x}{x^2+y^2} + C_2$)

(4) 证明：(i) 若对调和函数 $u(x,y)$ 的变元，作变换 $x = \varphi(\xi,\eta)$，$y = \psi(\xi,\eta)$，其中 φ 和 ψ 为 ξ,η 的共轭调和函数，则变换后的函数仍为 ξ,η 的调和函数.

(ii) 若 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 为共轭调和函数，且雅可比行列式 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ 在某个域 G 上异于零，则反函数 $x(u,v)$ 与 $y(u,v)$ 也是共轭调和函数.

(5) 试求形如 $ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$ 的最一般的调和函数.

(答案：$u = ax^3 - 3dx^2y - 3axy^2 + dy^3$)

(6) 证明：如图 1 所示，若域 G 是复连通域，且由闭线路 Γ_0 的内部与 $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_n$ 的外部构成(每一个 Γ_i，$i = 1,2,\cdots,n$，都可退缩成一点，且每个 Γ_i 都在其余 $n-1$ 个的外部)，$u(x,y)$ 是域 G 上的调和函数.

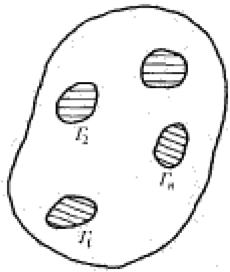


图 1

(7) 证明：为使曲线族 $\varphi(x,y) = c$，$(x,y) \in G$(其中 φ 二次连续可微，族中任何两条曲线无交点，且域中的每一点必在族中一条曲线上)，是某一调和函数的等位线族的充要条件是：关系式 $\dfrac{\Delta\varphi}{(\mathrm{grad}\ \varphi)^2}$ 只依赖于 φ.

---

① 本回引自文献[124].

(8) 令 $u:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ 是由 $u(x,y)=x^3-3xy^2$ 定义的函数,证明 u 是调和的并找一个 $v:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 使由

$$f(x+\mathrm{i}y)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$$

所定义的函数 $f:C\to C$ 为解析的.

(答案:$f(z)=z^3$)

(9) 令 $S\in\mathbf{R}$,且令函数 u 是在 $C\setminus(-\infty,0]$ 中由

$$u(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})=r^s\cos s\theta,\ r>0,\ -\pi<\theta<\pi$$

所定义,证明 u 是一个调和函数.

(10) 令 u 为复平面中的一个实值调和函数,对所有的 z 均满足

$$u(z)\leqslant a\,|\log|z||+b$$

其中,$a,b\in\mathbf{R}^+$,证明 u 是一个常数.

注 (8)、(9)、(10) 为加利福尼亚大学伯克利分校博士资格考试题.

(11) 证明:如果 u 是调和的,则

$$u_x=\frac{\partial u}{\partial x}\ 和\ u_y=\frac{\partial u}{\partial y}$$

也是调和的.

(12) 设对于 $\mathbf{R}$ 中所有的 x 和 y

$$P(x,y)=\sum_{k,l=0}^{n}a_{k,l}x^ky^l$$

证明:p 是调和函数,当且仅当下面三个条件都成立:

(i) 对于 $z\leqslant k,l\leqslant n,k(k-1)a_{k,l-2}+l(l-1)a_{k-2,l}=0$;

(ii) 对于 $0\leqslant l\leqslant n,a_{n-1,l}=a_{n,l}=0$;

(iii) 对于 $z\leqslant k\leqslant n,a_{k,n-1}=a_{k,n}=0$.

(13) 设 u 为 G 内的调和函数,又设 $\overline{B}(a;R)\subset G$,证明

$$u(a)=\frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{\overline{B}(a;R)}u(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(14) 对于 $|z|<1$,设

$$u(z)=\mathrm{Im}\left(\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2\right)$$

证明:u 是调和函数,并且对于所有的 θ,$\lim\limits_{r\to1^-}u(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})=0$.

(15) 设 $f(z)$ 为解析函数,试证

$$\Delta|f(z)|^2=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2=4|f'(z)|^2$$

(16) 证明:若 $f(z)$ 有二阶连续偏导数,则

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=4\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial\bar{z}}$$

从而知，一个调和函数必满足形式微分方程$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$.

(17) 设 $f(z)$ 为解析函数，且 $f(z) \neq 0, f'(z) \neq 0$，则 $\Delta \ln |f'(z)| = 0$，$\Delta \ln |f(z)| = 0$，而 $\Delta |f(z)| > 0$（Δ 为拉普拉斯微分算子）.

(18) 有二定点 $A(-a,0)$，$B(a,0)$ 及一动点 $P(x,y)$，设 $\theta = \angle APB$，证明 $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0$，并确定出使 $\theta + \mathrm{i}v$ 为 $x + \mathrm{i}y$ 的解析函数的 v.

(19) 若 $u(z)$ 与 $v(z)$ 为调和函数，则

(i) $u(v(z))$ 是否为调和函数？

(ii) $u(z) \cdot v(z)$ 是否为调和函数？

(iii) $u(z) + v(z)$ 是否为调和函数.

(20) 设 $f(z) = u + \mathrm{i}v$，$z = x + \mathrm{i}y$ 为解析函数，$\psi(x,y)$ 连续可导，则

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2\right) |f'(z)|^2$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\right) |f'(z)|^2$$

(21) $f(z) = u + \mathrm{i}v$ 为解析，则

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) |f(z)|^p = p^2 |f(z)|^{p-2} |f'(z)|^2$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) |u|^p = p(p-1) |u|^{p-2} |f'(z)|^2, u \neq 0$$

(22) 设 $z = x + \mathrm{i}y$，$f(z) = u + \mathrm{i}v$ 满足柯西－黎曼方程，又设 $W = |f(z)|^2$ 且 $W = F(w)$，则 $(WF)' = 0$，W 为调和函数，$(WF)' \geqslant 0$ 时，W 为次调和函数①（即 $\Delta W \geqslant 0$）.

(23) 证明 $x^2 - y^2 + 2y$ 经变换 $z = W^3$ 后在 W 平面内是调和的.

---

① 经典教材(G&T)中称 $\Delta W \geqslant 0$ 的函数为下调和的，英文为 Subharmonic，直译为次调和.

第二十六回 伯克利 博士学位资格试①
重几何 微分算子不变性

考虑复平面上的一个保形变换

$$w = \frac{z-a}{1-\bar{a}z},\ |a| < 1 \tag{①}$$

$$w = e^{i\vartheta}z \tag{②}$$

由 ① 推得

$$1-|w|^2 = 1-\frac{(z-a)(\bar{z}-\bar{a})}{(1-\bar{a}z)(1-a\bar{z})} = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{a}z|^2} \tag{③}$$

因此 ① 把单位圆 $|z| = 1$ 变为单位圆 $|w| = 1$,单位圆内部变为单位圆内部,变换 ② 也有此性质.并且 ① 把 $z = a$ 变 $w = 0$.

微分式 ① 得

$$dw = \frac{dz}{1-\bar{a}z} + \frac{(z-a)\bar{a}dz}{(1-\bar{a}z)^2} = \frac{1-a\bar{a}}{(1-\bar{a}z)^2}dz \tag{④}$$

③,④ 相除,取绝对值的平方得出经过 ①,② 不变的微分型

$$\frac{|dw|^2}{(1-|w|^2)^2} = \frac{|dz|^2}{(1-|z|^2)^2} \tag{⑤}$$

与此微分二次型相对应的在 ①,② 下不变的微分算子

$$(1-|w|^2)^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial w\partial\bar{w}} = (1-|z|^2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial\bar{z}} \tag{⑥}$$

这就是拉普拉斯算子

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial\bar{z}} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}$$

① 既然把单位圆变为单位圆,则当 $z = e^{i\tau}(0 \leqslant \tau \leqslant 2\pi)$ 时,$w = e^{i\psi}$,即

$$e^{i\psi} = \frac{e^{i\tau}-a}{1-\bar{a}e^{i\tau}} = \frac{1-ae^{-i\tau}}{1-\bar{a}e^{i\tau}}e^{i\tau}$$

这代表变换 ① 在单位圆周上所引起的变化,而式 ④ 变为

$$e^{i\psi}d\psi = \frac{1-a\bar{a}}{(1-\bar{a}e^{i\tau})^2}e^{i\tau}d\tau$$

两者相除得出

$$d\psi = \frac{1-a\bar{a}}{|1-\bar{a}e^{i\tau}|^2}d\tau \tag{⑦}$$

① 本回引自文献[75].

命 $a = \rho e^{i\theta}, \rho < 1$，及

$$p(\rho, \theta - \tau) = \frac{1 - |a|^2}{|1 - \bar{a}e^{i\tau}|^2} = \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho\cos(\theta - \tau) + \rho^2} \tag{⑧}$$

这个函数称为泊松核，因此，泊松核是单位圆经 ① 变为自身所得出的函数行列式，泊松核有以下特点.

(i) 正定性，当 $\rho < 1$ 时，$p(\rho, \theta - \tau) > 0$.

(ii) $\lim\limits_{\rho \to 1} p(\rho, \theta - \tau) = \begin{cases} 0, 若\ \theta \neq \tau \\ \infty, 若\ \theta = \tau \end{cases}$.

(iii) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\rho, \theta - \tau)\mathrm{d}\tau = 1$.

这个结果也是显然的，其理由是，由 ⑦ 得

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\rho, \theta - \tau)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = 1$$

性质(ii) 与(iii) 合并称为"δ 函数的性质".

(iv) 当 $\rho < 1$ 时，它适合拉普拉斯方程(极坐标形式)

$$\rho\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \tag{⑨}$$

要证明这一点也是十分容易的，因为

$$p(\rho, \theta - \tau) = 1 + \frac{\rho e^{i(\theta - \tau)}}{1 - \rho e^{i(\theta - \tau)}} + \frac{\rho e^{-i(\theta - \tau)}}{1 - e^{-i(\theta - \tau)}} =$$

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\cos n(\theta - \tau)$$

而 $\rho^n\cos n(\theta - \tau)$ 显然适合于 ⑨，因而 $p(\rho, \theta - \tau)$ 也适合于 ⑨. 下面我们可以来解单位圆上(边界)的迪利克雷问题.

给一个以 2π 为周期的连续函数 $\varphi(\theta)$，求一在圆内适合于拉普拉斯方程的函数 $u(\rho e^{i\theta})$，且

$$\lim_{\rho \to 1} u(\rho e^{i\theta}) = \varphi(\theta) \tag{⑩}$$

这就是著名的迪利克雷问题.

我们分以下几个步骤来解决这一问题.

(1) 先证"均值公式"：如果 $u(\rho e^{i\theta})$ 在圆内及圆周上连续，在圆内有二阶连续偏导数，而且适合拉普拉斯方程 ⑨，则

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\theta})\mathrm{d}\theta = u(0), 0 \leqslant \rho \leqslant 1 \tag{⑪}$$

证法是：由拉普拉斯方程知

$$\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\rho e^{i\theta})d\theta\right)\right)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}u(\rho e^{i\theta})d\theta=$$

$$-\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}u(\rho e^{i\theta})\Big|_0^{2\pi}=0$$

求积分得

$$\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\rho e^{i\theta})d\theta\right)=k$$

当 $\rho=0$ 时,可见 $k=0$,再积分,得

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\rho e^{i\theta})=c$$

这是一个与 ρ 无关的常数,再取 $\rho=0$,得式 ①.

(2) 做 ① 中的变换,命 $v(z)=u(w)$,则

$$v(e^{i\tau})=u(e^{i\psi}),v(a)=u(0)$$

式 ⑪ 变为($\rho=1$)

$$v(a)=u(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(e^{i\psi})d\psi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}v(e^{i\tau})\frac{1-|a|^2}{|1-\bar{a}e^{i\tau}|^2}d\tau$$

命 $a=\rho e^{i\theta}$ 并换符号,则得泊松公式

$$u(\rho e^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(e^{i\tau})\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\tau)+\rho^2}d\tau \qquad ⑫$$

换句话说,如果 $u(\rho e^{i\theta})$ 是一个调和函数,则有以上公式成立.

1992 年美国加利福尼亚大学伯克利分校博士学位资格考试中有一题为:

令 s 是一个实数,且令函数 u 是在 $C\setminus(-\infty,0]$ 中由

$$u(re^{i\theta})=r^s\cos s\theta,r>0,-\pi<\theta<\pi$$

所定义,证明 u 是一个调和函数.

(3) 最大(最小) 值原理.

一个单位圆内的调和函数,如果不是常数,则一定在圆周上取最大(最小)值.

如果 $u(\rho e^{i\theta})$ 最大,由 ⑫ 可知

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(e^{i\tau})\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\tau)+\rho^2}d\tau\leqslant$$

$$u(\rho e^{i\theta})\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1-\rho^2)d\tau}{1-2\rho\cos(\theta-\tau)+\rho^2}=u(\rho e^{i\theta})$$

并且仅当 u 是常数时取等号,不然,总有一段弧,在其上 $u(e^{i\tau})<u(\rho e^{i\theta})$,因而上式取不等号.

同样最小值也在圆周上取到.

(4) 迪利克雷问题解的唯一性.

如果有两个解 $u(\rho e^{i\theta}),v(\rho e^{i\theta})$ 适合于 ⑩,则

$$w(\rho e^{i\theta}) = u(\rho e^{i\theta}) - v(\rho e^{i\theta})$$

也是调和函数，在圆周上这函数等于 0，即 $w(\rho e^{i\theta}) = 0$，由 ③ 可知，在闭圆 $|z| \leqslant 1$ 上，$w(\rho e^{i\theta})$ 的最大值小于等于 0，最小值大于等于 0，因而 $w \equiv 0$，因而解是唯一的.

(5) 解的存在性.

考虑泊松积分

$$u(\rho e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\rho, \theta - \tau)\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad ⑬$$

这函数有以下一些性质；首先由性质(iv) 可知 $u(\rho e^{i\theta})$ 在圆内适合拉普拉斯方程，其次由"δ 函数" 性质可以证明式 ⑩，由性质(iii) 知

$$\varphi(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\rho, \theta - \tau)\varphi(\theta)\mathrm{d}\tau$$

因为 $\varphi(\theta)$ 是连续函数，给了 ε，存在 δ 使 $|\theta - \tau| < \delta$ 时

$$|\varphi(\theta) - \varphi(\tau)| < \varepsilon \qquad ⑭$$

把积分 $\quad u(\rho e^{i\theta}) - \varphi(\theta) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} p(\rho, \theta - \tau)(\varphi(\tau) - \varphi(\theta))\mathrm{d}\tau$

分为两部分，由 ⑭ 可知

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-\tau|<\delta} p(\rho, \theta - \tau)(\varphi(\tau) - \varphi(\theta))\mathrm{d}\tau\right| \leqslant \varepsilon \cdot \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\rho, \theta - \tau)\mathrm{d}\tau = \varepsilon$$

另一方面，当 $|\theta - \tau| \geqslant \delta$ 时，可以取 ρ 充分接近 1 使

$$p(\rho, \theta - \tau) < \frac{\varepsilon}{2M}$$

这里 M 是 $|\varphi(\tau)|$ 的上界，于是

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-\tau|\geqslant\delta} p(\rho, \theta - \tau)(\varphi(\tau) - \varphi(\theta))\mathrm{d}\tau\right| < 2M \cdot \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon}{2M}\mathrm{d}\tau = \varepsilon$$

合并之，可知当 ρ 充分接近于 1 时

$$|u(\rho e^{i\theta}) - \varphi(\theta)| < 2\varepsilon$$

即

$$\lim_{\rho\to 1} u(\rho e^{i\theta}) = \varphi(\theta)$$

因而公式 ⑬ 解决了单位圆的迪利克雷问题的存在性部分.

离散篇

第五章

第二十七回 华罗庚 深入之后能浅出[①] 比解析 差分方法胜一筹

华罗庚在中国人眼里是一位学术英雄.借用在美国纳斯达克上市的华友世纪通讯有限公司创始人之一经济学博士向松祚在《五常思想》(朝华出版社,2006)中序言的一段话说:

> "何谓英雄?登高一呼,万众景从,那是政治军事的伟大领袖.学术思想之英雄又如何?最好的描述应当是韦伯首创的"奇理斯玛"(Charisma).那是指具有原创能力的人物所拥有的特殊天赋.这种天赋来自宇宙中最有力、最实在、最重要的源泉,奇理斯玛是源头活水,拥有奇理斯玛天赋的人物,具有一种特殊的创造力、魅力和影响力.奇理斯玛式的学术大师,他们的思想、语言、风格将有无数人追随和模仿,学术思想的传统和范式便由此形成,华罗庚先生的风格就是直接、简洁、深入浅出,注重各分支之间的联系."

① 本回引自文献[125].

华罗庚教授指出：

在微分方程的求解中，我们常用差分方法，这是一个应用十分广泛的方法．简言之，这一方法是将微分方程的求解问题化为代数方程（即所谓差分方程）的求解问题．为了简单起见，作为例子，我们现在扼要地介绍一下用这一方法来处理拉普拉斯方程的迪利克雷问题的过程．在求解差分方程时，我们将要谈到代数方法与蒙特卡罗方法，并作一些分析比较．

问题：命 G 是一个有光滑边界的有界的平面单联通区域，在它的边界 Γ 上给了一个连续函数 $f(x,y)$，求连续函数 $u(x,y)$ 适合于

（1）在 G 内满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad ①$$

（2）在 Γ 上取已给函数 f 的值．

关于 u 的近似求法的步骤如下．

（i）网格化．在平面上作与坐标轴平行的两族曲线

$$x=mh,y=nh$$

这里 h 是某一正数，而 m,n 为所有的整数值（图 1）．这样的区域 G 当然为一些以 h 为边长的正方形所覆盖．正方形的顶点称为整点．与 G 有公共点的正方形所成的区域以 G^* 表之．G^* 是一多边形．命 Q 是 G^* 的边界上的整点，假定 Γ 与 Q 的最近点是 P（如果有许多点有相同的距离，则可取其中的任意一点），我们定义 $f(Q)=f(P)$．这样在 G^* 的边界 Γ^* 的整点上都有了函数值 $f(Q)$．

（ii）差分化．用

$$\frac{u(x+h,y)-2u(x,y)+u(x-h,y)}{h^2}$$

及

$$\frac{u(x,y+h)-2u(x,y)+u(x,y-h)}{h^2}$$

各代替二阶偏微商 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 及 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，则拉普拉斯方程可以改写为

$$u(x,y)=\frac{1}{4}(u(x+h,y)+u(x-h,y)+u(x,y+h)+u(x,y-h)) \qquad ②$$

也就是在非边界整点 (x,y)，函数 $u(x,y)$ 的数值等于其东、南、西、北四邻近整点的函数值的平均．

（iii）问题一变成为：已知多边形边界整点的函数值而求内部整点的函数值的问题了，即问题化为求解线性方程组 ②．

但是由此得到的是否会是矛盾方程组？是否仅有唯一的解？都是必须解答的问题．我们现在先举一个简单的例子，然后就直觉地“看出”一般的理论了．

不妨取 $h=1$，给了八点的函数值 $u(2,0),u(1,1),u(0,2),u(-1,1),u(-2,0),u(-1,-1),u(0,-2),u(1,-1)$，求 $u(0,0),u(1,0),u(0,1),u(-1,0),u(0,-1)$ 五值.①

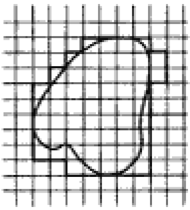


图 1

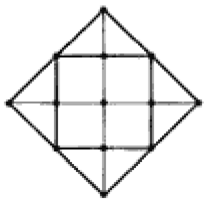


图 2

将方程式全部列出：

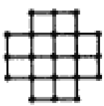
$$\begin{cases} u(0,0)=\frac{1}{4}(u(1,0)+u(0,1)+u(-1,0)+u(0,-1)) \\ u(1,0)=\frac{1}{4}(u(2,0)+u(1,1)+u(0,0)+u(1,-1)) \\ u(0,1)=\frac{1}{4}(u(1,1)+u(0,2)+u(-1,1)+u(0,0)) \\ u(-1,0)=\frac{1}{4}(u(0,0)+u(-1,1)+u(-2,0)+u(-1,-1)) \\ u(0,-1)=\frac{1}{4}(u(1,-1)+u(0,0)+u(-1,-1)+u(0,-2)) \end{cases} \quad ③$$

由消去法得出

$$u(0,0)=\frac{1}{12}(u(2,0)+u(0,2)+u(-2,0)+u(0,-2))+\frac{1}{6}((u(1,1)+u(-1,1)+u(-1,-1)+u(1,-1)) \quad ④$$

$$u(1,0)=\frac{13}{48}u(2,0)+\frac{7}{24}(u(1,1)+u(1,-1))+\frac{1}{24}(u(-1,1)+u(-1,-1))+\frac{1}{48}(u(0,2)+u(-2,0)+u(0,-2)) \quad ⑤$$

---

① 不难看出，对于这个例子，图 2 与  图形是等价的.

等等.

这些系数$\frac{1}{6},\frac{1}{12},\frac{13}{48},\cdots$的意义是什么?我们以后再交代.先作以下的代数处理,把这十三个点的函数值作为一个列矢量的分量,则式 ③ 可以写成

$$
\begin{bmatrix} u(0,0)\\ u(1,0)\\ u(0,1)\\ u(-1,0)\\ u(0,-1)\\ u(1,1)\\ u(-1,1)\\ u(-1,-1)\\ u(1,-1)\\ u(2,0)\\ u(0,2)\\ u(-2,0)\\ u(0,-2) \end{bmatrix}
=
\left[\begin{array}{ccccc:cccccccc}
0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\frac{1}{4} & & & & & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0\\
\frac{1}{4} & & & & & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0\\
\frac{1}{4} & & \mathbf{0} & & & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0\\
\frac{1}{4} & & & & & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}\\
\hdashline
 & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & & \mathbf{0} & & \\
 & & & & & & & & 1 & & & & \\
 & & \mathbf{0} & & & & & & & 1 & & & \\
 & & & & & & & \mathbf{0} & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & & & 1 & \\
 & & & & & & & & & & & & 1
\end{array}\right]
\begin{bmatrix} u(0,0)\\ u(1,0)\\ u(0,1)\\ u(-1,0)\\ u(0,-1)\\ u(1,1)\\ u(-1,1)\\ u(-1,-1)\\ u(1,-1)\\ u(2,0)\\ u(0,2)\\ u(-2,0)\\ u(0,-2) \end{bmatrix}
\qquad ⑥
$$

可以抽象得

$$
\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P} & \boldsymbol{Q} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \qquad ⑦
$$

这里 v 是边界整点的函数值所成的列矢量,而 u 是内部整点的函数值所成的列矢量.这种表达法对一般的问题都对.它实质上表达了两件事:

a.内部整点的函数值可以表为其东、南、西、北四邻近整点的函数值的平均.

b.边界点仍然是边界点.

因为一个整点只能是不超过四个整点的邻近点,所以方阵 $\boldsymbol{P}$ 的每列元素之和皆小于等于 1.现在来证明 $\boldsymbol{P}^2$ 的每列元素之和皆小于 1.盖若不然,由于 $\boldsymbol{P}$ 的元素只能取 0 与 1/4 二值,故 $\boldsymbol{P}$ 必包有子方阵

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

但是因为不能有两个不同的整点具有同样的东、南、西、北四邻近整点，所以这是不可能的. 由此 $\boldsymbol{P}^2$ 的每列元素之和皆小于 1. 由此可知 $\boldsymbol{P}^2$ 的特征根的绝对值皆小于 1，从而

$$\lim_{n \to \infty} \boldsymbol{P}^n = 0$$

而且

$$\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{PQ} + \boldsymbol{P}^2\boldsymbol{Q} + \cdots$$

收敛(收敛于$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P})^{-1}\boldsymbol{Q}$). 将式 ⑦ 连续迭代 n 次得

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P} & \boldsymbol{Q} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}^n\boldsymbol{Q} & \boldsymbol{PQ} + \boldsymbol{P}^2\boldsymbol{Q} + \cdots + \boldsymbol{P}^{n-1}\boldsymbol{Q} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

命 $n \to \infty$，则得

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0Q} & \boldsymbol{PQ} + \boldsymbol{P}^2\boldsymbol{Q} + \cdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

因此

$$u = (\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{PQ} + \boldsymbol{P}^2\boldsymbol{Q} + \cdots)v = (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}^2 + \cdots)\boldsymbol{Q}v \qquad ⑧$$

这就是问题的解答. 也就是当给了边界整点的函数值 v，可以由 ⑧ 算出内部整点的函数值 u 来，这建议了以下的算法.

(1) 代数法. 把 $\boldsymbol{u}$ 写成列矢量$(u_1, \cdots, u_l)'$，$\boldsymbol{v}$ 写成$(v_1, \cdots, v_k)'$，如果内部整点[①] u_i 与边界整点 v_i 相邻，则在 $\boldsymbol{Q}$ 的(i, j) 位置记上 1/4，否则记上 0. 如果内部整点 u_i 与 u_j 相邻，则在 $\boldsymbol{P}$ 的(i, j) 位置记上 1/4，否则记上 0. 这样得出 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{Q}$，用以下的格式算出 ⑧ 来.

	$\boldsymbol{Q}v$	
$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{PQ}v$	$R_1 = \boldsymbol{Q}v + \boldsymbol{PQ}v$
$\boldsymbol{P}^2$	$\boldsymbol{P}^2 R_1$	$R_2 = R_1 + \boldsymbol{P}^2 R_1$
$\boldsymbol{P}^4$	$\boldsymbol{P}^4 R_2$	$R_3 = R_2 + \boldsymbol{P}^4 R_2$
$\boldsymbol{P}^8$	$\boldsymbol{P}^8 R_3$	$R_4 = R_3 + \boldsymbol{P}^3 R_3$
…	…	…

① 内部整点与边界整点亦分别记之为 $u_1, \cdots, u_l$ 与 $v_1, \cdots, v_k$，请勿混淆.

用到我们的例子上，由于

$$P^3 = \frac{1}{4}P$$

所以

$$Q + PQ + P^2Q + \cdots = (I + (P + P^2)(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots))Q =$$

$$(I + \frac{4}{3}(P + P^2))Q =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{7}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & \frac{7}{24} & \frac{13}{48} & \frac{1}{48} & \frac{1}{48} & \frac{1}{48} \\ \frac{7}{24} & \frac{7}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{48} & \frac{13}{48} & \frac{1}{48} & \frac{1}{48} \\ \frac{1}{24} & \frac{7}{24} & \frac{7}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{48} & \frac{1}{48} & \frac{13}{48} & \frac{1}{48} \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & \frac{7}{24} & \frac{7}{24} & \frac{1}{48} & \frac{1}{48} & \frac{1}{48} & \frac{13}{48} \end{bmatrix}$$

必须指出，这儿所介绍的计算程序比解方程组的普遍程序更快速些.

现在再来看看 ④，⑤ 中系数的几何意义，看一下式 ④ 中的$\frac{1}{6}$ 及$\frac{1}{12}$可能会想到：由(0,0) 出发到(0,2) 有一条直路，到(1,1) 有两条路“⌈”与“⌋”，一共有 12 条路，因而到(0,2) 的可能性是$\frac{1}{12}$，而到(1,1) 的可能性是$\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ 等等.

这种讲法是有道理的，但不易推广. 请看下面的说法：从(0,0) 到其东、南、西、北各邻近点的可能性各占$\frac{1}{4}$. 但这四点均非边界整点，因而由(0,0) 一步到达边界的可能性是零.

任何一内点到其四邻点的可能性都是$\frac{1}{4}$. 因此从(0,0) 走两步，共 16 种可能性，其中到一顶点的各有一种(共四种)，到一边点的各有二种(共八种). 进一步退一步仍在原点的四种. 因此任意走两步达到每一顶点的可能性是$\frac{1}{16}$，达到每一边点的可能性是$\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$，仍回原地的可能是$\frac{1}{4}$.

走三步不可能由(0,0) 到达边界点.

再看走四步的情况，走两步已达边界的情况不谈了. 后二步依然从(0,0) 出发，但现在到边界点的可能性要乘上$\frac{1}{4}$ 了. 即由(0,0) 走四步达到每一顶点的可能性是$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16}$，达到每一边点的可能性是$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8}$. 而返回原地的可能性是

$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$.

五步不能，而六步的可能性各为

$$\frac{1}{4^2}\cdot\frac{1}{16},\frac{1}{4^2}\cdot\frac{1}{8},\frac{1}{4^2}\cdot\frac{1}{4}$$

等等. 由(0,0) 出发走奇数步达到边界点的可能性是没有的. 走 $2l$ 步达到每一顶点的可能性是

$$\frac{1}{4^{l-1}}\cdot\frac{1}{16}$$

达到每一边点的可能性是

$$\frac{1}{4^{l-1}}\cdot\frac{1}{8}$$

而返回原地的可能性是

$$\frac{1}{4^l}$$

因此，达到每一顶点的可能性是

$$\frac{1}{16}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16}+\frac{1}{4^2}\cdot\frac{1}{16}+\cdots=\frac{1}{16}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots\right)=\frac{1}{16}\left(1-\frac{1}{4}\right)^{-1}=\frac{1}{12}$$

而达到每一边点的可能性是

$$\frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots\right)=\frac{1}{6}$$

返回原地的可能性是

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{4^l}=0$$

这就是概率论中的随机游动.

再看式⑤中 $\frac{13}{48}$ 的意义：由(1,0)一步可能到达(2,0)，可能性是 $\frac{1}{4}$. 由(1,0)走一步不到边界点只可能到(0,0)，可能性是 $\frac{1}{4}$，以后的情况与从(0,0) 出发相同. 因此走一步以上达到(2,0) 的可能性是 $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{12}$. 总的可能性是

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{12}=\frac{13}{48}$$

同样到(1,1)(或(1, -1)) 的可能性是

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{7}{24}$$

到其他的边界点必经(0,0)，因此就是(0,0) 到达这些点的可能性乘以 $\frac{1}{4}$，即得

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{12}=\frac{1}{48}\text{ 与 }\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{24}$$

从这一简单的例子，不难直觉地“看出”一般的理论．这也建议我们用概率方法来解决“拉普拉斯方程的边界值问题”．实质上，是解决“差分化后的代数方程组”．

（2）蒙特卡罗法（或概率法）．我们先一般地定义二维随机游动如下：设有一质点从 G^* 的某一整点出发，以等概率 1/4 向其东、南、西、北四相邻整点移动一步，然后再以同样的方式，从新的位置向其相邻的四整点处移动一步，如此继续下去，直到达到某一边界整点，游动便告终止．如图 3 所示，设随机游动的一条路线是

$$\gamma_A : A \to A_1 \to \cdots \to A_{l-1} \to Q \in \Gamma^*$$

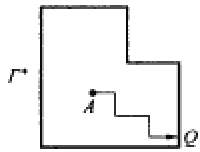


图 3

则定义随机变量的值为

$$\xi = \xi(\gamma_A) = f(Q)$$

此处 $f(Q)$ 为边界整点 Q 的函数值，若 Q 为边界整点，则定义

$$\xi = \xi(\gamma_Q) = f(Q)$$

随机变量 ξ 的数学期望 $E(\xi)$ 即方程组 ② 的解．换言之

$$E(\xi(\gamma_A)) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} E(\xi(\gamma_{A_{1i}})) \qquad ⑨$$

及若 $A \in G^*$

$$E(\xi(\gamma_Q)) = f(Q) \qquad ⑩$$

若 $B \in \Gamma^*$，此处 $A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}$ 分别为 A 的东、南、西、北四邻点．

命 $P(\gamma_A)$ 表示循路线 γ_A 游动的概率．则

$$P(\gamma_A) = \frac{1}{4^l}$$

因此

$$E(\xi(\gamma_A)) = \sum_{\gamma_A} \xi(\gamma_A) P(\gamma_A)$$

此处右端为对一切从 A 出发的游动路线求和．由 A 出发，第一步必然是走到其东、南、西、北四邻点 $A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}$ 中的一个，然后再继续游动．因此

$$E(\xi(\gamma_A)) = \sum_{i=1}^{4} \sum_{\gamma_{A_{1i}}} \xi(\gamma_{A_{1i}}) P(A \to A_{1i}) P(\gamma_{A_{1i}})$$

由于 $P(A \to A_{1i}) = \frac{1}{4}$，所以

$$E(\xi(\gamma_A)) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} \sum_{\gamma_{A_{1i}}} \xi(\gamma_{A_{1i}}) P(\gamma_{A_{1i}}) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} E(\xi(\gamma_{A_{1i}}))$$

此即式 ⑨．其次当 $Q \in \Gamma^*$ 时，只有一条游动路线，即停止不动．因此

$$E(\xi(\gamma_q)) = \sum_{\gamma_Q} \xi(\gamma_Q) P(\gamma_Q) = \xi(\gamma_Q) = f(Q)$$

故得式 ⑪.

设对 ξ 进行了 N 次观察得到

$$\xi_1,\cdots,\xi_N$$

则根据大数定律可知,对于任意 $\varepsilon>0$ 皆有

$$\lim_{N\to\infty}P\left(\left|E(\xi)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_i\right|\leqslant\varepsilon\right)=1$$

因此当 N 充分大时

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_i$$

就可以作为 $E(\xi)$(即解答)的近似值.

随机游动一般是用物理方法或者用数学方法产生的随机数来实现的.在此不详谈了.这里说一个通俗的办法:用粉笔将 G^* 画在围棋盘上.如果要求某点的函数值,可以先在此做一记号,再放上一个棋子,用标有东、南、西、北的正四面体骰子(见图 4)投掷,如果落地的一面是东(或南、西、北),则向东(或南、西、北)走一步,再掷再走,一直到达边界为止.这样便得到一条随机游动,边界点的函数值即游动的随机变量的值 ξ.进行充分多次的游动(设为 N 次),记下 ξ 对这 N 次游动的值

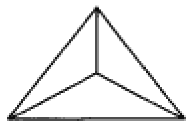


图 4

$$\xi_1,\cdots,\xi_N$$

其算术平均就是所欲求点的函数值的近似值.

结论　差分方法的误差由三部分构成:

(1) 网格化时,移动边界值所产生的误差.

(2) 差分化时,把微商换成差分的误差.

(3) 解差分方程时,代数法产生的是普遍的误差,而蒙特卡罗法产生的是概率的误差.

因此,蒙特卡罗法的误差比代数法的误差更大些,亦更不可靠些.但另一方面,蒙特卡罗方法的计算程序特别简单,而且如果我们只须要求得某些整点的函数值,而不是全部整点的函数值,用这一方法就更加经济了.

有些解析公式看来不错,似乎是很解决问题的,甚至于彻底解决问题的.但如果不假思索地加以运用却会被引入迷途.如果较全面地理解"连续"与"离散"间的关系,这些失误是完全可以避免的!并且与此相反,反而有相辅相成之妙,也就是解析表达式具有启示新的计算方法的作用,而不仅仅是理论上的重要性.我们仍旧以拉普拉斯方程的迪利克雷问题为例子,并且取区域为单位圆.拉普拉斯方程的极坐标形式是

$$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0 \qquad ①$$

问题 求连续函数 $u(\rho,\theta)$，它在单位圆内适合 ①，而在圆周 Γ 上与已给的连续函数相符合，即

$$u(\rho,\theta)\Big|_{\rho=1}=\varphi(\theta) \tag{②}$$

今后常假定 $\varphi(\theta)$ 为 $[0,2\pi]$ 中有 $r, r\geqslant 2$ 阶连续微商，而且是以 2π 为周期的函数，并且假定 $|\varphi^{(r)}(\theta)|< C$. 将 $\varphi(\theta)$ 展开成傅里叶级数

$$\varphi(\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos m\theta+b_m\sin m\theta) \tag{③}$$

此处

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)\cos m\theta\mathrm{d}\theta, b_m=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)\sin m\theta\mathrm{d}\theta \tag{④}$$

容易看出

$$\rho^m\cos m\theta,\rho^m\sin m\theta,\quad m=0,1,2,\cdots \tag{⑤}$$

都是 ① 的解，而且分别以 $\cos m\theta$ 与 $\sin m\theta$ 为边界值. 因此可以希望

$$u(\rho,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos m\theta+b_m\sin m\theta)\rho^m \tag{⑥}$$

为 ① 适合 ② 及 ③ 的解. 由于

$$a_m=O\left(\frac{1}{m^r}\right),b_m=O\left(\frac{1}{m^r}\right)$$

所以易见 ⑥ 的确是 ① 适合 ② 及 ③ 的解. 因为

$$\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\rho^m\cos m\theta=R\left(\frac{1}{1-\rho e^{i\theta}}\right)-\frac{1}{2}=$$

$$\frac{1-\rho\cos\theta}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}-\frac{1}{2}=\frac{1-\rho^2}{2(1-2\rho\cos\theta+\rho^2)}$$

所以由 ④，⑥ 得

$$u(\rho,\theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\psi)\left(\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}(\cos m\theta\cos m\psi+\sin m\theta\sin m\psi)\rho^m\right)\mathrm{d}\psi=$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\psi)\left(\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\rho^m\cos m(\theta-\psi)\right)\mathrm{d}\psi=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\psi)\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\psi)+\rho^2}\mathrm{d}\psi \tag{⑦}$$

这称为泊松公式.

这是解答 $u(\rho,\theta)$ 的解析公式. 这公式的确很不错，似乎把问题彻底解决了. 但是仔细想一下，是否真的解决问题了呢？如果 $\varphi(\psi)$ 给了之后，能够算出积分 ⑦(即找到原函数)，则问题的确圆满解决了. 但如果算不出积分 ⑦(这种情形比能算出的情形多得多)，或者当边界值仅仅由实验给出了若干数据时，就产生了如何近似求解 $u(\rho,\theta)$ 的问题了. 很自然地会想到用数值积分的方法来

近似计算 ⑦.我们将在下面指出这样做会导出很荒谬的结论来.

(1) 矩形公式建议我们用

$$T_n(\rho,\theta) = \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1}\varphi\left(\frac{2\pi l}{n}\right)\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos\left(\theta-\frac{2\pi l}{n}\right)+\rho^2} \quad ⑧$$

来逼近 $u(\rho,\theta)$,现在来看看当 $\rho \to 1-0$ 时的情况

$$\lim_{\rho\to 1-0} T_n(\rho,\theta) = \begin{cases} 0, & \text{当 } \theta \neq \frac{2\pi l}{n}, \\ & \text{或 } \theta = \frac{2\pi l}{n} \text{ 而 } \varphi\left(\frac{2\pi l}{n}\right) = 0 \quad ,0 \leqslant l < n \\ \infty, & \text{当 } \theta = \frac{2\pi l}{n}, \\ & \varphi\left(\frac{2\pi l}{n}\right) \neq 0 \quad ,0 \leqslant l < n \end{cases} \quad ⑨$$

因此用 $T_n(\rho,\theta)$ 来逼近 $u(\rho,\theta)$ 是十分荒谬的.

(2) 我们在泊松积分中,用阶梯函数

$$\varphi^*(\theta) = \varphi\left(\frac{2\pi l}{n}\right)$$

其中

$$\frac{2\pi l}{n} \leqslant \theta < \frac{2\pi(l+1)}{n} \quad ,0 \leqslant l < n \quad ⑩$$

来代替 $\varphi(\theta)$.换言之,用

$$R_n(\rho,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi^*(\psi)(1-\rho^2)}{1-2\rho\cos(\psi-\theta)+\rho^2}\mathrm{d}\psi \quad ⑪$$

来逼近 $u(\rho,\theta)$.由于

$$\log(1-\rho e^{i\theta}) = -\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(\rho e^{i\theta})^m}{m}$$

取虚部即得

$$\sum_{m=1}^{\infty}\rho^m\frac{\sin m\theta}{m} = \tan^{-1}\frac{\rho\sin\theta}{1-\rho\cos\theta}$$

因此

$$R_n(\rho,\theta) = \sum_{l=0}^{n-1}\frac{\varphi\left(\frac{2\pi l}{n}\right)}{2\pi}\int_{\frac{2\pi l}{n}}^{\frac{2\pi(l+1)}{n}}\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\psi)+\rho^2}\mathrm{d}\psi =$$

$$\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1}\varphi\left(\frac{2\pi l}{n}\right) + \frac{1}{\pi}\sum_{l=0}^{n-1}\varphi\left(\frac{2\pi l}{n}\right)\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sin m\left(\frac{2\pi(l+1)}{n}-\theta\right)-\right.$$

$$\left.\sin m\left(\frac{2\pi l}{n}-\theta\right)\right)\frac{\rho^m}{m} = \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1}\varphi\left(\frac{2\pi l}{n}\right) + \frac{1}{\pi}\sum_{l=0}^{n-1}\left(\varphi\left(\frac{2\pi(l+1)}{n}\right)-\right.$$

$$\varphi\left(\frac{2\pi l}{n}\right)\Bigg)\tan^{-1}\frac{\rho\sin\left(\frac{2\pi l}{n}-\theta\right)}{1-\rho\cos\left(\frac{2\pi l}{n}-\theta\right)} \tag{⑫}$$

取 $\theta = C(1-\rho)^{\alpha} \quad \left(\alpha > \frac{1}{2}\right)$. 则

$$\lim_{\rho\to 1-0}\tan^{-1}\frac{\rho\sin\theta}{1-\rho\cos\theta} = \lim_{\rho\to 1-0}\tan^{-1}C(1-\rho)^{\alpha-1}$$

换言之,当 $\rho\to 1-0, \theta\to 0$ 时, $\tan^{-1}\frac{\rho\sin\theta}{1-\rho\cos\theta}$ 可以趋近于 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 中的任意值. 因此若 $\theta_0 = \frac{2\pi l}{n}$, 而且 $\varphi\left(\frac{2\pi(l-1)}{n}\right)\neq\varphi\left(\frac{2\pi l}{n}\right)(0\leqslant l<n)$, 则当 $\rho\to 1-0, \theta\to\theta_0$ 时, $R_n(\rho,\theta)$ 的极限是不存在的, 所以必须给趋限的方法以限制. 例如规定趋限是沿着向径的方向等. 而且可以证明, 虽然如此, 用 $R_n(\rho,\theta)$ 来逼近 $u(\rho,\theta)$, 精密度仍然是不高的. 在此就不作详细讨论了.

以上这两个从解析公式出发的近似计算方法都没有下面这个初等方法更为精密些.

设给了 $n\ (n = 2n'+1)$ 个点的函数值

$$y_l = \varphi\left(\frac{2\pi l}{n}\right), \ |l|\leqslant n'$$

命

$$S_n(\theta) = \sum_{m=-n'}^{n'} C'_m e^{im\theta}$$

$$C'_m = \frac{1}{n}\sum_{l=-n'}^{n'} y_l e^{-2\pi i l m/n} \text{①} \tag{⑬}$$

如果 $\varphi(\theta)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 中有 $r\ (r\geqslant 2)$ 阶连续微商, 而且是周期为 2π 的函数, 并且有 $|\varphi^{(r)}(\theta)| < C$, 则

$$|\varphi(\theta) - S_n(\theta)| < \frac{4C}{(r-1)n'^{r-1}} \tag{⑭}$$

命

$$S_n(\rho,\theta) = \sum_{m=-n'}^{n'} C'_m e^{im\theta}\rho^{|m|} \tag{⑮}$$

则
$$u(\rho,\theta) - S_n(\rho,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(\varphi(\psi)-S_n(\psi))(1-\rho^2)}{1-2\rho\cos(\theta-\psi)+\rho^2}d\psi$$

所以

---

① 为简单起见, 我们用复形式的傅里叶级数. 复形式与实形式的傅里叶级数的关系为

$$C_m = \frac{1}{2}(a_m - ib_m)$$

$$C_{-m} = \frac{1}{2}(a_m + ib_m)(m = 1,2,\cdots)$$

$$|u(\rho,\theta)-S_n(\rho,\theta)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|\varphi(\psi)-S_n(\psi)|(1-\rho^2)}{1-2\rho\cos(\theta-\psi)+\rho^2}\mathrm{d}\psi<$$
$$\frac{4C}{(r-1)n'^{r-1}}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\psi)+\rho^2}\mathrm{d}\psi=$$
$$\frac{4C}{(r-1)n'^{r-1}} \quad ⑯$$

在实际计算时，因为

$$\sum_{m=-l}^{l}\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\rho^{|m|}=\sum_{m=0}^{l}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\rho)^m+\sum_{m=0}^{l}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\rho)^m-1=$$
$$\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(l+1)x}\rho^{l+1}}{1-\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}+\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(l+1)x}\rho^{l+1}}{1-\rho\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}-1=$$
$$\frac{2-2\rho^{l+1}\cos(l+1)x-2\rho\cos x+2\rho^{l+2}\cos lx}{1-2\rho\cos x+\rho^2}-1=$$
$$\frac{1-\rho^2-2\rho^{l+1}\cos(l+1)x-2\rho^{l+2}\cos lx}{1-2\rho\cos x+\rho^2}$$

所以

$$S_n(\rho,\theta)=\sum_{m=-n'}^{n'}\frac{1}{n}\sum_{l=-n'}^{n'}y_l\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}lm/n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}\rho^{|m|}=\frac{1}{n}\sum_{l=-n'}^{n'}y_l\sum_{m=-n'}^{n'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\frac{2\pi l}{n})m}\rho^{|m|}=$$
$$\frac{1}{n}\sum_{l=-n'}^{n'}y_l(1-\rho^2-2\rho^{n'+1}\cos(n'+1)(\theta-\frac{2\pi l}{n})+$$
$$2\rho^{n'+2}\cos n'(\theta-\frac{2\pi l}{n}))/(1-2\rho\cos(\theta-\frac{2\pi l}{n})+\rho^2)) \quad ⑰$$

总之，我们得到

定理 命 $u(\rho,\theta)$ 为方程①满足②的解，此处 $\varphi(\theta)$ 为有 $r\ (r\geqslant 2)$ 阶连续微商，而且是周期为 2π 的函数，并且假定 $|\varphi^{(r)}(\theta)|<C$. 则

$$\left|u(\rho,\theta)-\frac{1}{n}\times\sum_{l=-n'}^{n'}\varphi(\frac{2\pi l}{n})\left(\frac{1-\rho^2-2\rho^{n'+1}\cos(n'+1)(\theta-\frac{2\pi l}{n})}{1-2\rho\cos(\theta-\frac{2\pi l}{n})+\rho^2}+\right.\right.$$
$$\left.\left.\frac{2\rho^{n'+2}\cos n'(\theta-\frac{2\pi l}{n})}{1-2\rho\cos(\theta-\frac{2\pi l}{n})+\rho^2}\right)\right|<\frac{4C}{(r-1)n'^{r-1}} \quad ⑱$$

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2}=0$$

第二十八回　光滑好　泰勒公式能展开
亚光滑　网格算子来帮忙

根据导数的定义，当 h 很小时，近似等式

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \doteq \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{①}$$

成立.

公式 ① 型的近似等式不是唯一的，例如，还有公式

$$f'(x) = \frac{1}{2h}(f(x+h)-f(x-h)) \tag{②}$$

为了证明公式 ②，将 $f(x+h)$ 和 $f(x-h)$ 在点 x 的邻域内依泰勒公式展开，并假定 f''' 是连续的，于是得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2h}(f(x+h)-f(x-h)) = \\
&\frac{1}{2h}\left(f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\frac{h^3}{6}f'''(x+\theta_1 h)\right) - \\
&\frac{1}{2h}\left(f(x)-hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)-\frac{h^3}{6}f'''(x-\theta_2 h)\right) = \\
&f'(x)+\frac{h^2}{6}f'''(x+\theta h)
\end{aligned}$$

其中，$0<\theta_1<1$，$0<\theta_2<1$ 和 $|\theta|<1$.

当函数 $f(x)$ 的光滑性较差时，余项是较低阶的无穷小量，对于任何多个变数的函数的任意阶导数，有类似公式存在，即

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\partial y} = \frac{1}{4h^2}(&u(x+h,y+h)-u(x-h,y+h)- \\
&u(x+h,y-h)+u(x-h,y-h))
\end{aligned}$$

差分方程的边界条件问题是：假设在以 Γ 为边界的区域 D 内，给定了微分方程

$$Lu = f \tag{③$_1$}$$

其中，u 为未知函数，f 为给定的函数，L 为微分算子，并给定了边界条件

$$L_i(u) = \varphi_i，在\ \Gamma_i\ 上\ (i=1,2,\cdots,s) \tag{③$_2$}$$

其中，φ_i 为给定的函数，L_i 为算子，Γ_i 为边界 Γ 的一部分，不同的 Γ_i 可以有公共的一段，在闭区域 $D+\Gamma$ 上，对于任何 h（对于 $0<h<h_0$ 或对于 $h=h_1,h_2,\cdots,\to 0$），给定了某个点集，我们称这个点集为格子网 D_h. 所以，$D_h\subset D+\Gamma$. 假设 R_h 为差分算子（更准确地说，为格子网算子），即把定义在格子网 D_h 上

的任何函数 u_h 变换成定义在某个集合 $D_h^0 \subset D + \Gamma$ 上的函数 $R_h u_h$ 的算子，我们假定，在区域 D 的任何点的任何邻域内，当 h 充分小时，都可以找到属于 D_h 的点和属于 D_h^0 的点.

在格子网 D_h 上考虑差分方程

$$R_h u_h = f \tag{④}$$

其右端定义在 D_h^0 上，并等于方程 $③_1$ 的右端，并考虑边界条件

$$r_{h_i}(u_h) = \varphi_{hi}, i = 1,2,\cdots,s \tag{⑤}$$

s 个边界条件 ⑤ 中的每一个，都是由有限多个等式组成的，这些等式，联系着未知函数 u_h 在格子网D_h 的某些点处的值，出现在 ⑤ 中第 i 个条件内格子网D_h 的点的集合，记成 Γ_{hi}，式 ⑤ 中的右端用下述方式得到：在用差分方程 ④ 代替微分方程 $③_1$ 时，应指明微分方程的边界条件 $③_2$ 换成了差分方程的边界条件 ⑤ 的方法，这样，$③_2$ 中的已知函数 φ_i 就变成定义在某个集合 Γ_{hi}^0 上的相应的函数 φ_{hi}，所以

$$\varphi_{hi} = [\varphi_1, \cdots, \varphi_s]_{hi}$$

其中$[\;]_{hi}$ 为已知算子，可以称它为将 Γ 上的边界条件换成格子网 D_h 的“边界”点集 Γ_{hi}^0 上的条件的变换算子.

第二十九回　差方程　解析表达式难求[①]
拉网格　有限差分来逼近

当我们不能求出方程的解的解析表达式，同时又不能用数值方法解出积分方程时，我们就采用化微分方程为有限差分方程的方法.

在一个自变量的函数 $y=f(x)$ 的情况下，可以不考虑二阶导函数而考虑下列的差商

$$\frac{\Delta^2 f}{h^2}=\frac{1}{h}\left(\frac{\Delta^+ f}{h}-\frac{\Delta^- f}{h}\right)=\frac{(f(x+h)-f(x))-(f(x)-f(x-h))}{h^2}=$$

$$\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2} \quad ①$$

上式中的 $\Delta^+ f=f(x+h)-f(x)$ 与 $\Delta^- f=f(x)-f(x-h)$ 都是(右与左的)第一次差值.

在两个自变量情况下，第二次差值显然等于

$$\Delta_{xx}^2 u=u(x+h,y)+u(x-h,y)-2u(x,y)$$

$$\Delta_{yy}^2 u=u(x,y+h)+u(x,y-h)-2u(x,y)$$

拉普拉斯算子的差商显然有下列的形式，即

$$\frac{\overline{\Delta}_h u}{h^2}=\frac{u(x+h,y)+u(x,y+h)+u(x-h,y)+u(x,y-h)-4u(x,y)}{h^2} \quad ②$$

当我们用有限差分方程代替微分方程时，那么我们就由变量的连续变化转变到离散的变化.

先指定某一正数 h，并且在 (x,y) 平面作出由两组互相垂直的直线所构成的网格，而这些直线彼此间相隔的距离是 h(图 1)，现在我们仅在这网格结点上研究函数值.

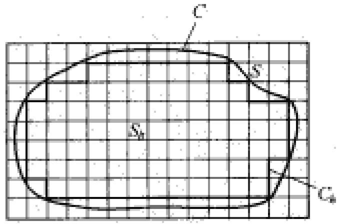


图 1

让我们研究在区域 S 的拉普拉斯的第一边界问题，在区域 S 的界线 C 上已给定连续的有界函数 f.

当采用有限差分法时，我们用区域 S 的

① 本回引自文献[59].

近似区域 S_h 来替代S.假定这区域 S_h 是网格的完全在S 内部的许多小正方形所组成的(也可以取这网格与 S 至少有一公共点的小正方形的全体,作为近似区域 S_h),用 C_h 表示S_h 的界线,这界线是一些折线.显然自折线 C_h 上的每一个结点到曲线 C 的距离不会超过$\sqrt{2}h$.

让我们规定在 C_h 的结点上的边界函数f_h 的值等于在界线C 的最相近的点上的函数 f 的值(倘使最近点有数个,则任取其中一点之值)①.

现在来考虑拉普拉斯有限差分方程在区域 S_h 的第一边界问题.

试求一函数,在区域 S_h 内部的结点 $M_{ik}(x_i,y_k)$ 上满足拉普拉斯有限差分方程

$$u_{i+1,k}^{(h)}+u_{i,k+1}^{(h)}+u_{i-1,k}^{(h)}+u_{i,k-1}^{(h)}-4u_{i,k}^{(h)}=0 \qquad ③$$

上式的 $u_{i,k}^{(h)}=u^{(h)}(x_i,y_k)$,而且在 C_h 上取f_h 之值.

要解决这问题就是要在区域 S_h 的内结点M_{ik} 上求出网格函数$u_{ik}^{(h)}$ 之值.

在每一个内结点 M_{ik} 上,必须使差分方程 ③ 能满足.可见为了定出网格函数,我们得到一个一次代数方程组,其中方程的个数与未知数的个数相等②.

我们来证:这个有限差分方程组有唯一的解.

为此,我们只须证明它对应的齐次方程组只有平凡解(恒等于零的).

有限差分方程组之所以是非齐次方程组,是因为在 C_h 的结点上的u_{ik} 值已给出而且等于 f_h.令边界函数 $f_h=0$,这方程组就变为齐次方程组.我们来证:在这情形下,有限差分方程组之解在区域 S_h 的任何结点上都等于零.

倘使说有某一个 $u_{i_1,k_1}\neq 0$.为了确定起见,我们将认为

$$u_{i_1,k_1}>0$$

令 u_{i_0,k_0} 是这网格函数的极大值,所以在区域 S_h 的一切的点M_{ik} 上必有

$$u_{i,k}\leqslant u_{i_0,k_0}$$

等式
$$u_{i_0,k_0}=\frac{u_{i_0-1,k_0}+u_{i_0,k_0-1}+u_{i_0+1,k_0}+u_{i_0,k_0+1}}{4}$$

仅在 $u_{i_0-1,k_0}=u_{i_0,k_0-1}=u_{i_0+1,k_0}=u_{i_0,k_0+1}=u_{i_0,k_0}$ 的情形方能成立.继续对于u_{i_0+1,k_0}, u_{i_0+2,k_0} 作出与上面类似的推理,经过若干次推理后我们就达到了界点.既然根据假定,边界值是等于零的,所以就发生了矛盾.同理 $u_{i_0,k_0}<0$ 的假定也会引起矛盾.

由此推得:在区域 S 的任一内结点上必有

① 若 h 充分小时,则选择 f 值的不确定程度由于f 的连续性可以使其变为任意小.
② 二者的个数都等于在 S_h 内部的结点的点数.

$$u_{i,k} = 0$$

这就是说，这齐次有限差分方程仅有平凡解．因而证明了拉氏有限差分方程的第一内边界问题的解是存在的而且是唯一的．

解出有限差分方程后，就得到网格函数，它是拉普拉斯微分方程的原问题的近似解．

一、用逐次逼近法求有限差分方程之解

所谓有限差分法就是不直接求微分方程 $\Delta u = 0$ 的边界问题之解，而求有限差分方程的对应的边界问题之解．为了使这方法有所根据，我们必须证明：对于足够小的 h，函数 u_h 与这方程 $\Delta u = 0$ 之准确解 u 彼此相差可以任意小．我们不拟证明这定理．

我们将比较详细讲述有限差分方程的解法．用有限差分法求边界问题之解可化为：求未知数很多的代数方程组的解（未知数的个数时常会达到数百个甚至数千个）．若用行列式的理论求这方程组的解就会发生技术上的困难．比较方便的方法是逐次逼近法．

一次代数方程组的逐次逼近法如下．

把方程组写为下面的形式

$$\begin{cases} u_1 = f_1 - (a_{12}u_2 + \cdots + a_{1n}u_n) \\ u_2 = f_2 - (a_{21}u_1 + \cdots + a_{2n}u_n) \\ \vdots \\ u_n = f_n - (a_{n1}u_1 + \cdots + a_{n,n-1}u_{n-1}) \end{cases} \tag{④}$$

上式中的每一式都是对于其对应的未知数解出的．选任意的 n 个数 $u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, u_3^{(0)}, \cdots, u_n^{(0)}$ 作为零次近似解，把它们代入方程 ④ 的右边后，求得第一次近似解 $u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \cdots, u_n^{(1)}$．继续这样的步骤，按照下面的公式

$$\begin{aligned} u_1^{(k+1)} &= f_1 - (a_{12}u_2^{(k)} + \cdots + a_{1n}u_n^{(k)}) \\ u_2^{(k+1)} &= f_2 - (a_{22}u_1^{(k)} + \cdots + a_{2n}u_n^{(k)}) \\ &\vdots \\ u_n^{(k+1)} &= f_n - (a_{n1}u_1^{(k)} + \cdots + a_{n,n-1}u_{n-1}^{(k)}) \end{aligned}$$

定出 $(k+1)$ 次的近似解．若逐次的近似解 $\{u_n^{(k)}\}$ 趋于极限

$$\lim_{k\to\infty} u_n^{(k)} = u_n$$

则这些极限值显然是方程组 ④ 所求之解．

逐次逼近法不是对任何方程组都能适用的．

我们来证明:有限差分方程组 $\overline{\Delta}_h u = 0$ 的第一边界问题可以用逐次逼近法求解.对应于方程 $\overline{\Delta}_h u = 0$ 的代数方程组具有下列形式

$$u_{ik}^{(h)} = \frac{u_{i+1,k}^{(h)} + u_{i,k+1}^{(h)} + u_{i-1,k}^{(h)} + u_{i,k-1}^{(h)}}{4}$$

上式的每一个方程都是对于它的对应的未知数解出的.

逐次逼近将从具有边界值的边界上开始.用 $C_h^{(1)}$ 表示区域 S_h 的这样的结点集合,它们与 C_h 的结点的距离是 h.当在 $C_h^{(1)}$ 上计算逐次近似值时,显然地,将要直接采用给定的 C_h 上的函数值 f_h.再用 $C_h^{(2)}$ 表示区域 S_h 的这样结点的集合,它们与 $C_h^{(1)}$ 的结点的距离是 h,当计算 $C_h^{(2)}$ 的逐次近似值时,将采用在 $C_h^{(1)}$ 上 $u_{ik}^{(h)}$ 的值.可以仿照此法规定 $C_h^{(3)}, C_h^{(4)}, \cdots$ 等分区.因此,区域 S_h 的每一结点都属于某一分区 $C_h^{(i)}$($i = 1,2,\cdots,N$,这里的 N 是最末的分区 $C_h^{(N)}$ 的号数).

设 u_{ik} 是有限差分方程组的准确解,又设 $u_{ik}^{(n)}$ 是这方程组的 n 次近似解.

考察下列的差值

$$v_{ik}^{(n)} = u_{ik} - u_{ik}^{(n)}$$

这差在 C_h 上等于零,在 S_h 内部满足方程组

$$v_{ik}^{(n)} = \frac{v_{i+1,k}^{(n-1)} + v_{i,k+1}^{(n-1)} + v_{i-1,k}^{(n-1)} + v_{i,k-1}^{(n-1)}}{4} \quad ⑤$$

现在来证:差值的序列 $\{v_{ik}^{(n)}\}$ 趋于零

$$\lim_{n\to\infty} v_{ik}^{(n)} = 0$$

令 $\max v_{ik}^{(n)} = A_n$,我们将估计 $(n+1)$ 次的近似值.显然在 $C_h^{(1)}$ 上有

$$v_{ik}^{(n+1)} \leqslant \frac{3}{4} A_n$$

因为在这情况下,式 ⑤ 至少有一项等于零.由此推得在 $C_h^{(2)}$ 上有

$$v_{ik}^{(n+1)} \leqslant \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) A_n$$

一般是,在 $C_h^{(s)}$ 上有

$$v_{ik}^{(n+1)} \leqslant \left(1 - \frac{1}{4^s}\right) A_n$$

对于最末的分区 $C_h^{(N)}$,我们有在 $C_h^{(N)}$ 上有

$$v_{ik}^{(n+1)} \leqslant \left(1 - \frac{1}{4^N}\right) A_n$$

由此得到结论

$$A_{n+1} \leqslant \alpha A_n, \alpha = 1 - \frac{1}{4^N}$$

即
$$\lim_{n\to\infty} A_n = 0$$

用记号表示 $\min v_{ik}^{(n)} = B_n$,用相仿的方法我们也能证明
$$\lim_{n\to\infty} B_n = 0$$
所以对于区域 S_h 的任何一个 $M_{ik}(x_i, y_k)$
$$\lim_{n\to\infty} v_{ik}^{(n)} = 0 \quad 或 \quad \lim_{n\to\infty} u_{ik}^{(n)} = u_{ik}$$

此处证明的收敛性对于任意选择的零次近似值都是成立的.但是收敛的速率同零次近似值的选择有很大的关系.

二、模型法

现在有多种的硬件方法来解差分方程组.这些方法的构造原理乃是利用存在于性质不同但可以用同一个微分方程来描述的物理现象之间的类比.

电积分器被广泛应用于解拉普拉斯方程(以及某些较复杂的方程).我们来考察为了解拉普拉斯方程所用的最简单的电路图之一,此概念乃由赫尔史哥林提出.

取一具有相等的欧姆电阻的网络,它的结点之一在图2中绘出,以 V_i 表示点 M_i 的电势,而以 j_i 表示分路 M_0M_i 内的电流.利用欧姆定律
$$j_i = \frac{V_i - V_0}{R}, i = 1,2,3,4$$
与基尔霍夫定律
$$j_1 + j_2 + j_3 + j_4 = 0$$
得到
$$V_0 = \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}{4}$$

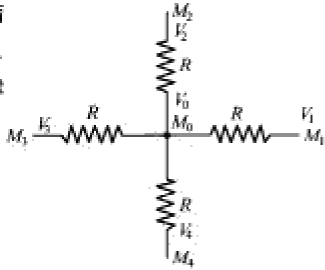


图 2

因此,由这些电阻所组成的电路图中任一结点的电势等于在相邻的四个结点的电势的算术平均值.此关系与有限差分法中所叙述的方程⑤类似,它就是拉普拉斯电模法的基础.

最简单的电积分器乃一具有插座的板,插座间联以相同的电阻.比如说,我们要解决在平面(x, y)的被一曲线 C 所包围的某一区域 S 的第一边界问题.

在平面(x, y)上取一网络,其络距为 h,并用上段所述的方法作出以 C_h 为边界的域 S_h.利用一特殊的分压器在边界 C_h 的各结点给予以对应于第一边界问题的边界条件的电压.于是,所建立起来的电压分布就给出所考虑的问题的近似解.

在某些型式的电积分器中,结点间的电阻可以调节,而能解决带有变动系

数的方程

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_1\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_2\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$$

此处的

$$k_1=k_1(x,y),k_2=k_2(x,y)$$

此类电积分器乃由 Л.И.雇琴马赫尔发明.它能迅速地解决平面(x,y)上复杂区域的问题.

还存在着一些其他的关于拉普拉斯方程边界问题的模型法,例如电解槽法.

第三十回　计算机　复杂过程能模拟
遗邻域　方程个数可以查

利用计算机能够进行大量的计算. 复杂的物理过程可以得到仔细的模拟. 数学模型通常只是理论和一般原理,从中能够挤压出数值结果来. 现在大规模应用的是一种老的想法 —— 把微分方程变成差分方程. 这里我们举出此种方法的两个实例. 首先让我们来考虑一阶微分方程 $u' = f(t, u)$ 的初值问题. 我们要近似计算一个解 $u = u(t)$,使得当 $t = 0$时,$u = u_0$是已给定的. 考虑到导数 $u'(t)$ 是差商$(u(t+h) - u(t))/h$ 当h趋近于零时的极限,就不难想到用差分问题来逼近初值问题;这个差分问题就是

$$\Delta v(t) = f(t, v(t))\Delta t, v(0) = u_0$$

其中,$t = 0, \pm h, \pm 2h, \cdots$,这里 $h > 0$是一个固定的小量,而差分是 $\Delta v(t) = v(t+h) - v(t)$,$\Delta t = t + h - t = h$. 由此可以得出

$$v(h) = u_0 + hf(0, u_0), v(2h) = v(h) + hf(h, v(h)), \cdots$$

类似地还有 $v(-h), v(-2h), \cdots$ 的公式. 这样就在一个由 $0, \pm h, \pm 2h, \cdots$ 各点构成的网格上定出了 v,这个网格的网格宽度(或者为了简单起见称为步长)等于 h. 当 h 趋近于0时,我们可以预期函数 $v = u_h$ 收敛于原来问题的解 u. 在关于函数 f 的适当假定之下,不难估计差值 $u - u_h$. 我们还可以把问题转换一下,通过函数 u_h 的收敛性来证明原来的问题有解. 自然,同样的方法也可用到微分方程组上,或者我们可以使用变动的步长或者更精密的差分来逼近导数,而使方法更加精细. 但是,假如 f 性态比较好,并且我们只要在一个小区间上知道 u,那么原来的方法也能够达到目的.

如果我们要把(比如说)两个变量 x, t 的偏微分方程写成差分方程,我们就把偏导数$\partial u/\partial t$ 和$\partial u/\partial x$ 写作差商$\Delta_t u/\Delta t$ 与$\Delta_x u/\Delta x$,其中$\Delta_t u(t, x) = u(t + h, x) - u(t, x)$,$\Delta t = t + h - t = h$,$\Delta_x u(t, x) = u(t, x + k) - u(t, x)$,$\Delta x = x + k - x = k$. 此时相应网格的网孔是长方形,在 t 方向的步长为h,而在 x 方向的步长为k. 甚至在简单的情形下,我们也能碰到这样的事实:h和k并不总能够彼此独立地变小. 例如,考虑初值问题

$$\partial_t u + c\partial_x u = 0, u(0, x) = f(x)$$

它的解是行波 $u = f(x - ct)$,其传播速度为 c. 假设 $c > 0$. 一种差分逼近是

$$\Delta_t v + c(\Delta t/\Delta x)\Delta_x v = 0, v(0, x) = f(x)$$

其中,$t = 0, \pm h, \pm 2h, \cdots$,而 $x = 0, \pm k, \pm 2k, \cdots$. 由此可知,比如说,对于所有的 x 有

$$v(h,x) = v(0,x) - chk^{-1}(v(0,x+k) - v(0,x))$$

给出了当 $t = h$ 时的 v 值,利用类似的公式,可以用 $t = h$ 时的 v 值来表示 $t = 2h$ 时的 v 值,依次类推.这样我们就可以逐步计算出整个网格上的函数 $v = u_h$.而精确解 $u = f(x - ct)$ 在点 (t,x) 的值,等于 f 在点 $x - ct$ 的值,我们可以看出,函数 v 在网格点 (t,x) 的值,是 f 在 x 轴上介于 x 和 $x + th^{-1}k$ 之间的网点上值的线性组合.但是,显然只有当上述区间包含 $x - ct$ 这点时差分逼近才有意义.因此我们必须有 $k/h \leqslant -c$,也就是当 $t > 0$ 与 $h = \Delta t > 0$ 时,$c\Delta t + \Delta x \leqslant 0$.由此可知,我们必须选取 x 方向的步长 $\Delta x = k$ 为负,同时要使 t 方向的步长 Δt 比起 x 方向的步长来不是太大.假如不这样的话,差分问题的解与精确解就毫无关系.这就表明,差分逼近可能是不稳定的,也就是说,当步长变小时,差分方程可能并不给出接近于精确解的函数.

平面上迪利克雷问题的差分逼近,却提供了与这种不稳定性大不相同的情形.所谓迪利克雷问题就是:在平面的有界开集 U 上,求一个满足拉普拉斯方程 $\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0$ 的函数 $u = u(x,y)$,使得它在 U 的边界上等于已给的连续函数 $f(x,y)$.我们假定边界是光滑的,f 在边界的邻域内也有定义并且连续.选取 $(g(x+h) - 2g(x) + g(x-h))/h^2$ 为二阶导数 $g''(x)$ 的差分逼近,并在 x 方向和 y 方向选取相等的步长 $h > 0$,则稍加计算即可证明,方程

$$v(x,y) = 4^{-1}(v(x+h,y) + v(x-h,y)) + v(x,y+h) + v(x,y-h) \quad ①$$

是拉普拉斯方程的差分逼近.我们试图求出方程 ① 的一个解 $v = u_h$,它定义的网格 $(x,y) = (rh, sh)$(r,s 为整数)的子集 $V = U_h$ 上,这个子集是由这样的点 (x,y) 构成的,使得至少有一个邻域 $(x \pm h, y)$ 或者 $(x, y \pm h)$ 落在 U 内.我们用这个解来逼近迪利克雷问题.如果 (x,y) 是 U_h 的边界点,也就是说,它至少有一个邻域落在 U 外,我们就令 $v(x,y) = f(x,y)$.当 h 充分小的时候,这是可能的,因为 f 在 U 的边界的一个邻域内有定义.如果 (x,y) 是 U_h 的内点,也就是说,如果它的所有邻域都落在 U 内,我们就要求 ① 成立(图 1).

现在我们的差分方程变成了一个线性方程组 ①,方程的数目等于 $V = U_h$ 的内点数目.因此,方程的数目就等于未知量的数目.我们断言,每个解在 V 的边界上都能取得最小值和最大值.事实上,假设 v 是一个解,而 c 为其最大值.如果 u 在一个内点处等于 c,则在它的所有邻域上都有 $u \leqslant c$.但此时由 ① 可以证明,在其所有的邻域上 $u = c$,而且在一个附加的点列上也有 $u = c$;这个点列必定会终止在边界上,因为 V 只有有限个点.对于最小值也可以进行相同的论证.特别地,如果令所有的边界值都等于零,那么 $v = 0$ 便是 ① 的唯一解.因此,根据线性方程组的理论即知,对于所选的每种边界值而言,方程组 ① 都只有唯一解 v.这个方程组在其他方面也具有良好的性质.当方程的数目很多时,

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2} = 0$$

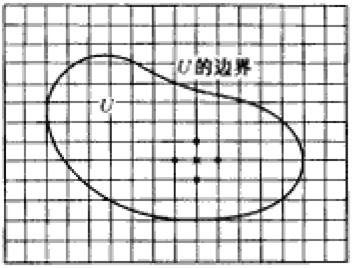


图1　迪利克雷问题的差分逼近. 十字叉及小圈表示一个点及其四个邻域

它可以用逐次逼近法来解. 不难证明, 当 h 趋近于零时, 函数 $v=u_h$ 收敛于迪利克雷问题的解, 也不难得到差值 u_h-u 的大小的较佳估计.

大师篇

第六章

第三十一回 涉猎广 数学天文称大家
从政弱 内政部长难应付

拉普拉斯1749年3月28日诞生于法国卡尔瓦多斯省博蒙昂诺日.

人们对拉普拉斯的早年生活知之甚少,因为大家都认为他是一个势利之人,他羞于自己并非出身名门,所以极少谈论自己的家世,一般的提法是说他家境贫寒,是富有的邻居们帮助这位显然极其聪明的孩子获得了受教育的机会,但后来的研究者则指出,这并非是事实,他也许出生在一个中产阶级的小康之家.

拉普拉斯开始在卡恩大学学习神学,但是一位数学教师把他推荐给了达朗贝尔,当他带信去巴黎去见达朗贝尔时,后者却拒绝见他.于是拉普拉斯便寄了一篇力学的论文给达朗贝尔,这篇论文是如此的出色至极,以至达朗贝尔忽然间就高兴得当了他的教父.达朗贝尔由于欣赏他的才华,回复了一封充满热情的信,说:"你用不着别人介绍,你自己就是很好的推荐书."达朗贝尔安排拉普拉斯在军事学校当了一名数学教授,1783年还当了军事考试委员,并主考了拿破仑(当时拿破仑是该校学生).

拉普拉斯一直居住在巴黎，还曾与拉瓦锡在一起工作过，他们一起测定了许多物质的比热．1780年，他们两人证明了将一种化合物分解为其组成元素所需的热量就等于这些元素形成该化合物时放出的热量，这完全可以看做热化学的开端，而且，它也是继布拉克关于潜热的研究工作之后向能量守恒定律迈进的又一块里程碑，60年之后，这条定律终于瓜熟蒂落地诞生了．

拉普拉斯的科学活动大致可分成四个阶段．

第一个阶段是从1768年到1778年．这十年间他撰著了许多关于积分学、数理天文学、宇宙学、概率论等方面的论文，在学术界有了一定的声望，这期间拉普拉斯的贡献集中在应用数学方面，1773年他在巴黎科学院宣读的论文里证明了行星运动的不变性，这就为确立太阳系的稳定性走出了第一步．

第二阶段是从1778年到1789年，他在天体力学和概率论等方面获得了许多重要的成果，这些成果后来都收入到他的名著《天体力学》(《Mécanique céleste》,1799—1825）和《分析概率论》(《Théorie analytique des probabilitès》, 1812）中，这期间，拉普拉斯将他的主要力量转向了研究太阳系天体的摄动，以及太阳系的普通稳定性问题，而同时开展研究的拉格朗日已经为此花了很大的气力，1787年，拉普拉斯得以证明月亮正在缓慢地加速，这不是先前的理论所能解释的．他把这归因于地球轨道的偏心率在其他行星的引力影响正在非常缓慢地减小，这就意味着地球对月亮的引力影响，也正在非常缓慢地变化着，它可以解释月球的少量额外加速，而先前却没有考虑到这一点．他还研究了木星和土星运动的某些反常，并以拉格朗日的一些工作为基础，证明了它们可以用每个行星对其他行星的万有引力来解释．

拉普拉斯和拉格朗日虽然不在一起，但是他们协同作战设法推广了上述结果，例如，他们证明了只要所有的行星都沿同一方向绕太阳运行(事实上也确实如此)，那么太阳系行星轨道的总偏心率便保持为常数．倘若一个行星的轨道增加了偏心率，那么其他行星轨道偏心率就一定会减小得足以与之平衡．行星轨道对黄道平面的倾角也具有同一类型的恒定性．整个太阳系，无论是其偏心率还是倾角，总量都很小，所以即便任意一颗行星动用了它们的全部储存量，那也不至于使其轨道特征发生多大的变化．

这表明，只要太阳系有效地保持孤立，只要太阳不急剧地改变它的性质，那么在未来相当长的时期内，太阳系仍将在很大程度上保持它今天的状态．

这样，拉普拉斯就圆满地完成了牛顿的工作，至少就行星天文学而言是这样的．因此，有时人们将他称为法国的牛顿．更加精细的工作则必须等待像50年以后的勒威耶和再加50年之后的庞加莱这样的人来做．

在这一阶段，拉普拉斯还推广了函数的变换，这种变换后来用他的名字命名；并且还给出了展开行列式的法则，现称为拉普拉斯展开定理．

第三个阶段是从 1799 年到 1805 年，这期间，他发表了《天体力学》的前四卷，推广了许多力学定律，将其广泛地应用于运动和天体的研究，第四卷的后一部分和第五卷完成于 1823 年 ~ 1825 年，把这个领域的研究推向了高峰，总的说来，《天体力学》汇聚了拉普拉斯在天文学上的几乎全部发现. 它试图给出由太阳系引起的力学问题的完整分析解答. 他吸取了前人的大量成果，阐述了天体运行的数学理论，讨论了地球形状、行星摄动、月离理论和三体问题(太阳、地球和月球之间互相吸引的问题). 还确立了绕太阳这个中心物体运动受到微扰的情况，并宣布了他的总结："同一原理永远成立，而这些原理在地球上如此奇妙地适合于个体的生存和物种的永存."

这部著作的影响很大，不久便被译成英文. 哈密顿读了《天体力学》，发现其中一个证明的错误并着手订正，从此开始了一生的数学事业；格林受到《天体力学》的启发，遂将数学用于电磁学理论. 在这部著作中也体现了拉普拉斯唯物论的哲学倾向. 当拿破仑问拉普拉斯在《天体力学》中为什么没有提到"上帝"时，他非常直截了当地回答说："我不需要这种假设."

拉普拉斯的另一部天文学巨著是《宇宙体系论》(《Exposition du système du monde》，1796)，书中探讨了太阳系的起源，提出了著名的星云假说. 1755 年德国哲学家康德(Immanuel Kant，1724—1804)从哲学的角度阐述过. 拉普拉斯则是从数学和力学的角度来进行阐述，并做出了详尽的科学论证，大大充实了星云说的内容，所以后来被通称为"康德 - 拉普拉斯星云假说". 拉普拉斯的数学成果较多地出现在上述天文学著作中，例如他关于椭球体引力的论文，最重要的一篇发表在 1785 年，收入到《天体力学》第三卷，彻底解决了一个球体与外部质点相互吸引这一有普遍意义的问题. 在《关于球状体的引力和地球形状》的论文中，他给出了直角坐标形式的二阶线性齐次偏微分方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$$

它被称为拉普拉斯方程，位势理论就是由拉普拉斯方程产生的函数的理论，在微分方程方面，拉普拉斯还研究了奇解理论，把奇解的概念推广到高阶方程和三个变量的方程，发展了解非齐次二阶线性方程的常数变易法，研究了二阶线性微分方程的完全积分.

顺便提一下，《天体力学》一书由于下述情况而非常有名，它老是说，由方程 A"显而易见"可以得到方程 B——而研究它的人却往往必须花上几个小时甚至几天才能弄清楚为什么它如此"显而易见".

说也奇怪，拉普拉斯最为世人所知的却仅仅是一项猜测，它事后才编入了一本为普通公众写的不需要用数学的天文书中，作为一个附录而放在该书的末尾，而且拉普拉斯本人也并没有非常认真地看待这个猜测. 由于所有的行星都

沿同一方向并大致在同一平面上绕太阳运行，所以拉普拉斯主张，太阳起源于一团旋转着的巨大星云，或者说随着星云中无数粒子的相互吸引，行星及其卫星从中凝聚了出来．该假说可以解释太阳系运动中现存的在平衡位置附近的振动，应该源于太阳系初始时的混沌状态下遗留下来的空间关系．

《宇宙体系论》一书被翻译成了多种文字，拥有广泛的读者，拉普拉斯关于太阳系起源的"星云假说"与威廉·赫歇尔当时建立的恒星和恒星系起源的理论相互协调一致，也为达尔文于1859年提出他的生物进化理论准备了条件．今天，人们已经接受了星云假说对太阳系起源的解释，人们认为，当气体云中的气体收缩时，旋转必然加快，于是（由于离心力的作用）较外围的一圈气体便留了下来，不再参与收缩．然后，这圈留下来的气体又凝聚成一颗行星，随着收缩继续进行，这种情况一次又一次地重演，直到形成了所有的行星为止，它们都沿着原始星云旋转的方向运动．星云的核心最后便凝聚为今天的太阳．

这一星云假说也深为天文学家所欣赏，在整个19世纪它都很流行，大家认为它很好地解释了太阳系的起源．20世纪最初几十年中，人们在这方面也说不出更多的东西，直到20世纪中叶这种情况才有所改变，魏茨泽克对太阳系如何由星云形成的方式作了修改，它比以往的任何学说都更有解释力．

1785年，拉普拉斯还发现了导致木星做长时间加速运动和土星的减速运动的原因：该变化并非单向的，而是周期性的，其周期约为900年．它不同于那些恒定的长周期变化，因为它依赖于两个相互作用的星球（木星和土星）与太阳之间的位置关系．为了找到这个效应，拉普拉斯不得不对偏心率和倾角的三次方幂继续作了一系列的近似，而这些不仅需要数学上的技巧，同时也涉及大量乏味的单纯计算．

第四个阶段是从1805年到1827年．所谓拉普拉斯学派就是在这个阶段形成的．在这一阶段，他的主要注意力在物理学领域——毛细管作用、热学理论、粒子论光学、声音的速度等，他们的工作促进了科学的数学化，1812年拉普拉斯出版了《分析概率论》一书，总结了以往关于该学科的研究成果，并增加了概率论在选举、审判调查、气象等方面的应用的新内容，包含着丰富的几何概率论、伯努利定理和最小二乘法的讨论，还引入了拉普拉斯变换，1814年他又发表了专著《关于概率论的哲学探讨》，书中叙述了一个著名的例子：根据伦敦、彼得堡、柏林和全法国的统计资料得出，出生的男孩数与全部出生的孩子数之比在10年间全部摆动在$\frac{22}{43}=51.16\%$左右；但对巴黎，同一比值是在$\frac{25}{49}=51.02\%$左右．后来才弄明白，因为巴黎有抛弃初生男婴的陋习，致使巴黎的这一比值比正常情况少0.14%．

但在此书中，拉普拉斯对概率的解释有机械唯物论的成分．例如，他认为若科学研究达到一定程度，就可以得出一组包罗万象的公式，由此可推过去和未

来，这就是哲学中所谓的拉普拉斯决定论.

拉普拉斯对数学的贡献是很大的，除了上述的成就以外，他还发现了解二次、三次、四次方程的方法；研究了复变函数的积分和有限差分，推广了函数展开成级数的拉格朗日定理，但他从来不关心纯粹数学，而只注重应用.他认为数学是一种手段，而不是目的，是人们为了解决科学问题而必须精通的一种工具.

拉普拉斯与其他数学家不同，他在官场也如鱼得水，他在写作《天体力学》期间，席卷法国的政治运动，包括拿破仑的兴起和衰落，并未显著地打断他的工作，尽管他是个沾染政治的人，他的威望以及他将数学应用于军事的才能保护了他.他还显示出一种并不很值得佩服的在政治态度方面见风使舵的能力.

拉普拉斯个人品质中另一个不令人敬仰的方面，是他（像拉瓦锡一样）极不愿意将荣誉让与别人.他与拉格朗日协作研究天体力学时，后者作出的贡献比他还多，但是拉格朗日很有教养，一点也不计较这些，但不能说没有一点想法，当他听到拉普拉斯说他不需要上帝这个假设时说："啊，可是它同样也是个美妙的假设呢，它解释了多少事情啊！"

拿破仑让拉普拉斯当内政部长，事实表明这位数学家完全不能胜任此职，拿破仑便把他提升为元老议员，这是一个纯属装饰性的头衔.拿破仑下台后，路易十八重登王位，拉普拉斯不但没有因为曾在拿破仑统治下任职而被宣告有罪，相反却被晋升为侯爵.他还曾获得许多别的荣誉，1785年被选入科学院，不过这倒完全是意料中的事情，1816年，他被选入了那个更荣耀而又更不容易进去的文人协会——法兰西科学院，1817年他成为这个组织的主席.

第三十二回　品学优　迪利克雷称领袖
外语棒　法德之间架桥梁

迪利克雷(1805—1859),德国数学家.生于迪伦,卒于格丁根.他能说流利的德语和法语,日后成为这两个民族之间的数学、数学家之间的极好的联系人.他从小爱好数学,中学毕业后,父母希望他能攻读法律,但他却选择了数学.1822年到当时数学研究中心巴黎,进入法兰西学院和巴黎理学院学习.1823年夏,被费伊聘为家庭教师.费伊曾是拿破仑时代的英雄,在国民议会中很有声望,迪利克雷因此接触到许多学者名流.迪利克雷的第一篇数学论文(1825)是关于数论方面的,这是他长期钻研高斯的《算术探究》的结果.其中,他运用代数数论的方法处理丢番图方程 $x^5+y^5=Az^5$,进而证明了费马方程 $x^n+y^n=z^n$ 当 $n=5$ 时无整数解.这是继费马本人(证明了 $n=4$ 的情况)和欧拉(证明了 $n=3$ 的情况)之后,对于费马大定理问题的一次突破.1825年11月,费伊将军去世.第二年,德国准备实行发展科学技术的计划,迪利克雷于是回国.先后任教于布雷斯劳(Breslau)大学和柏林军事学院(1828).1828年,被任命为柏林大学的特别教授(1839年升任教授),这时他才23岁,以后的27年里,他一直在柏林大学从事研究和教学,对德国数学的发展起了较大的推动作用.1831年被选为普鲁士科学院院士.他在数论方面关于费马大定理问题,又给出了 $n=14$ 无整数解的证明;还探讨了二次型、多项式的素因子、二次和双二次互反律等问题.1837年,他发表了第一篇解析数论论文,证明了在任何算术序列 $a, a+b, a+2b, \cdots, a+nb, \cdots$(其中 a 与 b 互素)中,必定存在无穷多个素数.这就是著名的迪利克雷定理,证明中所用到的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-z}$($a_n$, z 皆为复数)通称迪利克雷级数.

在数论方面,迪利克雷花了许多精力对高斯的名著《算术研究》进行整理和研究,并且作出了创新.由于高斯的著作远远超出了当时一般人的水平,以致学术界对这些著作也采取敬而远之的态度,真正的理解者不多.而迪利克雷却别开生面地应用解析方法来研究高斯的理论,从而开创了解析数论的新领域.

1837年,他通过引进迪利克雷级数证明了勒让德猜想,也称之为迪利克雷定理:在首项与公差互素的算术级数中存在无穷多个素数.

1839年,他完成了著名的《数论讲义》(《Vorlesungen über Zahlentheorie》),但1863年才出第一版,随后多次再版.这份讲义经过戴德金整理及增补附录,通过诺特的发展而成为布尔巴基的思想源泉之一.

1840 年，他用解析法计算出二次域 $k = Q(\sqrt{m})$ 的理想类的个数. 二次域的数论，就是高斯与他根据有理整系数的二元二次型的理论发展起来的. 他定义了与二元二次型相关联的迪利克雷级数，也考虑了展布在具有给定判别式 D 的全体二元二次型的类上的迪利克雷级数的和，即等价于二次域的迪利克雷 ξ 函数. 迪利克雷给出了二元二次型类数的公式，这就是现在的二次域的狭义类数公式.

1841 年，他证明了关于在复数 $a + bi$ 的级数中的素数的一个定理. 在此之前，他还证明了序列 $\{a + nb \mid n \in \mathbf{N}\}$ 的素数的倒数之和是发散的，推广了欧拉的有关结果.

1849 年，他研究了几何数论中的格点问题，并得到由 $uv \leqslant x, u \geqslant 1, v \geqslant 1$ 所围成的闭区域的格点个数的公式，即

$$D(x) = x\log x + (2c - 1)x + O(\sqrt{x})$$

其中 c 为欧拉常数.

另外，迪利克雷还阐明了代数数域的单位群的结构. 其中使用了"若在 n 个抽样中，存在 $n+1$ 个对象，则至少在1个抽样中，至少含有2个对象"这个原理，也就是所谓迪利克雷抽样法，而通常又称之为抽屉原理或鸽笼原理.

在分析学方面，迪利克雷是较早参与分析基础严密化的工作的数学家. 他首次严格地定义函数的概念，在题为《用正弦和余弦级数表示完全任意的函数》(《Uber die Darstellung ganzwillkürlicher Functionen durch Sinus-und Cosinusreihen》) 的论文中，他给出了单值函数的定义，这也是现在最常用的，即若对于 $x \in [a, b]$ 上的每一个值有唯一的一个 y 值与它对应，则 y 是 x 的一个函数，而且他认为，整个区间上 y 是按照一种还是多种规律依赖于 x，或者 y 依赖于 x 是否可用数学运算来表达，那是无关紧要的，函数的本质在于对应. 他有意识地在数学中突出概念的作用，以代替单纯的计算. 1829 年他给出了著名的迪利克雷函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

这是难用通常解析式表示的函数. 这标志着数学从研究"算"到研究"概念、性质、结构"的转变，所以有人称迪利克雷是现代数学的真正的始祖.

1829 年，他在研究傅里叶级数的一篇基本论文《关于三角级数的收敛性》中，证明了代表函数 $f(x)$ 的傅里叶级数是收敛的，且收敛于 $f(x)$ 的第一组充分条件. 他的证明方法是，直接求 n 项和并研究当 $n \to \infty$ 时的情形. 他证明了：对于任给的 x 值，若 $f(x)$ 在该 x 处连续，则级数的和就是 $f(x)$；若不连续，则级数的和为

$$(f(x - 0) + f(x + 0))/2$$

在证明中还需仔细讨论当 n 无限增加时积分

$$\int_0^a f(x)\,\frac{\sin nx}{\sin x}\mathrm{d}x,a>0$$

$$\int_0^b f(x)\,\frac{\sin nx}{\sin x}\mathrm{d}x,b>a>0$$

的极限值.这些积分至今还称为迪利克雷积分.

1837年,迪利克雷还证明了,对于一个绝对收敛的级数,可以组合或重排它的项,而不改变级数的和.又另举例说明,任何一个条件收敛的级数的项可以重排,使其和不相同.

在位势论方面,他提出了著名的迪利克雷问题:在 $\mathbf{R}^n(n\geqslant 2)$ 内,若 D 的边界 S 为紧的,求 D 内的调和级数,使它在 S 上取已给的连续函数值.也利用迪利克雷原理给出了古典迪利克雷问题的解,由此引起了一般区域的迪利克雷问题,以及更一般的迪利克雷问题.

迪利克雷对自己的老师高斯非常钦佩,在他身边总是带着高斯的名著《算术研究》,即使出外旅游也不例外.1849年7月16日,哥廷根大学举办了高斯因《算术研究》获得博士学位50周年的庆典.庆典上高斯竟用自己的手稿点燃烟斗,在场的迪利克雷急忙夺过老师的手稿,视为至宝而终身珍藏.迪利克雷去世后,人们从他的论文稿中找到了高斯的这份手稿.

迪利克雷一生只热心于数学事业,对于个人和家庭都是漫不经心的.他对孩子也只有数学般的刻板,他的儿子常说:"啊,我的爸爸吗?他什么也不懂."他的一个调皮的侄子说得更有趣:"我六、七岁时,从我叔叔的数学"健身房"里所受到的一些指教,是我一生中最可怕的一些回忆."甚至有这样的传说:他的第一个孩子出世时,向岳父写的信中只写上了一个式子:$2+1=3$.

第三十三回 磨坊工 成才全部靠自学①
奎经典 位势源于电磁学

19 世纪分析数学在严格化的同时，更广泛地向其他科学渗透。同 18 世纪与力学结合的传统相比，一个新的应用领域是电磁学，这导致了整个 19 世纪数学物理的繁荣，并反过来给分析数学以新的刺激，位势论的产生就是这样的例子。

"位势"这一名称最先由英国数学家格林(George Green，1793—1841)创用。格林出身磨坊工人，靠自学成才。他在 1828 年私人印行的一篇论文《数学分析在电磁理论中的应用》(《An Essay on the Applications of Mathemetical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism》)中，发展了已由拉普拉斯、泊松等人引进的位势函数的一般理论，同时建立了许多关键的定理与概念，特别是后来以他的名字命名的"格林公式"与"格林函数"，它们已成为现代分析与理论物理的基本工具。格林这篇文章在他去世十年后才正式刊登于克雷尔《数学杂志》(Jour. Reine Ang. Math. No. 39. 1850; No. 44, 1852; No. 47, 1854)，以下选录的有关部分由李文林译自 N.M. Ferrers(ed.): Mathematical Papers of the Late George Green, 19-27; 31-32. MacMilan and Co. London, 1871.

作用于一给定点的所有电荷基元分别除以它们到该点的距离，然后求和，表示这个和的函数以非常简单的形式给出了整个带电体的吸引力. 在本文中我们将致力于揭示该函数与带电物体中电荷密度之间的关系，并将所获得的关系应用于电学理论.

首先，我们来考虑一个任意形状的物体，上面按已知规律分布着固定电荷. 设 x', y', z' 是该物体一体积元素的直角坐标，ρ' 是该元素中的电荷密度，这样 $dx'dy'dz'$ 就是元素的体积，$\rho' dx'dy'dz'$ 是它包含的电荷量；又设 r' 是该体积元素与体外一点 P 之间的距离，V 是所有电荷基元分别除以它们到该点的距离然后相加所得的和，设点 P 坐标为 x, y, z，则有

$$r' = \sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}$$

和

$$V = \int \frac{\rho' dx'dy'dz'}{r'}$$

这里积分展遍所考虑的带电物体的每个元素.

拉普拉斯在《天体力学》一书中已经证明：函数 V 满足方程

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=0 ②$$

因该方程以后将经常出现，我们把它写成缩写形式 $\delta V = 0$③，符号 δ 在本文中没有其他意义.

为了证明 $\delta V = 0$，我们只须注意：通过微分立即可得 $\delta(1/r') = 0$，因此若用 V 的每个元素来代替上述方程中的 V，该方程成立；因此整个积分(被看做是所有这些元素的和)也将满足方程. 当点 P 落在物体内部时，这一推理不再成立，因为此时 V 所包含的某些元素的系数变为无限大，故不一定能推出 V 满足方程 $\delta V = 0$，虽然其每个元素单独考虑时可能使方程满足.

为了确定 V 在物体内部任一点处的值，设想一个半径为 a，包含点 P 的小球，球心与点 P 距离为 b，a 和 b 都是很小的量. 这时 V 的值可以被看成由两部分组成，一部分是球本身的贡献，另一部分则是由整个球外物体所产生. 显然，若用后一部分代替 V，则 δV 等于零，因此我们只要对小球本身确定 δV 的值就

① 本回引自文献[13].

② 格林尚未采用偏微分记号，此处方程即相当于 $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$，下同.

③ 格林用 δ 表示现今文献中所用的 ∇^2，δV 即 $\nabla^2 V = 0$，下同.

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2}=0$$

行.这个值已知为

$$\delta(2\pi a^2\rho-\frac{2}{3}\pi b^2\rho)$$

ρ 是球内的电荷密度,从而等于 ρ' 在点 P 的值.现设 x_1,y_1,z_1 为球心坐标,我们有

$$b^2=(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2$$

因此

$$\delta(2\pi a^2\rho-\frac{2}{3}\pi b^2\rho)=-4\pi\rho$$

于是在整个物体内部有

$$\delta V+4\pi\rho=0$$

在物体外部任意一点,由于 $\rho=0$,这时方程 $\delta V=0$ 可以看做是上述方程特殊情形.

现设 q 是物体外部以 P 为端点的任一射线,那么 $-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}q}$ 等于一个正电基元沿 q 增长方向所受的推力.这是显然的,因为在 $-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}q}$ 中以每个元素替代 V,将给出该元素沿 q 增长方向产生的力,所以 $-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}q}$ 就给出 V 的每个元素所产生的力的总和,或者说在同一方向作用于点 P 的总力.为了说明这一事实当 P 在物体内部时也同样成立,像前述那样将 V 分为两部分,并设点 P 位于小球球面上(或 $b=a$);那么该小球产生的力可表示为

$$\frac{4}{3}\pi a\rho(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}q})$$

$\mathrm{d}a$ 是与 q 的增量 $\mathrm{d}q$ 相应的半径 a 的增量,当 $a=0$ 时这部分力显然将变为零,因此我们只须考虑物体球外部分的贡献,它显然等于

$$V-\frac{4\pi}{3}a^2\rho$$

但该量的一次微分当 a 趋于零时与 V 的一次微分相等,因此不论点 P 是在物体内部还是外部,它沿 q 增长方向所受的力总是由 $-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}q}$ 给出.

虽然在上面的讨论中我们只涉及一个物体,但整个推理是一般的,同样适用于由任意多个物体组成的系统,包括在这些物体表面分布着有限量电荷的情形,显然对任何一个这样的物体内部一点 P 我们有

$$\delta V+4\pi\rho=0 \qquad ①$$

并且,沿以物体内部或外部一点 P 为端点的射线 q 的延长方向的力将同样由 $-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}q}$ 给出,V 表示系统中所有电荷基元分别除以到点 P 的距离然后求和所得的函数,该函数以如此简单的形式给出电荷基元在任何位置受力的数值.由于

它在下文中频繁出现，我们冒昧地称之为属于该系统的位势函数，它显然是所考虑的电荷基元 P 的坐标的函数.

……

在着手推导物体表面电荷密度与这些表面（电荷仅限于分布于这些表面）内、外部相应的位势函数值之间存在的某些关系以前，我们首先要建立一条今后对我们非常有用的一般定理，这条定理可陈述如下①.

设 U 和 V 是直角坐标 x,y,z 的两个连续函数，其微分系数在一任意形状的固定物体内部任何一点都不会变成无限大，那么

$$\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z U\delta V + \int \mathrm{d}\sigma U\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}w}\right) = \int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z V\delta U + \int \mathrm{d}\sigma V\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}w}\right)$$

三重积分展布于整个物体内部，关于 $\mathrm{d}\sigma$ 的那些积分则展布于该物体的整个表面，而 $\mathrm{d}\sigma$ 表示该曲面的曲面元素，$\mathrm{d}w$ 是与该曲面相垂直的无限小线段，方向由物体表面指向物体的内部.

为了证明这一定理，让我们考虑三重积分

$$\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\left(\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right)\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\right) + \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\right)\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}\right) + \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}\right)\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}z}\right)\right)$$

利用分部积分可得

$$\int \mathrm{d}y\mathrm{d}z V'' \frac{\mathrm{d}U''}{\mathrm{d}x} - \int \mathrm{d}y\mathrm{d}z V' \frac{\mathrm{d}U'}{\mathrm{d}x} + \int \mathrm{d}x\mathrm{d}z V'' \frac{\mathrm{d}U''}{\mathrm{d}y} - \int \mathrm{d}x\mathrm{d}z V' \frac{\mathrm{d}U'}{\mathrm{d}y} +$$
$$\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y V'' \frac{\mathrm{d}U''}{\mathrm{d}z} - \int \mathrm{d}x\mathrm{d}y V' \frac{\mathrm{d}U'}{\mathrm{d}z} - \int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z V\left(\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}y^2} + \frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}z^2}\right)$$

像通常一样，量上方的撇号表示这些量在积分界上的值，在目前情形就是在三重积分所展布的物体表面上的值. 现在让我们来考虑相应于较大 x 值的部分 $\int \mathrm{d}y\mathrm{d}z V'' \frac{\mathrm{d}U''}{\mathrm{d}x}$. 容易看出，由于 $\mathrm{d}w$ 处处垂直于物体表面，如果 $\mathrm{d}\sigma''$ 是与 $\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 相应的曲面元素，我们将得到

$$\mathrm{d}y\mathrm{d}z = -\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}w}\mathrm{d}\sigma''$$

代换后得到

$$\int \mathrm{d}y\mathrm{d}z V'' \frac{\mathrm{d}U''}{\mathrm{d}x} = -\int \mathrm{d}\sigma'' \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}w} V'' \frac{\mathrm{d}U''}{\mathrm{d}x}$$

类似地可以看出在相应于较小 x 值的部分 $-\int \mathrm{d}y\mathrm{d}z V' \frac{\mathrm{d}U'}{\mathrm{d}x}$ 中有

$$\mathrm{d}y\mathrm{d}z = +\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}w}\mathrm{d}\sigma'$$

因此

$$-\int \mathrm{d}y\mathrm{d}z V' \frac{\mathrm{d}U'}{\mathrm{d}x} = -\int \mathrm{d}\sigma' \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}w} V' \frac{\mathrm{d}U'}{\mathrm{d}x}$$

① 即著名的格林定理，其中所得恒等式现称格林公式.

于是，由于以 $d\sigma'$ 表示的元素和与以 $d\sigma''$ 表示的元素和在一起构成整个物体的表面，将上述两部分相加就得

$$\int dydz\left(V''\frac{dU''}{dx}-V'\frac{dU'}{dx}\right)=-\int d\sigma\frac{dx}{dw}V\frac{dV}{dx}$$

这里假定关于 $d\sigma$ 的积分展遍整个曲面，dx 是与增量 dw 相应的 x 的增量.

用完全同样的方法我们将得到

$$\int dxdz\left(V''\frac{dU''}{dy}-V'\frac{dU'}{dy}\right)=-\int d\sigma\frac{dy}{dw}V\frac{dU}{dy}$$

$$\int dxdy\left(V''\frac{dU''}{dz}-V'\frac{dU'}{dz}\right)=-\int d\sigma\frac{dz}{dw}V\frac{dU}{dz}$$

因此前面给出的表达式中所有二重积分之和可以通过将刚才求出的三个部分相加而得.这样我们就有

$$-\int d\sigma V\left(\frac{dU}{dx}\cdot\frac{dx}{dw}+\frac{dU}{dy}\cdot\frac{dy}{dw}+\frac{dU}{dz}\cdot\frac{dz}{dw}\right)=-\int d\sigma V\frac{dU}{dw}$$

其中 V 和$\frac{dU}{dw}$ 均表示在物体表面上的值，因此积分

$$\int dxdydz\left(\frac{dV}{dx}\cdot\frac{dU}{dx}+\frac{dV}{dy}\cdot\frac{dU}{dy}+\frac{dV}{dz}\cdot\frac{dU}{dz}\right)$$

借缩写符号 δ 就变为

$$-\int d\sigma V\frac{dU}{dw}-\int dxdydzV\delta U$$

因为刚才所得积分值当 U 和 V 互换时保持不变，显然它也可以表示为

$$-\int d\sigma U\frac{dV}{dw}-\int dxdydzU\delta V$$

因此如果使同一个量的这两个表达式相等，并改变符号，我们就得到恒等式

$$\int d\sigma V\frac{dU}{dw}+\int dxdydzV\delta U=\int d\sigma U\frac{dV}{dw}+\int dxdydzU\delta V \qquad ②$$

于是定理完全获证，不论函数 U 和 V 具有何种形式.

我们在定理的陈述中假设了 U 和 V 的微分系数在所考虑的物体内部有限，这个条件的必要性在以上定理的证明中似乎并不明显，但在所用分部积分法中却表现得很清楚.

为了更清楚地说明这一条件的必要性，我们现在来确定：当两个函数之一（例如 U）在物体内部变为无限时，对公式应进行怎样的修正.我们假定它仅在某一点 P' 处变为无限，并设在该点附近 U 近似等于 $1/r$，r 是点 P' 与元素 $dxdydz$ 之间的距离.于是如果我们环绕 P' 作一半径为 a 的无限小的球，显然我们的定理可应用于该小球以外的整个物体，又因在球内有 $\delta U=\delta(1/r)=0$，三重积分仍被假定展遍整个物体，而这一假定所能引起的最大误差是一个与 a^2

同阶的量. 另外,积分$\int d\sigma U\frac{dV}{dw}$相应于球面的部分为一与 a 同阶的无限小量,因此就只须考虑积分$\int d\sigma V\frac{dU}{dw}$的相应于同一球面的部分,而因

$$\frac{dU}{dw}=\frac{dU}{dr}=\frac{d(1/r)}{dr}=-\frac{1}{r^2}=-\frac{1}{a^2}$$

所以当半径 a 趋于零时,这部分积分就变为 $-4\pi V'$,于是方程 ② 变为

$$\int dxdydzU\delta V+\int d\sigma U\frac{dV}{dw}=\int dxdydzV\delta U+\int d\sigma V\frac{dU}{dw}-4\pi V' \qquad ③_1$$

像前面的方程一样,这里的三重积分也是展遍物体的整个体积,关于 $d\sigma$ 的积分则展布于它的外曲面上,而 V' 是 V 在点 P' 的值.

同样,如果函数 V 在物体内部某一点 P'' 变为无限,而在该点附近则近似等于$\frac{1}{r'}$,正如 U 在趋近点 P' 时的情形,由以上论述显然将得到

$$\int dxdydzU\delta V+\int d\sigma U\frac{dV}{dw}-4\pi U''=\int dxdydzV\delta U+\int d\sigma V\frac{dU}{dw}-4\pi V' \qquad ③_2$$

所有积分与前面一样,U'' 表示 U 在点 P'' 的值,而在该处 V 变为无限. 同样的过程可应用于函数 U 和 V 具有任意多个类似点的情形.

为简明起见,以下我们把使一个函数的微分系数变为无限的点称为该函数的奇异值,于是最初对 U 和 V 所加条件便可表述为:两函数在所考虑的固定物体内部都没有奇异值.

……

根据以上所述容易证明,如果在任一闭曲面上给定了位势函数的值 $\overline{V}$[①],那么有且仅有一个函数可以同时满足方程

$$\delta V=0$$

和 V 在该曲面内部没有奇异值这一条件. 因为由假设 $\delta U=0$,方程 $③_1$ 将变为

$$\int d\sigma\overline{U}\frac{d\overline{V}}{dw}=\int d\sigma\overline{V}\frac{d\overline{U}}{dw}-4\pi V'$$

在这个方程中,U 被假定在曲面内部只有一个奇异值即点 P';在无限接近该点处,U 近似等于 $1/r$,r 是与 p' 的距离. 现在假设 U 的值除了满足上述条件外,在边界本身上等于零,那么我们有 $\overline{U}=0$,该方程将变为

$$\int d\sigma\overline{V}\frac{d\overline{U}}{dw}-4\pi V'=0$$

这说明若 $\overline{V}$ 已知,则 V 在点 P' 的值也就确定.

为了使我们相信确实存在如上所说的这样一个函数 U[②],设想曲面是一个

① 格林在这里用记号 $\overline{V}$ 表示 V 在曲面上的值.
② 从上述可知,U 即现今文献中所称"格林函数",以下格林指出函数的物理意义.

接地的完全导体，在点 P' 集中了一个单位正电荷，那么由 P' 和它在曲面上的感应电荷所产生的位势函数就是所求的 U 值. 因为由于传导曲面与地面之间的连通关系，在该曲面上的位势函数必为常数，并应等于地面本身的位势函数，即等于零(注意在此情况下它们实际形成一个导体). 因此若取这一位势函数为 U，显然我们得到 $\overline{U} = 0, \delta U = 0$，以及在无限接近 P' 的地方有 $U = 1/r$. 另外由于该函数在曲面内部没有其他奇异点，它显然具有在前述证明中所规定的 U 的全部性质.

第三十四回　读博士　黎曼论文有破绽
严格化　卡氏几十年后补

保形映射的基本定理，首先见于黎曼著名的学位论文中(1851)，今将这一定理叙述如下.

定理1　给定一个单连通领域 D，它的边界至少包含两个不同的点，且给定一点 $z_0 \in D$，则有唯一的函数 $f(z)$ 存在，它保形地映 D 到单位圆盘 $|w| < 1$，且使得

$$f(z_0) = 0, \arg f'(z_0) > 0 \qquad ①$$

黎曼对这一定理的证明是根据迪利克雷原理，即在某边界条件下使得积分

$$\iint_D \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

为极小的问题必定有解. 这一原理在黎曼那个时代是被普遍承认的，直至魏尔斯特拉斯指出了变分法中类似的问题不一定有解，从而黎曼的证明失掉了正确性.

这一定理严格的证明，经过了数十年漫长的岁月，卡拉西奥多里先用函数论的方法证明了这一定理，科伯也同时给予证明.

这里给出费耶及黎兹的证明.

证明　先将区域 B 映射到单位圆盘 $|\zeta| < 1$ 的内部，这是容易做到的；假若 B 有外点 C，则函数 $z^* = 1/(z - C)$ 把 B 映射为 z^* 平面上的单连通区域 B^*，∞ 是在 B^* 的外部，因 B^* 是一有界区域，故用相似变换就能够把 B^* 映射到单位圆内. 如果 B 没有外点，则因 B 的边界点不只一点，故 B 的边界成一连续点集. 若 a, b 是 B 的两个有限边界点，作函数

$$z^* = \left(\frac{z - a}{z - b}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad ②$$

这个函数在(单连通)区域中可以按任何路线开拓，故它在 B 中是单值的，反函数是 $z = (bz^{*2} - a)/(z^{*2} - 1)$，这时 z^* 的有理函数，自然也是单值函数. 区域 B 单叶映射于 B^*. B^* 具有以下的性质，$a \in B^*$ 时 $-a$ 是 B^* 的外点，这是因为 z^* 和 $-z^*$ 都对应于 z 的缘故. 这样 B^* 具有外点，区域 B^* 既然具有外点，由上面的方法，B 可单叶地映射于单位圆盘内部的区域来证明黎曼定理就够了.

我们还可以假设 $z_0 = 0$，在点 z_0 的定方向是正实数轴的方向，否则可以经过一次分数函数变换转化为这种情形.

魏尔斯特拉斯(Weierstrass, karl Theodor Wilhelm, 1815—1897)，德国数学家. 生于德国西部威斯特伐利里的小村落奥斯滕费尔德，卒于柏林.

卡拉西奥多里(Carathéodory, Constantin, 1873—1950)，希腊数学家. 生于柏林，卒于慕尼黑.

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2} = 0$$

总而言之,想要证明单位圆盘 $|\zeta|<1$ 必能单叶地映射于 z 平面上(定理中的)任何单连通区域,只对包含在 $|z|<1$ 中的单连通区域来证明就够了,并且可设置如下的就范条件

$$f(0)=0, f'(0)>0 \tag{③}$$

今考察具有以下条件的 $f(z)$ 构成的函数族 $\mathscr{F}$:

(1) $f(z)$ 在领域 B 内解析;

(2) $f(z)$ 在 B 内单叶,即假定 $z_1 \neq z_2$ 时 $f(z_1) \neq f(z_2)$;

(3) $f(z)$ 满足 ③;

(4) 在 B 内 $|f(z)|<1$.

$\mathscr{F}$不是空的,因为如果 $a>0$ 足够小的话,它包含具有形为 az 的函数,对此我们考虑以下极大值的问题.

求出 $\mathscr{F}$中的一个元素 f,使得 $f'(0)$ 具有最大数值.

首先我们注意到,由 $\{|f'(0)|, f\in\mathscr{F}\}$ 定义的一组正数是有界的.事实上,假定 B 包含圆 $|z|=\rho$,则由柯西积分公式以及(4)有

$$f'(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(z)}{z^2}dz, C_1:|z|=\rho$$

$$f'(0)=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(z)}{z^2}dz\right|=\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}\frac{f(\rho e^{i\theta})}{\rho^2e^{2i\theta}}i\rho e^{i\theta}d\theta\right|\leqslant$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{f(\rho e^{i\theta})}{\rho}\right|d\theta<\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\rho}d\theta=\frac{1}{\rho}$$

命 μ 表示集 $(f'(0))$ 的上确界.我们已经证明了有元素 $g(z)\in\mathscr{F}$存在,使得 $g'(0)=\mu$,下面我们将证明 $g(z)$ 就是要求的函数.条件(4)使得$\mathscr{F}$构成一正规族,因此我们能够求得 $\mathscr{F}$内的一数列 $\{f_n(z)\}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}f'_n(0)=\mu$$

以及

$$\lim_{n\to\infty}f_n(z)=g(z)$$

在 B 的紧子集上一致的存在,显然有 $g'(0)=\mu$, $g(z)$ 并且满足条件(1),(2)及(4). $g(z)$ 显然不能是一个常数,故极大原理证明(4)中的不等式对于 $g(z)$ 也成立.由于 $g(z)$ 是单叶函数族 $\{f_n(z)\}$ 的极限,并且不是常数,故一定是单叶函数,故 $g(z)\in\mathscr{F}$.

现今考察 $g(z)$ 的映射性质.显然

$$w=g(z)$$

保形映射 B 到一单连通领域 B_0, B_0 是圆盘 $|w|<1$ 的子集.若 B_0 是 $|w|<1$ 的真子集,则必有一点 w_0 存在, $|w_0|<1$ 且为 B_0 的边界点.我们将要证明由此得出矛盾,为此,假定

$$w_0=ae^{i\alpha}$$

且定义

$$g_1(z)=e^{-i\alpha}g(z)$$
$$p(z)=\frac{a-g_1(z)}{1-ag_1(z)}$$
$$q(z)=(p(z))^{1/2},q(0)=+a^{1/2} \qquad ②$$
$$g_2(z)=\frac{a^{1/2}-q(z)}{1-a^{1/2}q(z)}$$
$$h(z)=e^{i\alpha}g_2(z)$$

这些函数在 B 内都是解析的.因为 $a<1$,故 $p(z)$ 在 B 内也是解析的.更因在 B 内 $p(z)\neq 0$,故 $q(z)$ 在 B 内也解析.今映射 $g_1(z)\to p(z)$ 是由线性变换(或叫做麦比乌斯变换)定义,它使单位圆不变.故在单位圆盘内 $p(z)$ 把 B 映射到 B_1,同样 $g(z)$ 在 B 内解析且在单位圆盘内把 B 映射到 B_2.因为 $a<1$,故 $g_2(z)$ 在 B 内为解析,其次对于 $h(z)$ 也成立,且把 B 映射到 B_3.因为 $h(z)$ 满足条件(1),(2)及(4)且 $h(0)=0$,故 $h(z)\in\mathscr{F}$.想要验证它满足(3),用链式法则计算 $h'(z)$ 得

$$h'(z)=e^{i\alpha}\frac{1-a}{(1-a^{1/2}q(z))^2}\cdot\frac{1}{2}(p(z))^{-1/2}\cdot\frac{1-a^2}{(1-ag_2(z))^2}e^{-i\alpha}g'(z)$$
$$h'(0)=\frac{1+a}{2a^{1/2}}\mu>\mu$$

故 B_0 为单位圆盘真子集的假定引导出矛盾.

从而 $w=g(z)$ 把 B 共形映射到 w 平面上的单位圆盘.且满足条件 ③.剩下的只是证明映射函数的唯一性.假定 $\omega=G(z)$ 也把 B 共形映射到单位圆盘 $|w|<1$,且同时满足条件 ②.命 $\check{g}(w)$ 及 $\check{G}(w)$ 分别是 $g(z)$ 及 $G(z)$ 的反函数,则得出

$$w=g(\check{G}(w))=\varphi(\omega),\omega=G(\check{g}(w))=\psi(w)$$

显然 $\varphi(w)$ 及 $\psi(w)$ 在单位圆盘内为正则,且 $|\varphi(\omega)|<1$, $|\psi(w)|<1$ 及 $\varphi(0)=\psi(0)=0$ 故由施瓦兹引理有

$$|\varphi(\omega)|\leqslant|\omega|,|\psi(w)|\leqslant|w|$$

这表明 $|w|\leqslant|\omega|$,及 $|\omega|\leqslant|w|$,故 $|\omega|=|w|$ 或 $|g(z)|=|G(z)|$,这时有 $G(Z)=e^{i\alpha}g'(z)$.但 $G'(0)=e^{i\alpha}g'(0)$,故必有 $\alpha=0$,故最后有

$$G(z)=g(z)$$

施瓦兹(Schwarz, Hermann Amandus, 1843—1921),德国数学家.生于西里西亚的赫姆斯多夫(现为波兰索比辛),卒于柏林.

第三十五回　读经典　大师思想蕴其中
看原文　真知灼见细品味

黎曼对于物理学一直抱有强烈的兴趣.他关于偏微分方程的讲演是1860年左右作的,于1882年发表.在论述的简洁而明了方面,这篇讲演到现在仍然是个典范.这里的片断引自他的导论.

黎　曼(Riemann,Georg Friedrich Bernhard,1826—1866),德国数学家.生于德国丹嫩贝格附近,卒于意大利北部马焦雷湖畔.

"众所周知,只有在微积分发明之后,物理学才成为一门科学.只有在认识到自然现象是连续的之后,构造抽象模型的努力才取得了成功.这个任务有两方面:一是构成与时空有关的简单的基本概念,一是找到一个方法,使得可以从用实验能够验证的过程导出结果来.

"这种基本概念的头一个是加速力,这是伽利略引进的.他发现在自由降落时,它就是使物体运动的与时间无关的简单原因.牛顿迈出了第二步:他发现吸引中心的概念,它是力的简单原因.当代物理学家仍然讨论这两个概念:加速力和吸引中心或者排斥中心……所有想要超越这两个概念的企图都失败了.

"但是,人们由概念过渡到过程的方法——微分法已经本质上得到了改进.在微分法发明之后的头一个时期,只讨论过某些抽象的情形:在自由落体的情形中,物体的质量被认为集中在重心上;行星被当做数学点;…….因而由无穷靠近到有限量形只依赖一个变量——时间.然而这种过渡通常必须用多个变量来实现.这是因为,基本概念只考虑时空中的点,而过程描述在有限时间和距离下的作用.由这种过渡就导出偏微分方程(黎曼然后评述了达朗贝尔和傅里叶的工作,他们都讨论过这种方程).从那时起,偏微分方程就成为所有物理学定理的基础.在气体、液体、固体内的声音的理论中,在弹性的研究中,在光学中,到处都用偏微分方程来表达自然界的基本定律,而它们是可以用实验来验证的.在大多数情形下,这些理论确实都是从假设分子受到某种作用力出发的.于是偏微分方程中的常数就依赖于分子的分布,以及它们在一定距离之下如何相互作用.但是我们由这些分布远远不能得出确切的结论……在所有物理学理论以及用分子力来解释的所有现象中,偏微分方程构成唯一可靠的基础.

"这些由归纳法得到的事实,必定也是先验地成立.真正的基本定律仅仅适用于小范围内,并且必须用偏微分方程来陈述.把它们积分,

就得出在更大的时空范围内的规律."

我们要注意,这些是在麦克斯韦尔的工作以及相对论之前写的.黎曼的观点在量子力学中只有一部分是对的,但是整个来讲,他说的相当正确.他关于经典物理学和偏微分方程的论断,到今天也还是对的.

第三十六回 开尔文 迪氏原理提出人
有漏洞 希尔伯特来拯救

黎曼的博士论文中的分析工具是他在1857年论文中称谓的迪利克雷原理. 他是从迪利克雷的教程中获得这个原理的. 这个原理可以追溯到高斯, 事实上它应归于开尔文勋爵的论文《关于偏导数方程 ……》. 这个原理是: 在所有定义域 T 上带有相同边界值的连续函数 u 中, 具有最小的面积分 $\iint |\mathrm{grad}\ u|^2 \mathrm{d}T$ 的 u 满足拉普拉斯方程 $\Delta u = 0$(它是一个位势函数). 这曾使人们相信拉普拉斯方程解的存在性, 如果假设适当地给出边界值, 或者, 对可微复函数, 实部给定在 T 的边界上, 虚部给定在一个点上(自从黎曼用迪利克雷原理解这个问题后, 这个问题就被叫做迪利克雷问题, 这种习惯称谓没什么意义). 限函数(第一类积分)生成一个实 $2p+2$ 维线性空间, 通过充分地允许极点奇性, 黎曼除去了一些周期, 带有 m 个简单极点的单叶函数生成一个 $m-p+1$ 维的线性簇, 事实上, 对特殊的 m 元组维数会更大些, 在这点上应该承认是 Gustav Roth 对黎曼成果的贡献.

克莱布什(Clebsch, Rudolf Friedrich Alfred, 1833—1872), 德国数学家, 哥廷根大学教授, 最早懂得黎曼理论的数学家之一, 1872年11月7日因患白喉病逝世, 年仅39岁.

19世纪50年代末60年代初, 传说魏尔斯特拉斯发现黎曼方法不正确, 对黎曼曾大量使用过的迪利克雷原则, 魏尔斯特拉斯的确是表明了它不像看上去那样明显, 因为迪利克雷积分的下界不能保证最小函数的存在性, 这个结果过了很久才发表, 魏尔斯特拉斯的评论在数学严密性的历史上开创了新的一章, 但人们还是怀疑他是否做了这项工作. 总之, 即使魏尔斯特拉斯说黎曼方法错了, 人们仍然感到不自然. 如果 T 不是单连通的, 虚部会是多值的; 或者, 如果虚部被限制在单连通的 T' 上, 在通过截线得到的 T' 上, 通过截线时会有常数跳跃, 即出现常数周期.

黎曼在论文中对迪利克雷原理的最满意的一个应用是他著名的映照定理, 定理是这样叙述的: 每个单连通区域 T(具有边界)能和圆周内部用一个可微复变函数(共形映照) $1-1$ 对应地照到一个圆的内部. 即使迪利克雷原理能为人们接受, 黎曼的证明也几乎不能通过现代标准的严格检查.

黎曼对迪利克雷原理的最令人激动的应用是在他1857年的论文中发现的. 他在文章中考虑了一个闭黎曼面 T, 设 n 表示面的叶数, $2p+1$ 表示连通的重数(用现在通用的术语, 这就是亏格 p, 这是由克莱布什提出的), 迪利克雷原理用于单连通的 T' 上产生了带有指定奇点的微函数. 奇点给定了在截线上的虚数周期, 黎曼声称, 他能规定沿着截线的具有任意实部的周期, 但他的论证是错误的. 对待定函数在截线的一边任意给定实数, 不能证明上述断言, 因为这不

能保证虚部有一个常数跳跃.确切地说,必须规定实部的常数跳跃并结合通过截线时法向导数的连续性,这就要求用另一类迪利克雷原理,无疑黎曼有这方面的考虑,但显然没人能理解他的这一深谋远虑,在这一点上,虽然迪利克雷原理的必要形式的建立并不比通常的难,不过所有想使用黎曼方法证明的人在弥补缺陷时都偏离了他的论断.

假如黎曼过程被承认,那么就有必要学习和接受黎曼方法.研究者们开始用完全不同的方法重新建立黎曼的成果,其中有魏尔斯特拉斯的非几何函数论的方法;才华横溢的年轻人克莱布什,以及后来的布里尔、麦克司·诺特和意大利学派所用的代数几何方法;戴德金和韦伯的算术方法,所有这些方法都用了黎曼的题材,但是黎曼的方法是完全不能忽视的,θ 数成了流行的课题,但不用黎曼的精神实质来研究.19 世纪末,黎曼的成果产生了巨大影响,而他的思考方法却几乎没人重视,甚至连解析函数的柯西 – 黎曼定义也遭到无端怀疑,而幂级数的魏尔斯特拉斯定义却很流行.

布里尔(Brill, 1842—1935),德国数学家.

麦克司·诺特(M. Noether, 1844—1921),德国数学家,埃米·诺特的父亲.

1869 年到 1870 年,施瓦兹开始用不同的方法证明黎曼的映照定理,他声称他还能保证所有黎曼的存在性定理都是正确的.一个方法是首先解决多边形问题,接着用近似方法解决任意的区域;另一个方法是交替的过程,用以解两个区域的并集的拉普拉斯方程的边界问题.1901 年发生了一件重要的事,希尔伯特拯救了迪利克雷原理.

1938 年重印了黎曼教过的课本《偏微分方程和它在物理问题上的应用》,课本深受物理学家的青睐.

诺伊曼(Neumann, Carl Gottfried, 1832—1925),德国数学家、理论物理学家.生于柯尼斯堡,卒于莱比锡.

二维迪利克雷问题的第一个存在性证明是由魏尔斯特拉斯的学生施瓦兹给出的.施瓦兹于 1892 年在柏林接替魏尔斯特拉斯,受到魏氏对此问题的提示,在关于边界曲线的普遍假设下,利用所谓交替法的手续,他证明了解的存在性.

在同一年,即 1870 年,诺伊曼用算术平均法给出了三维迪利克雷问题的解的另一个存在性证明,而他并没用到迪利克雷原理,其思想主要发挥在他的《关于阿贝尔积分的黎曼理论的讲义》中.

后来庞加莱用扫除法,即"扫出去" 的方法,这种方法处理问题的办法是造出一系列在区域 **R** 上不调和,但取正确边值的函数,这些函数变得越来越调和.

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2}=0$$

第三十七回 庞加莱 潮汐理论开路人
取极限 边值问题一般化

我们取某个有限的区域 T,并以 L 表示它的边界.设 t 是曲线 L 上的任意一点,如果 $F(z)$ 是点 z 的给定在 T 内的某个函数,则我们以 $F^{+}(t)$ 表示函数 $F(z)$ 当点 z 从区域 T 趋于 t 时的极限值.而如果函数 $F(z)$ 也给定在 $T+L$ 的外面,则我们以 $F^{-}(t)$ 表示函数 $F(z)$ 当点 z 总是位于 $T+L$ 的外面趋于 t 时的极限值.

我们假设 T 是单连通或多连通区域,这意味着,T 的补集由 $m+1$ 个不相交的连续统 $C_0,C_1,\cdots,C_m$ 组成,其中 C_0 含有无穷远点,而 $C_1,\cdots,C_m$ 都是有界集合,并且它们的边界 $L_0,L_1,\cdots,L_m$ 都是简单的在 Hölder 意义下光滑的闭曲线.显然,区域 T 的边界具有形式 $L=L_0+L_1+\cdots+L_m$,并且作为 L 的正方向,如通常一样,取使区域 T 位于左边的方向.此外,我们假定,$T+C_1+\cdots+C_m$ 位于方程(E_0) 的某个基本区域 D 的内部.

引进记号

$$u_{jk}=\frac{\partial^{j+k}u}{\partial x^{j}\partial y^{k}},j,k=0,1,\cdots;u_{00}=u \qquad ①$$

一般形式的边值问题为:设 n 是某个自然数或零.要求在区域 T 内找方程

$$E(u)=\Delta u+a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,y)u=0$$

的正规解 $u(x,y)$,它满足边界条件

$$S(u)=\sum_{j,k=0,\cdots,n}^{j+k\leqslant n}\left(a^{jk}(t)u_{jk}^{+}(t)+\int_{L}b^{jk}(t,t_1)u_{jk}^{+}(t_1)\mathrm{d}s_1\right)=f(t) \qquad ②$$

其中,$\mathrm{d}s_1$ 是在点 $t_1\in L$ 的弧元素,$a^{jk}(t)$,$f(t)$ 都是给定的点 t 的在 L 上连续的实函数,$b^{jk}(t,t_1)$ 都是给定的两个点 t,t_1 的实函数,它们满足下面的条件

$$b^{jk}(t,t_1)=\frac{b_0^{jk}(t,t_1)}{|t-t_1|^{\alpha}},0\leqslant\alpha<1 \qquad ③$$

并且 $b_0^{jk}(t,t_1)$ 是在 L 上的连续函数.

我们假定,所有的 $u_{jk}^{+}(t)(j,k=0,1,\cdots,n;j+k\leqslant n)$ 是存在的,在 L 上处处连续.并且认为,条件 ② 在 L 上处处被满足.

这个问题包含着许多不同的数学物理边值问题.

在 $n=0$ 的情形下,条件 ② 取形式

$$a_0(t)u^{+}(t)+\int_{L}b_0(t,t_1)u^{+}(t_1)\mathrm{d}s_1=f(t) \qquad ④$$

假定在 L 上处处 $a_0(t) \neq 0, b_0(t, t_1) = 0$,这个等式就可化为

$$u^+(t) = f(t), t \in L \qquad ⑤$$

相应于这个条件的边值问题称之为迪利克雷问题.

在 ② 中假定 $n = 1, b^{00} = b^{10} = b^{01} = 0$ 而得到.这时,条件 ② 具有形式

$$a_0(+)(\frac{\partial u}{\partial x})^+ + b_0(t)(\frac{\partial u}{\partial y})^+ + C_0(t)u^+(t) = f(t)$$

这就是所谓庞加莱问题,它是庞氏在研究潮汐理论时首先得出的问题.

第三十八回 阿达玛 举出著名之反例
佩龙氏 定义决调和極数

我们先看一下阿达玛的例子.

在有界区域 Ω 内有所有 l 阶广义导数,且这些导数的 $p>1$ 次方幂为可和的,所有可和函数 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的线性流形叫做 $W_p^{(l)}$.

阿达玛(Hadamard Jacques,1865—1963),法国数学家.生于凡尔赛,卒于巴黎.

法国大数学家阿达玛举了一个例子,用以说明:由给定于曲面上的函数的可和性,甚至于连续性,都不足以保证这个函数可以作为 $W_2^{(1)}$ 中的函数的极限值.

设 Ω 是平面(x,y)上的圆 $x^2+y^2\leqslant 1$,又(ρ,θ)为此平面上的极坐标;设

$$\varphi(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n^4\theta}{n^2}$$

则 $\varphi(\theta)$ 显然是连续函数,而

$$u_1(\rho,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n^4\theta}{n^2}\rho^{n^4}$$

是圆 $x^2+y^2<1$ 内的调和函数,在圆 $x^2+y^2\leqslant 1$ 上连续且当 $\rho=1$ 时变成 $\varphi(\theta)$,此外又有当 $\rho_0\to 1$ 时

$$\iint\limits_{\rho\leqslant\rho_0<1}\left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\rho_0}\rho\left(\int_0^{2\pi}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial\rho_1}\right)^2+\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\theta}\right)^2\right)\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\rho=$$

$$2\pi\int_0^{\rho_0}\sum_{n=1}^{\infty}n^4\rho^{2n^4-1}\mathrm{d}\rho=\pi\sum_{n=1}^{\infty}\rho_0^{2n^4}\to\infty$$

由此即可推知,在 Ω 内 $u_1\notin W_2^{(1)}$.

假若 $\varphi(\theta)$ 是在前述意义下的可容许函数,那么用变分方法来解迪利克雷问题时,便得到如此的调和函数 $u_2(x,y)\in W_2^{(1)}$,使得

$$\int_0^{2\pi}|u_2(\rho,\theta)-\varphi(\theta)|^2\mathrm{d}\theta\to 0,\text{当 }\rho\to 1\text{ 时}$$

从而

$$\int_0^{2\pi}|u_2(\rho,\theta)-\varphi(\theta)|\mathrm{d}\theta\to 0$$

对于 u_1 也有同样的结果,因为 $u_1(\rho,\theta)$ 一致连续;所以

$$\int_0^{2\pi}|u_2(\rho,\theta)-u_1(\rho,\theta)|\mathrm{d}\theta\to 0,\text{当 }\rho\to 1\text{ 时} \qquad ①$$

设 $\rho_0<\rho<1$,于是由圆内调和函数的泊松公式可知

$$u_2(\rho_0,\theta_0) - u_1(\rho_0,\theta_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - \rho_0^2}{\rho_0^2 - 2\rho\rho_0\cos(\theta - \theta_0) + \rho^2}(u_2(\rho,\theta) - u_1(\rho,\theta))\mathrm{d}\theta \quad ②$$

取定 ρ_0 而令 $\rho \to 1$,则函数

$$\frac{\rho^2 - \rho_0^2}{\rho_0^2 - 2\rho\rho_0\cos(\theta - \theta_0) + \rho^2}$$

保持有界,从而根据 ① 即知,当 $\rho \to 1$ 时 ② 的右端趋于零,但 ② 的左端与 ρ 无关,所以它等于零;于是由 ρ_0,θ_0 的任意性即知,$u_1 \equiv u_2$,而这是不可能的,因为 $u_2 \notin W_2^{(1)}$,因此 φ 便不是可容许函数.

魏尔斯特拉斯曾举例指出,在允许函数类上的泛函即便有下确界,仍可能根本达不到,即变分问题是否有解,并非明显.阿达玛的例子告诉我们,有些迪利克雷问题即使有解,这个解也不一定能通过变分法得到,直到索伯列夫空间出现后情况才有改变.

索伯列夫(Соболев,Сергей Львович),苏联数学家.

首先定义次调和函数,命 $u(x,y)$ 表示高斯平面域内的调和函数,直到关于 x,y 的二阶偏微商都是连续的,$p = a + ib$ 是 D 的一点,以 p 为中心,$r(r > 0)$ 为半径的圆完全含于 D 内,则由泊松积分有

$$U(a,b) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)\mathrm{d}\theta \quad ①$$

即调和函数在圆心的值等于圆周上值的平均.① 叫做高斯的平均值等式,把调和平均推广到其他便于使有的族时就利用这一等式.

定义在域 D 上(允许 $-\infty$)的实值函数 $u(p), p \in D$,满足下列三个条件时叫做在 D 的次调和函数(Subharmonic function).

佩龙(Perron,Oscar,1880—1975),德国数学家.生于弗兰肯塔尔.

(1)$u(p)$ 满足 $-\infty \leqslant u(p) < \infty$,且不恒等于 $-\infty$.

(2)$u(p)$ 上半连续,即下式成立

$$\overline{\lim_{p'\to p}} u(p') \leqslant u(p), p \in D \quad ②$$

(3) 只要以 $p = a + ib(p \in D)$ 为中心,r 为半径的圆全部包含于 D,则下列不等式成立

$$u(p) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(p + re^{i\theta})\mathrm{d}\theta \quad ③$$

显然,调和函数都是次调和函数.

对于定义在高斯平面的域 D 的函数 $u(p)$,若 $-u(p)$ 在 D 内次调和,则 $u(p)$ 叫做在 D 的超调和函数(Superharmonic function).

佩龙证明了:有在高斯平面域 D 超调和的函数 $u(p)$ 及非空的在 D 次调和的连续函数族 p,满足下列三个条件:

(1) $\forall u(p) \in p$,满足 $u(p) \leqslant v(p)$.

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2} = 0$$

(2) 任取两个 $u_1(p), u_2(p) \in p$，则 $u(p) = \max\{u_1(p), v_2(p_1)\}$ 仍属于 p.

(3) 任取含于 D 的圆 V，用 $q = p_0 + Re^{i\varphi}$ 表示 V 的圆周，对于任意的 $u(p) \in p$，定义新的函数 $u^*(p)$：$p \in D - V$ 时，$u^*(p) = u(p)$；$p = p_0 + re^{i\theta} \in V$ 时

$$u^*(p) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(p_0 + Re^{i\varphi}) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + 2Rr\cos(\theta - \varphi) + r^2} d\varphi$$

则 $u^*(p) \in p$.

这时，命 $H(p) = \sup\limits_{u \in p} u(p)$，则 $H(p)$ 是在 D 内的调和函数.

第三十九回　陈建功　偏微方程典型化[①]
读遗稿　冯康教授结果新

偏微分方程的研究中陈建功证明了一个重要结论，它导致了二阶椭圆偏微分方程的典型化.

设 $A = A(x,y), B = B(x,y), C = C(x,y)$ 都是区域 D 上的连续函数，$AC > B^2$. 对于椭圆偏微分方程

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}) \qquad ①$$

我们寻求在 D 上的单叶函数 $\xi(z) = \xi(z) + i\eta(z)$ 适合于

$$J(z) = \xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x > 0 \qquad ②$$

并且把 ① 变换为典型的椭圆方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \Phi(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}) \qquad ③$$

我们知道：这种变换函数 $\xi(z)$ 的寻求，等价于解拉夫连捷夫的方程组

$$\begin{cases} \alpha\xi_x + \beta\xi_y = \eta_y \\ \beta\xi_x + \gamma\xi_y = -\eta_x \end{cases} \qquad ④$$

这里 $\alpha = A/\sqrt{AC - B^2}, \beta = B/\sqrt{AC - B^2}, \gamma = C/\sqrt{AC - B^2}$.

陈建功证明了如下结论.

定理1　假如椭圆型偏微分方程 ① 的系数 A, B, C 在区域 D 上都可以全微分，并且偏导数

$$\frac{\partial A}{\partial x},\frac{\partial A}{\partial y},\frac{\partial B}{\partial x},\frac{\partial B}{\partial y},\frac{\partial C}{\partial x},\frac{\partial C}{\partial y}$$

都属于 $L^2(D)$，那么存在 D 上的单叶函数，$\xi(z) = \xi(z) + i\eta(z)$ 将 D 映照于 ξ 平面上，并且把 ① 变换为典型方程 ③，这一结果刊登在 1960 年杭州大学学报(自然科学版)1－22 上.

许多微分方程的边值问题可以化为边界上的积分方程. 通过不同途径可得到相应于同一边值问题的不同的边界积分方程. 边界归化的途径很多，冯康先生首创并发展的自然边界归化在这许多途径中有特殊的地位，它完全不同于国际流行的其他边界归化方法而有许多独特的优点，它保持了能量泛函不变量，从而与有限元方法能自然而直接地耦合. 与一般边界归化得到的边界积分方程

① 本回引自文献[63].

也取决于归化途径及所选择的基本解不同，边界自然积分方程是由原边值问题唯一确定的，即对同一边值问题只能得到同一自然积分方程，这一方程准确反映了此边值问题的互补的迪利克雷边值与诺伊曼边值之间的本质联系.

今考察以 Γ 为边界的区域 Ω 上的拉普拉斯方程的迪利克雷边值问题

$$\begin{cases}\Delta u = 0, \Omega \text{ 内} \\ u = u_0, \Gamma \text{ 上}\end{cases} \quad ⑤$$

及纽曼边值问题

$$\begin{cases}\Delta u = 0, \Omega \text{ 内} \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = u_n, \Gamma \text{ 上}\end{cases} \quad ⑥$$

其中 u_n 满足相容性条件 $\int_\Gamma u_n \mathrm{d}S = 0$ 且 ⑥ 的解可差任一常数.

通过自然边界归化可得，同一调和函数的这两类互补边值间的关系，即自然积分方程

$$u_n = Hu_0 \quad ⑦$$

及泊松积分公式

$$u = Pu_0 \quad ⑧$$

其中 H 及 P 分别为边界自然积分算子及泊松积分算子，易见 ⑧ 等价于边值问题 ⑤，而 ⑦，⑧ 等价于原边值问题 ⑥.

在边界 Γ 上，除了上述边界自然积分算子 H 外，还可定义拉普拉斯—贝尔特拉米算子

$$\Delta\Gamma = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} \quad ⑨$$

其中 S 为 Γ 上的弧长参数. H 与 $\Delta\Gamma$ 分别为 Γ 上的 1 阶拟微分算子及二阶微分算子，那么 H 与 $\Delta\Gamma$ 间是否存在某种关系？

当 Ω 为上半平面区域及半径为 R 的圆内或圆外区域时，余德浩（《自然边界元方法的数学理论》，科学出版社，1993）给出了 H 的表达式及 H 与 $\Delta\Gamma$ 间的关系，即当 Ω 为上半平面时，Γ 为 x 轴

$$H = -\frac{1}{\pi x^2} * \quad ⑩$$

$$H^2 = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} = -\Delta\Gamma \quad ⑪$$

当 Ω 为半径为 R 的圆内或圆外区域时，Γ 为半径为 R 的圆周

$$H = -\frac{1}{4\pi R\sin^2\dfrac{\theta}{2}} * \quad ⑫$$

$$H^2 = -\frac{1}{R^2}\cdot\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2} = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}S^2} = -\Delta\Gamma$$

定理 2 设 Ω 为以 Γ 为边界的平面单连通区域，H 为调和方程的边界自然积分算子，$\Delta\Gamma$ 为 Γ 上的 Laplace - Betrand 算子，则

$$H^2 = -\Delta\Gamma$$

这一结论是冯康先生在遗稿中提出，由余德浩完成证明的.

第四十回　演讲中　迪利克雷概定理
不完全　魏氏举例欲推翻

设 u 是平面区域 W 上的实值 C^1 类函数，积分

$$D_W[u] \triangleq \int_W \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

称为 u 在区域 W 上的迪利克雷积分，其值为有限或 $+\infty$，且其值为 0 当且仅当 u 是常数.

如果 $u, v \in C^1$，且 $D_W[u]$ 和 $D_W[v]$ 都是有限的，那么可以考虑混合迪利克雷积分

$$D_W[u,v] \triangleq \int_W \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

上面两种迪利克雷积分在共形映照下都是不变的，显然 $D_W[u] = D_W[u,v]$. 另外，由于

$$D_W[u + tv] = D_W[u] + 2tD_W[u,v] + t^2 D_W[v]$$

是正定二次型，故有重要不等式

$$D_W[u,v]^2 \leqslant D_W[u]D_W[v]$$

现在，设 u 是黎曼曲面 R（或镶边黎曼曲面 $\overline{R}$）上的 C^1 类函数，而 f 是解析函数，不难验证

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \text{和} \mid f' \mid^2$$

都是共变量，从而

$$\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) g\mathrm{d}x\mathrm{d}y \text{ 和 } \mid f' \mid^2 g\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

都是共形不变的，其中 g 为 R（或 $\overline{R}$）上的连续函数，因此，可以对 R（或 $\overline{R}$）上的区域 W 定义迪利克雷积分如下

$$D_W[u] \triangleq \int_W \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{n} \int_W \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) e_i \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$D_W[f] \triangleq \int_W \mid f' \mid^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \triangleq \sum_{i=1}^{n} \int_W \mid f' \mid^2 e_i \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

这一定义是合理的，因为它不依赖于单位分解的选择，事实上，若 $\{e'_i(p)\}_{i=1}^{n}$ 是另一单位分解，则

$$\sum_i \int_W \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right) e_i \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{i,j} \int_W \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right) e_i e'_j \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_j \int_W \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right) e'_j \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

从定义不难得到，若 $f = u + iv$ 是 W 上的解析函数，则由柯西 – 黎曼方程可得

$$D_W[f] = D_W[\mathrm{Re}\, f] = D_W[\mathrm{Im}\, f]$$

迪利克雷原理是一个通过将椭圆型偏微分方程的边值问题化为在某些函数类中求某些泛函的极小值的变分问题来解该边值问题的方法，从狭义上说，迪利克雷原理把在一个具有边界 ∂G 的域 G 中的拉普拉斯方程

$$\Delta u = 0 \qquad ①$$

的第一边值问题

$$u|_{\partial G} = \varphi \qquad ②$$

归结为在满足条件

$$D(u) < +\infty \qquad ③$$

和条件 ② 的函数类中求迪利克雷积分

$$D(u) = \int_G \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 \mathrm{d}x,\ u = u(x_1, \cdots, x_n)$$

的极小的问题.

迪利克雷原理出现于 19 世纪初，在发表之初就得到了广泛的关注. 它既被用于证明边值问题的解的存在性和唯一性这样纯理论目的，也被用来解决具有重要意义的实际问题，关于函数本身及其诸偏导数都连续的函数类的迪利克雷原理的最确切和最完全的叙述，是由迪利克雷在一次讲演中给出的，并于 1876 年由他的一个学生发表的. 当时迪利克雷所给出的证明是不完全的，特别是他没有考虑到：在容许函数即满足条件 ② 和 ③ 的函数的类中所涉及的泛函的极小存在性的必要性问题. 19 世纪 60 年代后期(1870 年)，魏尔斯特拉斯宣布了他对这一原理的批判，他举了一个例子表明：具有某个连续的边界函数 φ 的微分边值问题 ①，② 有解，但相应的变分问题却没有解，其原因是在此情形中对应于问题 ①，② 的解的迪利克雷积分变为无穷，后来大卫 · 希尔伯特出来重建了汤姆森和迪利克雷的变分方法，并建立了迪利克雷原理，作为证明迪利克雷问题的解的存在性的一个方法. 1899 年希尔伯特证明了在区域、边值和容许函数的适当条件下，迪利克雷原理确实成立. 他使迪利克雷原理成为函数论中的一个有力工具，在一部含有希尔伯特 1901 年所作工作的著作中，希尔伯特给出了更一般的条件，迪利克雷原理的进一步的重要发展由索伯列夫作出，他证明了：定义在一个 n 维区域中有充分高阶广义偏导数并属于某个空间 $L_p(p \geqslant 1)$ 的任何函数，在该区域的任意足够光滑的 $m(0 \leqslant m < n)$ 维流形上取连续的边界

汤姆森 (Thomson, William, 1824—1907)，英国物理学家、数学家. 生于贝尔法斯特，卒于拉格斯附近的内特哈尔.

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2} = 0$$

值.这使索伯列夫能够对于多重调和方程,包括区域的边界由不同维流形组成的情形,叙述并证明了迪利克雷原理的正确性.

克莱茵在评价此原理时指出[4]:

> "迪利克雷原理的历史是值得重视的,格林、迪利克雷、汤姆森以及他们那时代的其他一些人把这原理认为完全可靠的方法并自由地运用它.后来,黎曼在复变函数论中指明它对导出主要结果是非凡的工具.所有这些人都明白基本的存在性问题还没有解决,甚至在1870年魏尔斯特拉斯宣布他的批判之前,他怀疑这方法就已有几十年了.后来,在本世纪,这原理被希尔伯特所拯救,利用并扩充了.假如前进步伐要使原理的应用等待希尔伯特的工作,那么19世纪很大一段关于位势理论和函数论的工作就会丧失掉了."

迪利克雷原理的出现是偏微分方程边值问题理论发展阶段中的重要一环,因为这意味着在此理论中原则地树立了一种新观点.迪利克雷原理和它的所有可能的变形,本质上是基于把所研究的问题归结为这类或那类的变分问题,在数学本身及其应用的各个领域中它获得了广泛的应用.这是因为此方法即可用于证明关于方程的解的一般定理,又可用于得到这些方程的表示为所谓极小化序列(即可容许函数的序列,所考虑的泛函在此函数序列上的值趋于泛函的极小值)极限形式的具体的解;此外,基于构造极小化序列的数值方法也适用于电子计算机来求近似解.

概率篇

第七章

第四十一回 掷硬币 不撞围墙不回头
用概率 偏微方程数值解

我们还可以从概率统计模型中推导出拉普拉斯方程.

设有一个由围墙包围的巨型体育场,四周都有门以供出入.现在有一人站在体育场中,他通过掷硬币的方式来决定他行走的方向.他掷两次硬币,如果两次国徽都朝上,他就向正北方迈一步;如果第一次国徽朝上而第二次麦穗朝上,他就向正东方迈一步;如果两次麦穗都朝上,他就向正南方迈一步;如果第一次麦穗朝上而第二次国徽朝上,他就向正西方迈一步.试问在碰到围墙之前,他通过门走出体育场的概率.

我们先取一平面坐标系,使体育场中心位置为原点,不妨设体育场所在区域为 Ω.令 D 表示所有的门,则 $\partial\Omega/D$ 表示围墙.以正东方向为 x 轴,正北方向为 y 轴.设此人每一步的步长为 h;掷硬币时,国徽朝上和麦穗朝上出现的概率相等;此人所站的位置为点(x,y),在碰到围墙之前,他通过门走出体育场的概率为 $P(x,y)$,由于向四个方向行走的概率相等,于是

$$P(x,y) = \frac{1}{4}(P(x,y+h) + P(x+h,y) + P(x,y-h) + P(x-h,y))$$

即

$$\frac{P(x+h,y) + P(x-h,y) - 2P(x,y)}{h^2} + \frac{P(x,y+h) + P(x,y-h) - 2P(x,y)}{h^2} = 0$$

设 $P \in C^2(\Omega)$，由于 h 比 Ω 小得多，我们可以令 $h \to 0$，利用泰勒展开式容易得到

$$\Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$$

记 χ_D 为 D 上的特征函数，即在门 D 上为 1，在墙 $\partial\Omega/D$ 上为 0，于是上述问题转化为求解边值问题

$$\begin{cases} \Delta P = 0, x \in \Omega \\ P = \chi_D, x \in \partial\Omega \end{cases}$$

微分方程的概率解法是一个很早就开始研究的课题，这方面的开创性的工作属于 Kakutani(1944)，杜布(1954,1955)和 Hunt(1957,1958)．早在 20 世纪四五十年代，他们用布朗运动去解一些古典偏微分方程，如迪利克雷问题、泊松问题及热传导方程．

用概率方法去解偏微分方程的一个基本思想是找出与其线性算子对应的随机（马氏）过程，然后用该过程表示出方程的解，过程由热方程的基本解所决定．

对于一个有界正则区域 D，考虑下面的迪利克雷边值问题

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0, x \in D \\ u(x) &= f(x), x \in \partial D \end{aligned} \quad ①$$

其中，f 是 $\partial D \to \mathbf{R}^+$ 的一个连续函数，令 $\tau \triangleq \inf\{t > 0 \mid B_t \notin D\}$，那么方程①的解可表示为

$$u(x) = E_x f(B_\tau), x \in D \quad ②$$

这里 E 表示数学期望．

概率解②和纯粹的分析结果相比较，具有表达简单、直观的特点，而且可用蒙特－卡罗方法给出其近似解，在证明方法上，许多困难的分析问题也可以用现成的概率知识比较直观地加以解决，缺点是：许多微分方程的算子在通常意义下并没有一个“严格的马氏过程”与之对应，因此，概率方法又有很大的局限性．就 $\mathbf{R}^n$ 上的偏微分方程而言，只有对二阶偏微分算子所对应的问题才有可能运用上述思想解决，对于一般的情形有很多实质困难，不可能存在一个一般意义的过程与之对应．

第四十二回 一醉汉 曼哈顿岛蹒跚行[1]
交罚款 蒙特卡罗解方程

1986年Kalos和Whitlock给出了用蒙特卡罗方法解拉普拉斯方程的迪利克雷问题的一个通俗例子.

假设有一个具有纽约市曼哈顿岛形状的网络,分别以街为行以路为列(我们需要忽略百老汇及少数其他的不符网格结构的街道,但这在原则上不允许),假设一个醉汉从第20大街与第6大路的十字路口处的一个酒吧里出来,由于醉了,这位朋友从四个方向中任选一个蹒跚前行,当他走到下一个十字路口时,同样任选了一个方向前进,如此这般一直走下去,忽略他被路贼暗算的可能,被纽约司机撞了的可能和遭遇污染而患病的种种可能,题中的醉汉只能以一种方法结束他的随机散步,那就是到达海港掉进水里——一个在有限时间里以概率1发生的事件.根据这位朋友落水时的确切地点,他将向纽约港务局交份罚款,换句话说,我们有一个以沿曼哈顿边界的所有(x,y)定义的"罚款函数"$\varphi(x,y)$,如果醉汉在点(x^0,y^0)处掉进水里,则他将向纽约港务局交价值 $\$\phi(x^0,y^0)$ 的罚款.

下一步假设有n个醉汉从相同的酒吧出来,每人都在这个城市网络上独立地随意漫步,令$\tilde{u}_n$为这n个醉汉所付罚款的平均值,可以证明

$$\tilde{u} = \lim_{n\to\infty}\tilde{u}_n$$

为拉普拉斯方程(取迪利克雷边界条件ϕ)在该格点(第20大街,第6大路)用有限差分格式中的五点公式求得的解.

Arieh Iserles还诙谐地说:在尝试该算法之前(希望能扮演纽约港务局),最好告知读者,$\tilde{u}_n$收敛于$\tilde{u}$的速度为$0(1/\sqrt{n})$,换句话说,若想得到四位有效数字,我们将需要10^8个醉汉朋友.

---

[1] 本文选自《Monte Carlo Methods》.wiley New York,1986.

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2}=0$$

第四十三回　裂痕深　离散连续相径庭①
拉氏阵　图论分析美妙桥

离散与连续数学之间的裂痕有多深?数学科学的这两个方面在基本的结构和方法上大相径庭,但在更深层次,它们有着比外表看来更实质的联系.

拉普拉斯算子是微分算子 $\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$,除了这种作为与欧几里得空间中的连续体,或与微分流形相关的微分算子,它还在图论中有意义,而且实际上是图论的一种基本工具.

我们从随机游动开始,一般算法的基本问题之一是抽样(从元素具有给定分布的集合 V 中产生一随机元,在多数情形元素服从均匀分布).

现以两个抽样任务为例:

(1) 给定 $\mathbf{R}^n$ 中的凸体 K,产生 K 中作均匀分布的随机点.

(2) 给定图 G,产生 G 中作均匀分布的一随机完美分配.

在简单情形下可以找到好的、特别的抽样方法.例如,若需要 $\mathbf{R}^n$ 的单位球中均匀分布的一随机点,我们可以从标准的正态分布中产生 n 个独立坐标,再将所得向量适当地"规范化".

但一般说来,从一个大的有限集或无限集中抽样是一个难题,已知的一般处理手段只有利用马尔可夫链,我们定义态空间为 S 且其平稳分布是均匀的一个各态历经马尔可夫链,当 S 是有限集时,不难把它设想成一个正则的连通非二部图 G,其顶点集是 S,从一个顶点(态)开始,取图上一个随机途径如下:从顶点 j 连到其均匀分布的邻点中的一点,在走过充分大的 T 步后即停止,则终点的分布近似均匀.

在凸体的情形,要研究的是如下较自然的马尔可夫链:从 K 中一个合适的点开始,每一步都移到以该点为中心,半径为 δ 的球面上均匀分布的下一点(如果下一点跑出 K,就呆在原处不动,并认为这一步"白费"了),步长 δ 将适当选取,不过一般可取为大约 $1/\sqrt{n}$.

如果想要在图的完善匹配中抽样,那么要考察的随机游动就不那么明显了,Jerrum 和 Sinclair 考察了在完美和几乎完美匹配上的随机游动(几乎完美匹配是恰有两个未饱和点的匹配),如果我们产生这样一个匹配,则"它是完美的"概率较小却不可忽视(当图稠密时,它是 $1/n^c$,c 是常数),所以我们只要多次进行直到得出完美匹配.

---

① 本回引自文献[86].

随机游动的每一步出自选取 G 的一条随机边 e，如果现在的匹配完美且包含 e，则删去 e；如匹配几乎完美且 e 是两个未饱和之间的连边，则添加 e；而如果 e 是未饱和点与饱和点之间的连边，则添加 e 并删去匹配中与 e 关联的边.

另一种做法是在一个"大"图 H 上做随机游动，H 的顶点是"小"图 G 的完美或几乎完美匹配，H 中的两个顶点邻接当且仅当这两点所代表的两个匹配中，一个是变动(删去、添加或取代)另一个的某条边所得. 允许加一些环(loop)使得 H 正则.

一般说来，得知马尔可夫链的平稳分布是均匀的，且链是遍历的并不难，重要的是混合时间，也就是我们必须走多远？这个问题促使我们去估计马尔可夫链的混合时间的值，从实际应用的观点，自然会研究有限的马尔可夫链 —— 因为计算机的计算必须是有限的，但在理论分析中，这就取决于对特定的问题人们倾向于用有限的还是一般的可测状态空间，至今人们所发现的所有实质性的联系对两种模型都成立. 事实上，一般的数学课题是离差(Lis persion)：我们可能会对热在物质中离差感兴趣，也会对随机游动期间概率的离差或其相关问题感兴趣.

一个马尔可夫链可以用它的转移阵 $M = (P_{ij})$ 来描述，这里的 P_{ij} 是我们在 i 处走向 j 的概率，在正则无向图 G 上的随机游动这一特殊情形，我们有 $M = (1/d)A$，这里的 A 是图 G 的邻接阵，注意到这时全 1 向量 $\mathbf{1}$ 是 M 的属于特征值 1 的特征向量.

设初始分布是 σ，它可以看成是 $\mathbf{R}^n$ 的一个列向量，则 t 步后的分布是 $M^t\sigma$，由此可知，收敛于稳定分布(它是特征向量 $(\frac{1}{n})I$) 的速度依赖于最大特征值 1 与次大特征值 λ 之差，即间隔谱，它也可以定义为 $L = M - I$ 的最小正特征值.

称 L 为图的拉普拉斯阵，对任一向量 $f \in \mathbf{R}^n$，Lf 在顶点 i 处的值是 f 在 i 的所有邻点处值的平均再减去 f_i，这个性质说明，拉普拉斯阵堪称为经典拉普拉斯算子的离散模拟.

拉普拉斯算子的某些性质依赖于微分流形的精细结构，但很多基本性质不难推广到任意图，可以定义调和函数，热核并得到高斯公式的离散模拟

$$\sum_i (f_i(Lg)_i - g_i(Lf)_i) = 0$$

"连续的"拉普拉斯算子的很多性质也可以通过网格使用相当简单的组合公式取极限求得.

科伯证明下述的笼形定理：设 H 是 3 - 连通可平面图，则 H 可表为一个三维多胞形的骨架，而且该多胞形的每条边都切触单位球，它是架设在离散数学(图论)与连续数学(复分析)之间的一座美妙的桥，Spielmann 和 Teng 借此证明了：n 点可平面图的拉普拉斯阵的谱间隔至多为 $1/n$.

第四十四回 看当今 概率大师数杜布[①]
扫除法 迪氏问题例外集

当今国际上最具名望的概率论大师杜布在其杰作中介绍了抛物型迪利克雷问题、扫除及例外集.

一、抛物型情形的相对化与 PWB 方法

设 $\dot{D}$ 是 $\dot{\mathbf{R}}^N$ 的非空开子集,$\dot{h}$ 是 $\dot{D}$ 上的严格正抛物型函数. $\dot{D}$ 上的函数 $\dot{v}/\dot{h}$ 称为 $\dot{h}$ - 抛物型、$\dot{h}$ - 上抛物型或 $\dot{h}$ - 次抛物型的,如果 $\dot{v}$ 分别是抛物型、上抛物型或次抛物型的. 其记号与经典情形相同,当 $\dot{h}=1$ 时 $\dot{h}$ 略去不写. 这样,$\dot{G}M_{\dot{D}}^{\dot{h}}, {}^{\dot{h}}\dot{R}_{\dot{v}}^{\dot{A}}, \dot{\tau}_{\dot{B}}^{\dot{h}}, \dot{H}_{f}^{\dot{h}}, \cdots$ 不需进一步的标识了. 在 $\dot{h}$ 是共抛物型函数时的对偶情形里,我们就写 $\hat{\dot{G}}M_{\dot{D}}^{\dot{h}}, {}^{\dot{h}}\hat{\dot{R}}_{\dot{v}}^{\dot{A}}, \hat{\dot{\tau}}_{\dot{B}}^{\dot{h}}, \hat{\dot{H}}_{f}^{\dot{h}}, \cdots$.

解关于相对调和函数的第一边值(迪利克雷)问题的 PWB 方法可直接翻译到抛物型情形中来. 和经典情形一样,边界是由 $\dot{\mathbf{R}}^N$ 给定的开子集 $\dot{D}$ 的一个度量紧化得到的:$\dot{D}$ 的关于 $\dot{\mathbf{R}}^N$ 的一点 Alexandrov 紧化的边界称为欧几里得边界. 上和下 $\dot{\mathrm{P}}\mathrm{WB}^{\dot{h}}$ 解 $\overline{\dot{H}}_f^{\dot{h}}$ 和 $\underline{\dot{H}}_f^{\dot{h}}$ 对应于指定的边界函数 f 在 $\dot{D}$ 上被定义,而且若这两个解相等并都是抛物型函数时,函数 f 是抛物型 $\dot{h}$ - 可解的,有 $\dot{\mathrm{P}}\mathrm{WB}^{\dot{h}}$ 解 $\dot{H}_f^{\dot{h}}=\underline{\dot{H}}_f^{\dot{h}}$. $\dot{h}$ - 可解边界,$\dot{h}$ - 规则边界点,$\dot{h}$ - 抛物型测度边界子集,等等概念的定义都可由经典情形中相应的定义翻译过来. $\dot{h}$ - 调和测度零集与 $\mathrm{PWB}^{\dot{h}}$ 解的性质只须在推导中作些不足道的变化就可搬到抛物型情形中来,$\mathrm{PWB}^{\dot{h}}$ 解和约化间的关系在现在情形下仍然保持:当 A 为边界子集时

$$\overline{\dot{H}}_{1_A}^{\dot{h}}=\frac{\dot{R}_{\dot{h}}^{\dot{A}}}{\dot{h}}={}^{\dot{h}}\dot{R}_1^{\dot{A}},\ \overline{\hat{\dot{H}}}_{1_A}^{\dot{h}}=\frac{\hat{\dot{R}}_{\dot{h}}^{\dot{A}}}{\dot{h}}={}^{\dot{h}}\hat{\dot{R}}_1^{\dot{A}}$$

例 1 (欧几里得边界)若 $\dot{\xi}\in\dot{D}$ 且 $\dot{A}=\{\dot{\eta}\in\partial\dot{D}\mid \mathrm{ord}\dot{\eta}\geqslant\mathrm{ord}\dot{\xi}\}$,则 $\overline{\dot{H}}_{1_A}^{\dot{h}}(\dot{\xi})=0$. 事实上,若 $\dot{\xi}=(\xi,s)$,$\dot{\xi}_n=(\xi,s-1/n)$,而 $\dot{u}_n$ 是集 $\{\dot{\eta}\in\dot{D}\mid\mathrm{ord}\dot{\eta}>s-1/n\}$ 的示性函数,那么 $\dot{u}_n$ 在 $\dot{D}$ 上对边界函数 $1_{\dot{A}}$ 的上 $\dot{\mathrm{P}}\mathrm{WB}^{\dot{h}}$ 类中;所以当 n 充分大,$\dot{\xi}_n\in\dot{D}$ 时有 $\overline{\dot{H}}_{1_A}^{\dot{h}}(\dot{\xi}_n)=0$. 因此 $\overline{\dot{H}}_{1_A}^{\dot{h}}(\dot{\xi})=0$.

例 2 设 D 为 $\mathbf{R}^N$ 的 Green 子集,配以一个由 D 的度量紧化产生的边界 ∂D,定义 $\dot{D}=D\times\mathbf{R}$,而规定 $\partial\dot{D}$ 作为 $\dot{D}$ 的边界是由紧化 $(D\cup\partial D)\times\overline{\mathbf{R}}$ 而产生的,其中 $\overline{\mathbf{R}}$ 是 $\mathbf{R}$ 的二点紧化. 由例 1 的一个不足道的修改可知,对 $\dot{D}$ 上每一选取的严格正抛物型函数 $\dot{h}$,上边界 $(D\cup\partial D)\times\{+\infty\}$ 都是 $\partial\dot{D}$ 的一个 $\dot{h}$ - 抛物型测

① 本回引自文献[8].

度零集.这也可由以下事实推出:对 $\dot{D}$ 上的每一正上抛物型函数 $\dot{h}$,函数 $\dot{u}:(\xi,s)\to e^s$ 在 $\dot{D}$ 上都是正 $\dot{h}$ - 上抛物型函数,而且 $\dot{u}$ 在 $\dot{D}$ 的上边界有极限 $+\infty$. $\dot{D}$ 的下边界的作用就更微妙.我们证明当 D 在 $\mathbf{R}^N$ 一超平面的一边时,下边界是抛物型测度零集.这只须找到一列 $\dot{D}$ 上的正抛物型函数 $\dot{u}$,它有极限 0,且当 $\mathrm{ord}\dot{\eta}\leqslant -n$ 时,$\dot{u}_n(\dot{\eta})=0$,而因此只要当 D 是 $\mathbf{R}^N$ 的一个超平面的一边的一个半空间时找到这样的序列就够了;甚至我们可以假设那个超平面就是横坐标超平面,而 D 就是在其上相应的横坐标函数是严格正的那个集.最后,我们只须考虑 $N=1$ 的情况,因为这种情况的一个序列 $\dot{u}$,可诱导出一般情况中的序列来.在 $\dot{D}=\{(\xi,s)\mid\xi>0\}(N=1)$ 上的序列 $\dot{u}$,定义为

$$\dot{u}_n(\xi,s)=\begin{cases}1-\dfrac{(2/\pi)^{1/2}}{(s+n)^{1/2}}\displaystyle\int_\xi^\infty\exp\frac{-a^2}{2(s+n)}l^1(\mathrm{d}a), & s>-n\\ 1,\text{若 } s\leqslant -n\end{cases}$$

它有所述的性质.(为简化记号取 $\sigma=1$)不难推出 $\dot{u}_n(\xi,s)$ 还是 $\{(0,t)\mid t\leqslant -n\}$ 对于 (ξ,s) 的欧几里得边界子集上的抛物型测度,虽然对现在的目的这不是必要的.

例 3 (欧几里得边界,$\dot{h}\equiv 1$)设 $\dot{D}$ 为 $\dot{\mathbf{R}}^N$ 中的一个区间,根据例 1,$\dot{D}$ 的上边界是抛物型测度零集.我们用证明每一满足条件 $\dot{H}_f=\dot{\mathrm{PI}}(\dot{D},f)$ 的有限值连续边界函数 f 都是抛物型可解的来证明 $\partial\dot{D}$ 是抛物型可解的.定义 f_1 在 $\partial\dot{D}$ 上为 f,但在上边界定义 $f_1=\inf_{\dot{D}}f$.那么由于 $f=f_1$ 至多相差一抛物型测度零集,故 $\overline{H}_f=\overline{H}_{f_1}$.因 $\dot{\mathrm{PI}}(\dot{D},f)$ 在 $\dot{D}$ 上对 f_1 的上 $\dot{\mathrm{P}}$WB 类中,这可推出 $\dot{\mathrm{PI}}(\dot{D},f)\geqslant\overline{H}_{f_1}=\dot{H}_f$,并类似地推出 $\dot{\mathrm{PI}}(\dot{D},f)\leqslant\dot{H}_f$,所以有 $\dot{\mathrm{PI}}(\dot{D},f)=\dot{H}_f$,这就是要证明的.

例 4 (欧几里得边界,$\dot{h}\equiv 1$)设 $\dot{D}$ 是一平板 $R^N\times(0,\delta)$,$0<\delta\leqslant+\infty$.根据例 1,上板边界的有限部分是抛物型测度零集.我们证明此边界是抛物型可解的,当 f 为有限值连续边界函数且 $f_0(\xi)=f((\xi,0))$ 时有 $\dot{H}_f=\dot{\mathrm{PI}}(\dot{D},f_0)$.为证明这些结论,先注意到函数 f_0 在 ∞ 处有极限 $f(\infty)$,而且当 ζ 是 ∞ 或者是下板边界的一点时,函数 $\dot{PI}(\dot{D},f_0)$ 在 ζ 有极限 $f(\zeta)$.当 $\delta=+\infty$ 时,函数 $\dot{\mathrm{PI}}(\dot{D},f_0)$ 同时在 $\dot{D}$ 上对 f 的上和下 $\dot{\mathrm{P}}$WB 类中,所以与 $\dot{H}_f$ 相等;当 $\delta<+\infty$ 时,由例 2 中的方法可知 $\dot{H}_f=\dot{\mathrm{PI}}(\dot{D},f_0)$.

例 5 (欧几里得边界)设 $\dot{u}$ 是 $\dot{D}$ 上的 $\dot{h}$ - 上抛物型函数,假设 $\dot{u}$ 在每一边界点有有限或无限的极限,因此定义了一个边界函数 f.假设 $\dot{u}$ 是下有界的而 $\dot{G}M_{\dot{D}}^{\dot{h}}\dot{u}$ 是上有界的.那么 f 是抛物型 $\dot{h}$ - 可解的且 $\dot{H}_f^{\dot{h}}=\dot{G}M_{\dot{D}}^{\dot{h}}\dot{u}$,这是因为 $\dot{u}$ 在 $\dot{D}$ 上对 f 的上 $\dot{\mathrm{P}}\mathrm{WB}^{\dot{h}}$ 类中而 $\dot{G}M_{\dot{D}}^{\dot{h}}\dot{u}$ 在下 $\dot{\mathrm{P}}\mathrm{WB}^{\dot{h}}$ 类中.进而,若 $\dot{h}\equiv 1$,当 $\dot{u}$ 有到 $\dot{\mathbf{R}}^N\cap\overline{\dot{D}}$ 的邻域的一个上抛物型扩张,且此扩张在 $\partial\dot{D}$ 的每一点处有有限极限时,则只要边界点 ζ 不在至多是一个抛物型半极集中,就有 $\lim\limits_{\dot{\eta}\to\zeta}\dot{H}_f(\dot{\eta})=f(\zeta)$.事实

上，$\dot{G}M_D\dot{\mu}$ 可作为一个局部下有界上抛物型函数的递减序列的极限在 $\dot{D}$ 上的限制而得到，这些上抛物型函数都定义在 $\dot{\mathbf{R}}^N-\overline{\dot{D}}$ 的一个邻域上，在 $\dot{D}$ 的一个紧子集的外部都等于 $\dot{u}$，并依赖于这个函数．根据抛物型基本收敛定理，极限函数 $\dot{u}'$ 大于等于其在 $\dot{D}$ 上是抛物型函数的光滑，而且在至多相差一个抛物型半极集条件下这两个函数是相等的．在 $\dot{D}$ 的一个非例外边界点 ξ 处函数 $\dot{G}M_D\dot{\mu}$ 有从 $\dot{D}$ 内部趋近的极限 $f(\xi)=\dot{u}_+'(\xi)$，这是因为 $\dot{u}_+'$ 是下半连续的，$\dot{u}_+'\leqslant\dot{u}$，而且 $\dot{u}$ 有此极限．

应用于欧几里得边界的抛物型可解性：

$\dot{\mathbf{R}}^N$ 的一个开子集的欧几里得边界是抛物型可解的，而且其有限的抛物型非规则边界点集是抛物型半极集．

应用于抛物型 Green 函数（欧几里得边界，$\dot{h}=1$）的表示：

若 $\dot{\eta}$ 是 $\dot{D}$ 的一点，那么 $\dot{G}(\cdot,\dot{\eta})$（在 ∞ 定义为0）在 $\partial\dot{D}$ 上的限制可如例5中的 f 同样得到，并可推出 $\dot{G}_D(\cdot,\dot{\eta})=\dot{G}(\cdot,\dot{\eta})-\dot{H}_f$．更一般地，若 $\dot{B}$ 是 $\dot{D}$ 的开子集，$\dot{\eta}\in\dot{B}$，而且 f 是 $\dot{G}_D(\cdot,\dot{\eta})$（在 $\partial\dot{B}\cap\partial\dot{D}$ 上定义为 0）在 $\partial\dot{B}$ 上的限制，则 $\dot{G}_B(\cdot,\dot{\eta})$ 是 $\dot{G}_D(\cdot,\dot{\eta})$ 减去对 $\dot{B}$ 的有边界函数 f 的 $\dot{\text{P}}$WB 的解．

二、$\dot{h}$ － 抛物型测度

设 $\dot{D}$ 为 $\dot{\mathbf{R}}^N$ 的非空开子集，配以一个由度量紧化产生的边界，而设 $\dot{h}$ 是 $\dot{D}$ 上的严格正抛物型函数．由于 $\dot{h}$ － 抛物型测度可按照 h － 调和测度那样建立起来，故我们略去详细的叙述．若 $\dot{A}$ 是 $\partial\dot{D}$ 的子集，其示性函数是 $\dot{h}$ － 抛物型可解的，我们定义 $\dot{\mu}_D^{\dot{h}}(\cdot,\dot{A})=\dot{H}_{1_{\dot{A}}}^{\dot{h}}$，称 $\dot{A}$ 是 $\dot{\mu}_D^{\dot{h}}$ 可测集，称 $\dot{\mu}_D^{\dot{h}}(\xi,\dot{A})$ 是 $\dot{A}$ 对于 ξ 的 $\dot{h}$ － 抛物型测度，集函数 $\dot{\mu}_D^{\dot{h}}(\xi,\cdot)$ 是一个概率测度，而且这一测度在 $\dot{\mu}_D^{\dot{h}}$ 可测的 Borel 集类上的限制的完备化是这一测度的扩张．如上定义的 $\dot{h}$ － 抛物型测度零集是使 $\dot{\mu}_D^{\dot{h}}(\cdot,\dot{A})$ 恒等于零的集 $\dot{A}$．边界函数对于 $\dot{\mu}_D^{\dot{h}}$ 可测集的 σ 代数是可测的就称为 $\dot{\mu}_D^{\dot{h}}$ 可测，而 $L^p(\dot{\mu}_D^{\dot{h}})$ 定义为由 $\partial\dot{D}$ 到 $\overline{\mathbf{R}}$ 中的 $\dot{\mu}_D^{\dot{h}}$ 可测函数 f 的类，其中两个函数当它们 $\dot{\mu}_D^{\dot{h}}$ 几乎处处相等时就认为它们是相等的（即至多可差一个 $\dot{h}$ － 抛物型测度零集），对这样的 f，$|f|^p$ 对每一 $\dot{D}$ 中点 ξ 都是 $\dot{\mu}_D^{\dot{h}}(\xi,\cdot)$ 可积的．一个从 $\partial\dot{D}$ 到 $\overline{\mathbf{R}}$ 中的函数 f 是 $\dot{h}$ － 抛物型可解的，当且仅当 $f\in L^1(\dot{\mu}_D^{\dot{h}})$，而且若如此，则 $\dot{H}_f^{\dot{h}}=\dot{\mu}_D^{\dot{h}}(\cdot,f)$．

若 $\xi\in\dot{D}$，定义 $\dot{D}_\xi=\{\dot{\eta}\in\dot{D}\mid\text{ord}\,\dot{\eta}<\text{ord}\,\xi\}$．$\dot{\mu}_D(\xi,\cdot)$ 以 $\partial\dot{D}$ 在 ξ 严格下的部分为支集．进而，若 $\dot{A}$ 是 $\partial\dot{D}$ 的在 ξ 严格下的 Borel 子集，则函数 $\dot{\mu}_{D\xi}(\cdot,\dot{A})$ 是 $\dot{\mu}_D(\cdot,\dot{A})$ 在 $\dot{D}_\xi$ 上的限制，这是因为当 $\dot{v}[\dot{u}]$ 属于 $\dot{D}$ 上对 $\partial\dot{D}$ 的边界函数 $1_{\dot{A}}$ 的上（下）$\dot{\text{P}}$WB 类时，这些函数在 $\dot{D}_\xi$ 上的限制也属于 $\dot{D}_\xi$ 上对 $1_{\dot{A}}$ 在 $\partial\dot{D}_\xi$ 上的限制的相应的 $\dot{\text{P}}$WB 类．这一事实有一个有用的含意，即 $\dot{D}_\xi$ 和 $\dot{D}$ 的地位是互逆的．现设

$\dot{D}$ 是 $\dot{\mathbf{R}}^N$ 的一个开子集，$\dot{\xi}$ 是 $\dot{D}$ 的边界点．假设 $\dot{D}$ 的每一点都在 $\dot{\xi}$ 严格下，而且 $\dot{\xi}$ 的某一开邻域在 $\dot{\xi}$ 严格下的部分位于 $\dot{D}$ 内．那么当 $\dot{A}$ 是 $\partial\dot{D}$ 的 Borel 子集时，函数 $\dot{\mu}_D(\cdot,\dot{A})$ 在 $\dot{D}$ 上有定义且是抛物型的，而且有到 $\dot{D}\cup\dot{B}$ 的抛物型扩张 $\dot{\mu}_{D\cup B}(\cdot,\dot{A})$．

三、抛物型壁

经典情形的弱 h – 壁和 h – 壁的定义可直接翻译到抛物型情形中来，就像证明在边界点存在一个局部 h – 壁，则必存在定义于问题中的整个开集上的 h – 壁一样．经典情形布利冈定理在现在情形下也成立：若在 $\dot{\mathbf{R}}^N$ 开子集 $\dot{D}$ 的一个 Euclid 边界点 ξ 处存在一个弱抛物型壁，则那里必存在一个抛物型壁．为证此，可如下修改经典情形的证明．考虑到抛物型壁在 ξ 的存在性是局部性质，只要证明在 D 上 ξ 的一个开邻域的迹上存在一个抛物型壁就够了；故可以假设 $\dot{D}$ 是有界的．于是可设 $\dot{D}$ 的直径 $\delta<+\infty$ 及 $\dot{u}$ 是对 $\dot{D}$ 的在 ξ 的一个弱抛物型壁．为简化记号，假定 ξ 是原点．在 D 定义 $\dot{\phi}:\dot{\eta}=(\eta,t)\to c\mid\eta\mid^2+t^2$，取 c 充分大使 $\dot{\phi}$ 是上抛物型函数．函数 $\dot{\phi}$ 属于 $\dot{D}$ 上对于 $\dot{D}$ 上的边界函数 $f:\dot{\eta}=(\eta,t)\mapsto c\mid\eta\mid^2+t^2$ 的下 PWB 类．因此 $\dot{H}_f\geqslant\dot{\phi}$，而且由证明在原点 $\dot{H}_f$ 有极限 0 可知，$\dot{H}_f$ 是对 $\dot{D}$ 在原点的抛物型壁．设 $\dot{B}$ 是一包含原点的区间，直径为 r，$\dot{A}$ 是 $\dot{D}\cap\partial\dot{B}$ 的紧子集，而 $\dot{\psi}$ 是 $\partial\dot{B}$ 上 $(\partial\dot{B}-\dot{A})\cap\dot{D}$ 的示性函数，使得 $\dot{\mu}_B(\cdot,\dot{\psi})$ 在 $\dot{B}$ 上是抛物型函数，在 $\partial\dot{B}-\dot{A}$ 的不在上边界的每一点处有极限 1．因为 $\dot{B}$ 的上边界的抛物型测度为 0，故存在 $\dot{B}$ 上的正上抛物型函数 $\dot{v}$，$\dot{v}(0)<+\infty$，在上边界的每一点处有极限 $+\infty$．若 $\dot{u}_0$ 是在 $\dot{D}$ 对 f 的下 PWB 类中的，利用次抛物型函数的最大值定理可推得当 $\partial\dot{B}$ 与 $\dot{D}$ 不交时在 $\dot{B}\cap\dot{D}$ 上 $\dot{u}_0$ 小于等于 $(c+1)r^2$，而当 $\partial\dot{B}$ 与 $\dot{D}$ 相交时，在 $\dot{B}\cap\dot{D}$ 上 $\dot{u}_0$ 小于等于

$$(c+1)r^2+(c+1)\delta^2\left(\frac{\dot{u}}{\inf_{\dot{A}}\dot{u}}+\dot{\mu}_B(\cdot,\dot{\psi})\right)+r\dot{v} \qquad ①$$

这样，在两种情形下在 $\dot{B}\cap\dot{D}$ 上 $\dot{H}_f$ 都被和 ① 所控制．这个和在原点有极限

$$(c+1)r^2+(c+1)\delta^2\dot{\mu}_B(0,\dot{\psi})+r\dot{v}(0)$$

而且当 $\dot{A}$ 充分大时，此极限小于等于 $2(c+1)r^2+r\dot{v}(0)$．因 r 可任意小，于是函数 $\dot{H}_f$ 在原点有极限 0，这正是要证明的．

四、经典迪利克雷问题和抛物型迪利克雷问题之间的关系

设 D 是 $\mathbf{R}^N$ 的 Green 子集，配以由 D 的一个度量紧化而产生的边界 ∂D．定义 $\dot{D}=D\times\mathbf{R}$，而定义 $\partial\dot{D}$ 为由紧化 $(D\cup\partial D)\times\overline{\mathbf{R}}$ 而产生的边界，这里 $\overline{\mathbf{R}}$ 是 $\mathbf{R}$ 的二点紧化．设 h 是 D 上的严格正调和函数，定义 $\dot{D}$ 上的抛物型函数 $\dot{h}$ 为 $\dot{h}(\xi,s)=h(\xi)$．我们现在考虑对 D 上 h – 调和函数和对 $\dot{D}$ 上 h – 抛物型函数

的迪利克雷问题.我们假设 $\dot{D}$ 的下边界也是 $\dot{h}$ - 抛物型测度零集.当 D 不太大时这是成立的,例如,当 D 是在 $\mathbf{R}^N$ 一个超平面的一边及 $\dot{h}=1$ 时就成立.设 f 是 ∂D 上的一个广义实值函数,而且在 $\partial\dot{D}$ 上定义 $\dot{f}$ 为 $\dot{f}(\xi,s)=f(\xi)$,只是在 $\dot{D}$ 的上下边界上不对 $\dot{f}$ 作任何限制.这一放松是方便的,而且实际上 $\dot{f}$ 在上下边界的定义也不影响对 $\dot{f}$ 的 $\dot{\mathrm{P}}\mathrm{WB}^{\dot{h}}$ 的解.若 u 是属于 D 上对 f 的上 PWB^h 类的一个 h - 上调和函数,则只要 $\dot{f}$ 在 $\dot{D}$ 的上下边界上定义为 $-\infty$,就有函数 $\dot{u}$: $(\xi,s)\mapsto u(\xi)$ 属于 $\dot{D}$ 上对 $\dot{f}$ 的上 $\dot{\mathrm{P}}\mathrm{WB}^{\dot{h}}$ 类.因此 $\overline{\dot{H}}{}_{\dot{f}}^{\dot{h}}(\xi,s)\leqslant\overline{H}_f^h(\xi)$,而且类似地 $\underline{\dot{H}}{}_{\dot{f}}^{\dot{h}}(\xi,s)\geqslant\underline{H}_f^h(\xi)$.我们断言只要 f 在 D 上是 h - 调和可解的,$\dot{f}$ 在 $\dot{D}$ 上就是 $\dot{h}$ - 抛物型可解的,于是有 $\dot{H}_{\dot{f}}^{\dot{h}}(\xi,s)=H_f^h(\xi)$.特别地,若 A 是 ∂D 的 μ_D^h 可测子集,则积集 $\dot{A}=A\times\mathbf{R}$ 就是 $\dot{\mu}_{\dot{D}}^{\dot{h}}$ 可测的,而且 $\dot{\mu}_{\dot{D}}^{\dot{h}}((\xi,s),\dot{A})=\mu_D^h(\xi,A)$.反之,若 $\dot{f}$ 是 Borel 可测且 $\dot{\mathrm{P}}\mathrm{WB}^{\dot{h}}$ 可解的,而 ∂D 是 h - 可解的,那么 f 就是 Borel 可测的,而且我们证明它是 PWB^h 可解的.事实上,当 $\dot{f}$ 有界时没有什么要证明,而在一般情形,我们有

$$\mu_D^h(\cdot,|f|)=\lim_{n\to\infty}\mu_D^h(\cdot,|f|\wedge n)=$$
$$\lim_{n\to\infty}\dot{\mu}_{\dot{D}}^{\dot{h}}(\cdot,|\dot{f}|\wedge n)=\dot{\mu}_{\dot{D}}^{\dot{h}}(\cdot,|\dot{f}|)<+\infty$$

在这一段中假设 ∂D 是 PWB^h 可解的,$\partial\dot{D}$ 是 $\dot{\mathrm{P}}\mathrm{WB}^{\dot{h}}$ 可解的.这一假设当 $h=1$ 和 ∂D 是欧几里得边界时是满足的.注意,$\partial\dot{D}$ 非欧几里得边界时,$\partial\dot{D}$ 的 $\dot{\mathrm{P}}\mathrm{WB}$ 可解性可由 D 是欧几里得边界的可解性以及 $\dot{D}$ 的上边界和下边界都是抛物型测度零集的事实得到.若 (ξ,s) 是 $\partial\dot{D}$ 的一个有限 $\dot{h}$ - 规则点,那么点 ξ 是 ∂D 的 h - 规则的.事实上,在 ∂D 上于 ξ 连续的一个有界 h - 可解函数,可如上面那样(在上下边界点置 $\dot{f}=0$)定义一个 $\partial\dot{D}$ 上的有界函数 $\dot{f}$.函数 $\dot{f}$ 是 $\dot{h}$ - 可解的,有界,且在 (ξ,s) 连续,所以 $\dot{H}_{\dot{f}}^{\dot{h}}$ 在 (ξ,s) 有极限 $f(\xi)$;亦即 H_f^h 在 ξ 有极限 $f(\xi)$.若 $h=1$ 而 ξ 是 ∂D 的有限规则点,则 $\dot{D}$ 的任一有限点是规则的,这是由于对于 D 在 ξ 的弱壁当它被当做 $\dot{D}$ 上的函数时是一个对于 $\dot{D}$ 在 (ξ,s) 的弱壁.

物理篇

第八章

第四十五回　圆盘上　稳态温度如何求
离变量　拉普拉斯变柯西

问题1　求半径为 c 的圆盘上稳定的温度分布 $u(r,\theta)$，若圆周的温度为 $u(c,\theta)=f(\theta),0<\theta<2\pi$.(图1)

解　我们必须求解拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0,0<\theta<2\pi,0<r<c$$

其约束条件为

$$u(c,\theta)=f(\theta),0<\theta<2\pi$$

如果我们定义 $u=R(r)\Theta(0)$，那么由变量分离法可得

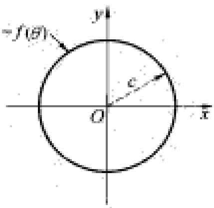


图1

$$\frac{r^2R''+rR'}{R}=-\frac{\Theta''}{\Theta}=\lambda^2$$

以及

$$r^2R''+rR'-\lambda^2R=0 \quad ①$$

$$\Theta''+\lambda^2\Theta=0 \quad ②$$

② 的解为

$$\Theta=c_1\cos\lambda\theta+c_2\sin\lambda\theta \quad ③$$

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2}=0$$

方程 ① 是柯西 – 欧拉方程. 它的通解为

$$R = c_3 r^{\lambda} + c_4 r^{-\lambda} \tag{4}$$

这个问题没有显式条件使得我们可以求出任何一个系数或特征值. 但是这里有一些隐式条件.

首先,我们的直觉是希望温度 $u(r,\theta)$ 在圆周 $r = c$ 的范围内. 并且温度 u 应该在圆内给定点有同一个温度,因为是用极坐标表示这个点. 而点$(r,\theta + 2\pi)$ 等价于点(r,θ),所以我们一定有 $u(r,\theta) = u(r,\theta + 2\pi)$. 换句话说,温度 $u(r,\theta)$ 的周期为 2π. 当且仅当 $\lambda = n, n = 0,1,2,\cdots$ 时,② 的解的周期为 2π. 因此对于 $n > 0$,式 ③ 和 ④ 可以写为

$$\Theta = c_1 \cos n\theta + c_2 \sin n\theta \tag{5}$$

$$R = c_3 r^n + c_4 r^{-n} \tag{6}$$

观察到 ⑥ 中 $r^{-n} = 1/r^n$. 为了把解的范围限制在圆盘的中心(即 $r = 0$),我们必须定义 $c_4 = 0$. 因此对 $\lambda = n > 0$,有

$$u_n = R\Theta = r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \tag{7}$$

其中 A_n 和 B_n 分别替代 $c_3 c_1$ 和 $c_3 c_2$.

关于上面这个表达式有一点要说明,即 $n = 0$ 是一个特征值. 对于这个值,① 和 ② 的解不能由式 ③ 和 ④ 给出. 微分方程 $\Theta'' = 0$ 和 $r^2 R'' + rR' = 0$ 的解是

$$\Theta = c_5 \theta + c_6, R = c_7 + c_8 \ln r$$

周期性要求 $c_5 = 0$,并且我们希望温度在 $r = 0$ 处是有限的,因此有 $c_8 = 0$. 在本例中,偏微分方程的乘积解仅为

$$u_0 = A_0 \tag{8}$$

其中 A_0 表示 $c_6 c_7$.

然后由叠加原理可得 $u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ 或

$$u(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \tag{9}$$

最后,把 $r = c$ 处的边界条件代入 ⑨ 中的结果,可得

$$f(\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

它是函数 f 的完全傅里叶级数展开. 因此,可以看出

$$A_0 = a_0/2, c^n A_n = a_n, c^n B_n = b_n$$

也就是

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\mathrm{d}\theta \tag{10}$$

$$A_n = \frac{1}{c^n \pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta \mathrm{d}\theta \quad ⑪$$

$$B_n = \frac{1}{c^n \pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin n\theta \mathrm{d}\theta \quad ⑫$$

这个问题的解为 ⑨ 表示的级数，其中 A_0，A_n 和 B_n 分别由 ⑩、⑪ 和 ⑫ 所定义。

观察例 1，相应于每个正的特征值，都有两个不同的特征函数 $\cos n\theta$ 和 $\sin n\theta (n = 1,2,3,\cdots)$。在这种情形下，特征值有时称为双特征值(Double eigenvalue)。

问题 2 求如图 2 所示的半圆盘内稳定的温度分布 $u(r,\theta)$。

解 边界值问题为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, 0 < \theta < \pi, 0 < r < c$$

$$u(c,\theta) = u_0, 0 < \theta < \pi$$

$$u(r,0) = 0, u(r,\pi) = 0, 0 < r < c$$

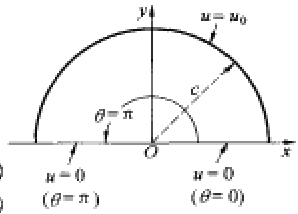


图 2

定义 $u = R(r)\Theta(\theta)$，并由变量分离法可得

$$\frac{r^2 R'' + rR'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda^2$$

$$r^2 R'' + rR' - \lambda^2 R = 0 \quad ⑬$$

$$\Theta'' + \lambda^2 \Theta = 0 \quad ⑭$$

依次把边界条件 $\Theta(0) = 0$ 和 $\Theta(\pi) = 0$ 代入 ⑭ 的解 $\Theta = c_1\cos \lambda\theta + c_2\sin \lambda\theta$ 可得 $c_1 = 0$，$\lambda = n$，$n = 1,2,3,\cdots$，因此，$\Theta = c_2\sin n\theta$。和例 1 不同，在这个问题中，$n = 0$ 不是特征值。令 $\lambda = n$，⑬ 的解为 $R = c_3 r^n + c_4 r^{-n}$。但是由 $u(r,\theta)$ 限制在 $r = 0$ 处的假设可知 $c_4 = 0$。因此

$$u_n = R(r)\Theta(0) = A_n r^n \sin n\theta$$

以及

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n \sin n\theta$$

由 $r = c$ 处的边界条件可得正弦级数

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n c^n \sin n\theta$$

因此有

$$A_n c^n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u_0 \sin n\theta \mathrm{d}\theta$$

$$A_n = \frac{2u_0}{\pi c^n}\cdot\frac{1-(-1)^n}{n}$$

所以该问题的解为

$$u(r,\theta) = \frac{2u_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\left(\frac{r}{c}\right)^n \sin n\theta$$

第四十六回　引力律　理论推导之根据
定位势　无源之点散度零

假定三维欧氏空间中某一点 O 有一个点源泉，每单位时间流出体积等于常数 k 的理想流体．要是没有其他的限制，那么流体的质点将沿从点 O 出发的射线流动，并且速度跟射线的方向无关．因此在空间中任意一点 P，流体质点的速度可以表示为

$$\boldsymbol{v}(P) = \boldsymbol{r}_0 v(r) \qquad ①$$

这里 r 表示 O 到 P 的距离，$\boldsymbol{r}_0$ 表明从 O 到 P 这方向的单位向量．

速度的大小 $v(r)$ 可以这样决定：考虑用点 O 作中心、半径等于 a 的球面 Σ，由于流体每单位时间内流出 Σ 的体积是 k，我们得到

$$k = \iint_{\Sigma} \boldsymbol{v}(P) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma} = \iint_{\Sigma} v(a)\mathrm{d}\sigma = 4\pi a^2 v(a)$$

这表示

$$v(a) = \frac{k}{4\pi}\frac{1}{a^2}$$

由此得到

$$\boldsymbol{v}(P) = \boldsymbol{r}_0 \frac{k}{4\pi}\frac{1}{r^2} \qquad ②$$

由于$\frac{1}{r^2}$是$\left(-\frac{1}{r}+c\right)$对 r 的导数，因此

$$\nabla\left(-\frac{k}{4\pi}\frac{1}{r}\right) = \boldsymbol{r}_0 \frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{k}{4\pi}\frac{1}{r}\right) = \boldsymbol{r}_0 \frac{k}{4\pi}\frac{1}{r^2}$$

这说明 $\boldsymbol{v}(P)$ 这向量场有位势函数

$$\varphi(P) = -\frac{k}{4\pi}\frac{1}{r} \qquad ③$$

这里我们假定在无限远的地方位势等于 0，于是积分常数取作 0．

现在假定源泉连续地分布在一个区域 V 上，这时候流体速度场的位势函数可以这样考虑：从 V 里任意取一个小区域 δV 来看，假定分布在 δV 上的源泉每单位时间流出体积等于 δk 的理想流体，又把这部分源泉在任意点 P 所产生的位势的数值记作 $\delta\Phi(P)$，这里也同样假定在无限远处 $\delta\Phi = 0$，那么由 ③ 得到

$$\delta\Phi(P) = -\frac{\delta k}{4\pi r} = -\frac{\overline{\mu}\delta V}{4\pi r}$$

这里 r 表示 P 到 δV 里任意取定的一点 Q 的距离，$\overline{\mu}$ 表示 δV 的每单位体积在单位时间内流出的平均流体体积．因此，所求的位势是

$$\Phi(P)=\sum_{\delta V\subset V}\delta\Phi(P)=-\iiint_V \frac{\mu}{4\pi r}\mathrm{d}V \quad ④$$

在这积分中，μ 表示当δV 收敛于一点 Q 时$\bar{\mu}$ 的极限，也就是速度场在点 Q 的散度．位势 $\Phi(P)$ 称做 $\mu(P)$ 的牛顿位势．

μ 既然是速度场的散度，那么也就是位势 $\Phi(P)$ 的梯度的散度，所以得到泊松方程

$$\Delta\Phi(P)=\iiint_V \Delta\frac{-\mu(Q)}{4\pi r_{PQ}}\mathrm{d}V_Q=\mu(P) \quad ⑤$$

这里 Q 表示 V 里的变动点，r_{PQ} 表示 P 和 Q 这两点的距离，$\mathrm{d}V_Q$ 表示这三重积分是对变动点 Q 取的，在上面的推理过程中，式 ⑤ 里的拉普拉斯算子只对 $P\in V$ 有意义．不过如果把没有源泉的点看做是散度等于 0 的源泉的所在地，那么源泉分布的区域 V 总可以看做全空间，于是 ⑤ 这个方程对空间中任何一点 P 有意义．只不过当 P 落在没有源泉的区域时，$\mu(P)=0$，而 ⑤ 变成拉普拉斯方程．

称做牛顿位势是由于牛顿著名的万有引力学说，当一个质量等于 m 的质点出现在三维欧氏空间中一点 O 时，它所产生的万有引力场在任意一点 P 的强度是

$$\boldsymbol{f}(P)=-\boldsymbol{r}_0 G\frac{m}{r^2}$$

这是假想在点 P 放一个单位质点时该质点所受到的引力，G 表示一个常数．由于跟 ② 形式上类似，这引力场也有一个位势 $\varphi(P)=Gm\dfrac{1}{r}$．同样道理假定质量连续地分布在一个区域 V 上，那么它所产生的引力场的位势应该是

$$\Phi(P)=\iiint_V G\rho\frac{1}{r}\mathrm{d}V$$

这里的 ρ 是每单位体积所包含的质量，也就是密度．由 ⑤ 知道 $\Delta\Phi(P)=-4\pi G\rho$．假定采用适当的单位，可以使 $4\pi G=1$，于是万有引力场的散度就等于物质的负密度．为什么万有引力跟质量成正比而跟距离的平方成反比，到现在还缺乏理论的说明，不过根据上面的数学推理，我们知道这跟为什么引力场的散度跟物质密度成正比这样的问题是等价的．假如我们能够回答后一个问题，那么跟距离平方成反比的规律只不过是三维欧氏空间的几何性质的必然结论，正如上面我们对流体速度场所做的说明那样，是因为球面积跟半径平方成正比．电磁现象的库仑定律也一样．

由上面的说明知道，在 n 维欧氏空间里位势积分的核必须是 $n-1$ 维超球面的面积的倒数关于半径的原函数．即当 $n>2$ 时，是$\dfrac{1}{-(n-2)\sigma_{n-1}r^{n-2}}$，这里 σ_{n-1} 表示$(n-1)$维单位超球面的面积，即$\dfrac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$；当 $n=2$ 时是$\dfrac{1}{2\pi}\ln r$，这时候

$$\frac{\partial^2\mathscr{U}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathscr{U}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mathscr{U}}{\partial z^2}=0$$

我们得到对数位势.

根据上述的物理的理由,现在我们给位势一个严格的定义.

假定 μ 是 E^n 上一个拉东测度(以后也称质量分布或者简称测度),那么

$$U_n^\mu(P)=\begin{cases}-\int \ln r_{PQ}\mathrm{d}\mu(e_Q), n=2\\ \int r_{PQ}^{2-n}\mathrm{d}\mu(e_Q), n>2\end{cases} \quad ⑥$$

叫做 μ 相对于 E^n 的位势, $n>2$ 的时候叫牛顿位势, $n=2$ 的时候叫对数位数. 这里自然假定⑥的等号右边的积分有意义(可以是 $+\infty$ 或 $-\infty$),以后凡是提到 U_n^μ 都假定是有意义的,注意:这里积分区域 E^n 省去了,为了简便, U_n^μ 也记为 U^μ.

假定 μ 和 ν 是两个拉东测度,那么

$$(\mu,\nu)_{E^n}=\int U_n^\mu \mathrm{d}\nu \quad ⑦$$

叫做 μ 和 ν 相对于 E^n 的相互能量, $(\mu,\mu)_{E^n}$ 叫做 μ 相对于 E^n 的能量. 当然也只有当⑦的等号右边的积分有意义时,能量或者相互能量才有意义. $(\mu,\nu)_{E^n}$ 也记为 (μ,ν).

相互能量的物理意义是使质量分布 ν 脱离质量分布 μ 所产生的引力场的影响所需要的能量. 按物理的想法,要脱离除非是把负载 ν 的物体无限搬运,特别 (μ,μ) 是使 μ"脱离"自己的引力场所需要的能量,所以实际上是"消灭" μ 的引力场所需要的能量,因此也是产生这个引力场所需要的能量. 按物理的说法,就是一个引力场所蕴藏的能量.

富比尼(Fubini, Guido, 1879—1943),意大利数学家. 生于威尼斯,卒于美国纽约.

由富比尼定理得到

定理 1(倒反律) 假定 μ 和 ν 是 E^n 上两个拉东测度,如果 $(\mu,\nu)_{E^n}$ 及 $(\nu,\mu)_{E^n}$ 中有一个是有意义的,那么 $(\mu,\nu)_{E^n}=(\nu,\mu)_{E^n}$.

证明 首先假定 $n>2$,那么结论等号两边分别等于 $\iint r_{PQ}^{2-n}\mathrm{d}\mu(e_P)\mathrm{d}\nu(e_Q)$ 及 $\iint r_{PQ}^{2-n}\mathrm{d}\nu(e_Q)\mathrm{d}\mu(e_P)$, r_{PQ}^{2-n} 当然关于 $\mu\times\nu$ 可测,因此两边等于(假定有意义的话) $\int r_{PQ}^{2-n}\mathrm{d}(\mu\times\nu)(e_{(P,Q)})$. $n=2$ 的时候类似.

假定一个函数 $f(P)$(映进 $\mathbf{R}^1$ 的映射)在拓扑空间里的一点 P_0 的邻域里有意义,而

$$\varliminf_{P\to P_0} f(P)\geqslant f(P_0)$$

那么说 $f(P)$ 在 P_0 下半连续,也说 $-f(P)$ 在 P_0 上半连续.

引理 令 V 是一个拓扑空间里一点 P_0 的邻域. 如果一列函数 $\{f_m(P)\}$ 在 V 里单调增加并且

$$\lim_{n\to\infty} f_m(P) = f(P), P \in V$$

又设每个 $f_m(P)$ 在 P_0 连续，那么 $f(P)$ 在 P_0 下半连续.

证明 因为对任何正数 ε，存在一个正整数 N，使当 $n > N$ 时

$$f(P_0) \leqslant f_n(P_0) + \varepsilon = \lim_{P\to P_0} f_n(P) + \varepsilon \leqslant \varliminf_{P\to P_0} f(P) + \varepsilon$$

ε 是任意的，所以

$$f(P_0) \leqslant \varliminf_{P\to P_0} f(P)$$

定理 2 令 V 是一点 $P_0 \in E^n$ 的一个邻域. 假定 μ 是 E^n 上的一个拉东测度，μ 在 V 的限制 $\mu|_V$ 是正测度，那么 U_n^μ 在 P_0 下半连续.

证明 因为 $U^{\mu|_V} = U^{\mu|_V} + U^{\mu|_{C(V)}}$，而 $U^{\mu|_{C(V)}}$ 在 P_0 是连续的. 现在对一个正数 c 定义

$$r_{[PQ]} = \begin{cases} r_{PQ}, 当\ r_{PQ} \geqslant c\ 时 \\ c, 当\ r_{PQ} < c\ 时 \end{cases}$$

那么当 $n > 2$ 时，当 c 单调减小趋于 0 的时候，$r_{[PQ]}^{2-n}$ 单调增加并且以 r_{PQ}^{2-n} 为极限. 因此由勒贝格收敛定理

$$U^{\mu|_V}(P) = \lim_{c\to 0}\int r_{[PQ]}^{2-n} \mathrm{d}(\mu|_V)(e_Q)$$

等号右边极限号下的积分在 P_0 是连续的，所以由引理，$U^{\mu|_V}$ 在 P_0 下半连续. 当 $n = 2$ 时类似.

假定 μ 是拓扑空间 X 上的一个 (B) 测度，那么点集 $H = \{P \mid P \in X$，并且对 P 的任何邻域 V，$|\mu|(V) > 0\}$ 称为 μ 的支柱（或者基地）. μ 的支柱当然是闭集.

定理 3(Evans-Vasilescu) 假定 E^n 上一个分布 μ 的支柱是 S，$U^\mu(\rho)|_S$ 在一点 $P_0 \in S$ 连续，那么 $U^\mu(P)$ 在 P_0 也连续.

证明 假定 $n > 2$，用 $K(P_0, R)$ 表示中心在 P_0、半径等于 R 的开超球.

$$U^\mu(P) = \int r_{PQ}^{2-n} \mathrm{d}\mu(e_Q) = \int_{K(P_0,R)} r_{PQ}^{2-n} \mathrm{d}\mu(e_Q) + \int_{C(K(P_0,R))} r_{PQ}^{2-n} \mathrm{d}\mu(e_Q) \quad ⑧$$

把最后两个积分的前一个记作 $W_1(P)$，后一个记作 $W_2(P)$. 那么 $W_2(P)$ 在 P_0 连续.

由假设，$U^\mu(P_0)$ 有限，也就是 $\int r_{P_0Q}^{2-n} \mathrm{d}\mu(e_Q)$ 存在，所以

$$\lim_{R\to 0}\int_{K(P_0,R)} r_{P_0Q}^{2-n} \mathrm{d}\mu(e_Q) = 0$$

也就是对任何正数 η，存在一个正数 δ 使

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2} = 0$$

$$|W_1(P_0)| = \left|\int_{K(P_0,R)} r_{P_0Q}^{2-n}\mathrm{d}\mu(e_Q)\right| < 2^{-n}\eta, 0 < R \leqslant \delta \tag{9}$$

现在固定一个 R 使上面式子成立. 由于 $W_1(Q')|_S$ 在 P_0 连续, 当 $Q' \in S$ 并且跟 P_0 充分接近时

$$|W_1(Q')| = |W_1(Q')|_S| < 2^{-n}\eta$$

当 P 跟 P_0 充分接近的时候, S 中到 P 的最近点 Q_0 也跟 P_0 充分接近, 所以 $W_1(Q_0)$ 也满足上面这个等式, 即

$$|W_1(Q_0)| < 2^{-n}\eta$$

因此当 P 跟 P_0 充分接近的时候, 不难知道

$$|W_1(P)| < 2^{n-2}2^{-n}\eta = 2^{-2}\eta \tag{10}$$

此外, $W_2(P)$ 在 P_0 连续, 所以当 P 跟 P_0 充分接近的时候

$$|W_2(P) - W_2(P_0)| < 2^{-1}\eta \tag{11}$$

由 ⑧, ⑨, ⑩, ⑪ 知道, 当 P 跟 P_0 充分接近时

$$|U^{\mu}(P) - U^{\mu}(P_0)| \leqslant |W_1(P) - W_1(P_0)| + |W_2(P) - W_2(P_0)| < 2^{-2}\eta + 2^{-n}\eta + 2^{-1}\eta < \eta$$

$n = 2$ 的时候也不难证明.

第四十七回　银河系　行星之间靠引力[①]　球对称　最简单是引力势

星系中的许多质量来自恒星.为了计算大量恒星构成的集团所产生的势,原则上只要简单地把每颗恒星产生的点质量势加起来就可以了.当然,对大约包含 10^{11} 颗恒星的典型星系来说这种做法是不切实际的,而在大部分问题中,建立模型时只要考虑处处与局域恒星密度成比例的一种平滑分布密度所产生的势就足够了.具体来说,如果考虑一个像银河系这样的星系,并把恒星作为在这类平滑势中运动的试验粒子来处理,就可得到单颗恒星在星系中运动轨道的极好的近似.这里我们所要说明的是如何来计算这种理想星系产生的力场.

我们的目的在于计算由于质量分布 $\rho(\boldsymbol{x})$ 的引力作用,在 $\boldsymbol{x}$ 位置上单位质量所受到的力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$.按照牛顿引力的平方反比律,力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ 可由 $\boldsymbol{x}'$ 处小体积元 $\delta^3\boldsymbol{x}'$ 的质量 $\rho(\boldsymbol{x}')\delta^3\boldsymbol{x}'$,对 $\boldsymbol{x}$ 处单位质量的作用力

$$\delta\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = G\frac{\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|^3}\delta m(\boldsymbol{x}') = G\frac{\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|^3}\rho(\boldsymbol{x}')\delta^3\boldsymbol{x}' \qquad ①$$

进行求和而得出.这样就有

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = G\int\frac{\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|^3}\rho(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}' \qquad ②$$

如果引力势 $\Phi(\boldsymbol{x})$ 定义为

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = -G\int\frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}' \qquad ③$$

且注意到

$$\nabla_x\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|}\right) = \frac{\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|^3} \qquad ④$$

我们发现可以把 $\boldsymbol{F}$ 写成

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \nabla_x\int\frac{G\rho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}' = -\nabla\Phi \qquad ⑤$$

其中为简单起见,省略了梯度算子∇中的下标 $\boldsymbol{x}$.因为力由势的梯度所确定,所以引力是保守力.

势作为一种标量场,它比力这种向量场更易于作直观研究,所以势是很有用的.还有,在许多情况中,为得到 $\boldsymbol{F}$,最好的方法是先计算势,然后再取其梯度.

---

① 本回引自文献[123].

如果对方程 ② 取散度，我们有

$$\nabla \cdot F(x) = G\int \nabla_x \cdot \left(\frac{x' - x}{|x' - x|^3}\right)\rho(x')\mathrm{d}^3x' \qquad ⑥$$

这时便得到

$$\nabla_x \cdot \left(\frac{x' - x}{|x' - x|^3}\right) = -\frac{3}{|x' - x|^3} + \frac{3(x' - x)\cdot(x' - x)}{|x' - x|^5} \qquad ⑦$$

当 $x' - x \neq 0$ 时，就可以在这个方程最后一项的分子和分母中消去因子 $|x' - x|^2$ 而得出

$$\nabla_x \cdot \left(\frac{x' - x}{|x' - x|^3}\right) = 0 \quad , x' \neq x \qquad ⑧$$

所以，方程 ⑥ 的积分值必然只来自点 $x' = x$，因而我们可以把这个积分的体积限制为以这一点为中心、半径为 h 的小球．只要 h 充分小，这一体积内的密度近乎为常数，于是我们就可以把 $\rho(x')$ 从积分号中取出．这时，余下的被积表达式可按下列过程进行整理

$$\begin{aligned}\nabla \cdot F(x) &= G\rho(x)\int_{|x'-x|\leqslant h} \nabla_x \cdot \left(\frac{x' - x}{|x' - x|^3}\right)\mathrm{d}^3x' = \\ &- G\rho(x)\int_{|x'-x|\leqslant h} \nabla'_x \cdot \left(\frac{x' - x}{|x' - x|^3}\right)\mathrm{d}^3x' = \\ &- G\rho(x)\int_{|x'-x|=h} \frac{(x' - x)\cdot \mathrm{d}^2S'}{|x' - x|^3}\end{aligned} \qquad ⑨_1$$

上述过程中的最后一步使用了散度定理，以把体积分转换成面积分．现在在球面 $|x' - x| = h$ 上我们有 $\mathrm{d}^2S' = (x' - x)h\mathrm{d}^2\Omega$，这里 $\mathrm{d}^2\Omega$ 为球面小单元的立体角．因此，方程 $⑨_1$ 变为

$$\nabla \cdot F(x) = -G\rho(x)\int \mathrm{d}^2\Omega = -4\pi G\rho(x) \qquad ⑨_2$$

如果我们把方程 ⑤ 代入 $\nabla \cdot F$，就得到把引力势 Φ 与密度 ρ 相联系的泊松方程

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho \qquad ⑩$$

方程 ⑩ 提供了求 Φ 的一条途径，然后再求 F，这条途径往往比解方程 ② 或 ③ 更为方便．对于 $\rho = 0$ 的特殊情况，我们就有拉普拉斯方程

$$\nabla^2\Phi = 0 \qquad ⑪$$

我们可以用泊松方程导出方程 ⑧ 的一种有用的推广形式．x' 处单位点质量的密度为 $\rho(x) = \delta(x - x')$，这里 δ 是狄拉克 δ 函数，而其势为 $-G|x - x'|^{-1}$．因此，由方程 ⑩ 得出

$$\nabla_x^2\left(\frac{1}{|x - x'|}\right) = -4\pi\delta(x - x') \text{ 或 } \nabla_x \cdot \left(\frac{x' - x}{|x' - x|^3}\right) = -4\pi\delta(x - x') \qquad ⑫$$

如果把方程 ⑩ 的两端对包含质量为 M 的任意体积进行积分，然后再应用

散度定理,我们便得到

$$4\pi G\int \rho \mathrm{d}^3 \boldsymbol{x} = 4\pi GM = \int \nabla^2 \Phi \mathrm{d}^3 \boldsymbol{x} = \int \nabla \Phi \cdot \mathrm{d}^2 \boldsymbol{S} \tag{13}$$

这一结果就是高斯定理,它可以表述为:任意闭合曲面上$\nabla\Phi$ 的法向分量在该曲面上的积分等于 $4\pi G$ 乘以该曲面所围的质量.

我们已经知道引力是保守力,这就是说如果把两颗恒星从无穷远处移动到某一给定状态,那么克服引力所做的功与恒星移动所经过的路径无关,我们把这样所做的功定义为这种状态所具有的势能.同样,在形成某种任意的连续质量分布 $\rho(\boldsymbol{x})$ 时克服引力所做的功,与如何形成这种质量分布的细节无关,我们把它定义为这种质量分布的势能,简称势能.势能的一种表达形式可由下面的推理导得.

假设某些质量已经位于所要求的位置,其密度和引力势为 $\rho(\boldsymbol{x})$ 和 $\Phi(\boldsymbol{x})$. 如果现在把小质量 δm 从无穷远处移动到位置$\boldsymbol{x}$,则所做的功为 $\delta m\Phi(\boldsymbol{x})$. 因此,如果密度加上一个小的增量 $\delta\rho(\boldsymbol{x})$,则势能的变化为

$$\delta W = \int \delta\rho(\boldsymbol{x})\Phi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}^3\boldsymbol{x} \tag{14}$$

根据泊松方程,由此引起的引力势变化 $\delta\Phi(\boldsymbol{x})$ 应满足$\nabla^2(\delta\Phi) = 4\pi G(\delta\rho)$,因此有

$$\delta W = \frac{1}{4\pi G}\int \Phi \nabla^2(\delta\Phi)\mathrm{d}^3\boldsymbol{x} \tag{15}$$

利用散度定理,我们可以把上式写成

$$\delta W = \frac{1}{4\pi G}\int \Phi \nabla^2(\delta\Phi)\cdot \mathrm{d}^2\boldsymbol{S} - \frac{1}{4\pi G}\int \nabla\Phi\cdot\nabla(\delta\Phi)\mathrm{d}^3\boldsymbol{x} \tag{16}$$

其中面积分值为零,这是因为随着 $r\to\infty$,有 $\Phi \propto r^{-1}$ 和 $|\nabla\delta\Phi| \propto r^{-2}$,故面积分中的被积表达式与 r^{-3} 成正比,而总表面积与 r^2 成正比.但是

$$\nabla\Phi\cdot\nabla(\delta\Phi) = \delta|(\nabla\Phi)|^2/2$$

因此有

$$\delta W = -\frac{1}{8\pi G}\delta\left(\int |\nabla\Phi|^2\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\right) \tag{17}$$

如果现在把所有的 δW 相加,我们就得到势能的一种简单表达形式为

$$W = -\frac{1}{8\pi G}\int |\nabla\Phi|^2\mathrm{d}^3\boldsymbol{x} \tag{18}$$

为了求得 W 的另一种表达式,我们可以再一次应用散度定理,同时用 $4\pi G\rho$ 来替代$\nabla^2\Phi$,这样就得到

$$W = \frac{1}{2}\int \rho(\boldsymbol{x})\Phi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}^3\boldsymbol{x} \tag{19}$$

第四十八回　变分法　数学物理方程多
可容许　嵌入算子性质好

我们知道,数学物理方程往往是某些变分问题的欧拉方程,在变分法中,欲求某个形如

$$\overbrace{\int\cdots\int_{\Omega}}^{n} F\left(u,\frac{\partial u}{\partial x_j},x_j\right)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n+\overbrace{\int\cdots\int_{S}}^{n-1}\phi\left(u,\frac{\partial u}{\partial x_j},x_j\right)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$

的泛函在某类函数中的极值,可以求对应的欧拉方程的某个边界问题的解.

但这种关于泛函的极值的变分问题,有时可以用直接的方法求解,于是自然产生这样的问题,可否反过来将一个原给的边界问题化为一个变分问题,然后借直接方法来求其解,这就是数学物理中直接方法的思想.

我们以拉普拉斯方程的迪利克雷问题为例.

设 Ω 为 n 维空间中的有界区域,这个区域由分块连续可微的曲面 S 或由有限个这种曲面所围成的,设 S 是简单的边界,就是这个边界可以分解为有限个维数不同的流形,$S_{n-1}^{(1)},S_{n-1}^{(2)},\cdots,S_0^{(1)},\cdots,S_0^{(k)}$,并且利用定义在区域 Ω 上的一部分上的连续且有 l 阶的连续导数的坐标变换,能将每个流形 $S_{n-s}^{(j)}$ 变成平面.

我们考虑 Ω 内的可和函数 $u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,它有平方可和的所有一阶广义导数,设

$$D(u)=\int\cdots\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\mathrm{d}\Omega<\infty$$

这就是说,$u\in W_2^{(1)}$;又由于 $2<q=\dfrac{(n-1)2}{n-1\times 2}=2+\dfrac{2}{n-2}$,所以由嵌入定理即知,在任何 $n-1$ 维流形上 $u\in L_2$,此外,由嵌入算子的全连续性可知,如果某个 $n-1$ 维流形的一块 S_1 平移了矢量 $\Delta\boldsymbol{p}$ 后仍在 Ω 内,则当 $|\Delta\boldsymbol{p}|\to 0$ 时

$$\overbrace{\int\cdots\int_{S_1}}^{n-1}|u(\boldsymbol{p}+\Delta\boldsymbol{p})-u(\boldsymbol{p})|^2\mathrm{d}v_p\to 0$$

非常明显,并非所有给定在曲面 S 上的函数 $\varphi\in L_2$,都能是给定在区域内部的某个函数 $v\in W_2^{(1)}$ 的极限值.

设 φ 为定义于区域 Ω 的边界 S 上的函数,如果存在着此种函数 $v\in W_2^{(1)}$,使得 φ 是它的极限值,那么我们便称 φ 是可容许的函数.

迪利克雷问题在于求 $W_2^{(1)}$ 中的此种调和函数,使它在边界上取可容许的给定值 φ,即 $u|_S=\varphi$.

第四十九回　静电场　静止电荷无旋场[①]
静磁场　稳定电流无源场

一、静电场

由静止电荷产生的稳定电场分布称为静电场.此时,没有电荷的流动,电场强度 $\boldsymbol{E}$ 也不随时间变化 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(x,y,z)$,从而磁场为零 $\boldsymbol{B} = 0$.

由麦克斯韦方程,有

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D} = \rho_f \tag{①}$$

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{E} = 0 \tag{②}$$

由式 ②,存在静电势 ϕ(其决定可相差一个任意常数),使

$$\boldsymbol{E} = -\ \mathrm{grad}\ \phi \tag{③}$$

这样,方程 ① 化为

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\epsilon\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\epsilon\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\epsilon\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)=\rho_f \tag{④}$$

即在介质内部,ϕ 满足一个二阶椭圆型方程.④ 是一个非齐次的拟调和方程.

现在讨论 ϕ 在介质交界面上应满足的条件.在介质的交界面上有

$$[\boldsymbol{D}]\cdot\boldsymbol{n} = \omega_f \tag{⑤}$$

$$[\boldsymbol{E}]\times\boldsymbol{n} = 0 \tag{⑥}$$

注意到 $\boldsymbol{D} = -\ \epsilon\mathrm{grad}\ \phi$,式 ⑤ 可写为

$$\epsilon_1\left(\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{n}}\right)_1-\epsilon_2\left(\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{n}}\right)_2=-\ \omega_f \tag{⑦}$$

其中下标 1 及 2 分别表示在交界面上处于介质 1 及 2 一侧的相应值.式 ⑦ 可写为

$$\left[\epsilon\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{n}}\right]=-\ \omega_f \tag{⑧}$$

由式 ⑥,对任何与交界面相切的方向 $\boldsymbol{m}$,成立

$$(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2)\cdot\boldsymbol{m} = 0$$

即

$$\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{m}}(\phi_1-\phi_2) = 0$$

这表示 $\phi_1-\phi_2$ 在交界面上为常数.由于 ϕ 的决定可相差一个任意常数,适当调整这一常数之值,可得在交界面上

① 本回引自文献[27].

$$\frac{\partial^2\mathscr{U}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathscr{U}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mathscr{U}}{\partial z^2}=0$$

$$\phi_1 = \phi_2 \quad 或 \quad [\phi] = 0 \tag{9}$$

这样，静电势在交界面上应满足的条件为

$$\phi_1 = \phi_2 \tag{10}$$

$$\varepsilon_1\left(\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{n}}\right)_1 - \varepsilon_2\left(\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{n}}\right)_2 = -\omega_f \tag{11}$$

即本身为连续，但一阶法向导数有间断. 而在不存在面电荷的情况，则成立

$$\phi_1 = \phi_2 \tag{12}$$

$$\varepsilon_1\left(\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{n}}\right)_1 = \varepsilon_2\left(\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{n}}\right)_2 \tag{13}$$

现在考察在其他边界上的边界条件. 如果我们要决定一带电导体以外空间中的静电场，我们就必须知道在导体表面上的边界条件. 我们知道，在导体上加置自由电荷时，电荷会自动地重新分布，一直到导体内部处处电场强度为零，从而整个导体上的静电势为一常数时才达到平衡. 这是因为当导体内部电场不为零时，电荷必在电场作用下逐渐流动；而只有在电场为零时，才能达到静电情况. 因此导体上的静电分布满足以下几个条件：

(1) 每个导体上电荷分布的总和等于所加置的电荷总量.

(2) 导体所带的电荷都以面电荷的形式分布在导体表面上，在导体内部不能带电荷(这一现象称为趋肤效应). 这是因为在导体内部 $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} = 0$，从而由式 ① 可得电荷密度为零.

(3) 每个导体都是等势体，其上静电势为常数.

(4) 自由电荷通过导体边界向外发出的总电通量等于导体上总自由电荷

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = Q_f \tag{14}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为导体 Ω 边界的单位外法线方向.

这样，在带电导体表面上的边界条件应为

$$\phi = 常数(待定) \tag{15}$$

$$\int_{\partial\Omega} \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{d}S = Q_f \tag{16}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 指向导体内部. 这里，边界条件由两个式子组成. 第一个条件 ⑮ 表示 ϕ 为一待定常数，是导体表面 $\partial\Omega$ 为等势面的数学表达. 由于此常数待定，这不是一个迪利克雷型的边界条件，还需要另一个条件来加以补充，以限制其自由度. 第二个条件 ⑯ 是 $\varepsilon \dfrac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{n}}$ 在 $\partial\Omega$ 上的积分，表示总电通量为已知. 这是一个非局部的边界条件. ⑮，⑯ 是一种新型的边界条件，称为“等值面边界条件”或“总流量边界条件”.

此外，若求解的是在无界区域上的静电场，还要考虑无穷远处的边界条件. 通常可设在无穷远处电势为零，即

$$\phi = 0 \tag{17}$$

这是迪利克雷边界条件.在实际求解时,可取一相当大的区域近似代替无界区域,而在其"无穷远边界"上设置上述条件.

还有在静电场对称面上的条件

$$\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{n}} = 0 \tag{18}$$

这是诺伊曼边界条件.

这样,对静电场的决定,总可化为求解二阶椭圆型方程的适定的边值问题,并可以方便地使用有限元法求得其数值解.

静电场中有关的量,也都可以用静电势 ϕ 来描述.例如,能量密度为

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} = \frac{\varepsilon}{2}\boldsymbol{E}^2 = \frac{\varepsilon}{2}\,|\,\mathrm{grad}\,\phi\,|^2$$

而电磁能量为

$$U_{e,m} = \frac{1}{2}\int_{\Omega}\varepsilon\,|\,\mathrm{grad}\,\phi\,|^2\mathrm{d}V \tag{19}$$

⑲ 就是著名的迪利克雷积分.它在变分方法的研究中起着基本的作用.

注意到由式 ①,有

$$\varepsilon\,|\,\mathrm{grad}\,\phi\,|^2 = -\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{grad}\,\phi = -\mathrm{div}(\phi\boldsymbol{D}) + \phi\,\mathrm{div}\boldsymbol{D} = -\mathrm{div}(\phi\boldsymbol{D}) + \phi\rho_f$$

式 ⑲ 又可写为

$$U_{e,m} = \frac{1}{2}\int_{\Omega}\phi\rho_f\mathrm{d}V \tag{20}$$

其中 Ω 为整个静电场所在的区域.

二、稳定电流的电场

稳定电流的电场具有静电场的特征.此时 ρ_f 及 $\boldsymbol{j}_f$ 均只是 (x,y,z) 的函数,而与 t 无关,从而 $\boldsymbol{E}$ 及 $\boldsymbol{B}$ 等也与 t 无关.由麦克斯韦方程组得

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{D} = \rho_f \tag{21}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = 0 \tag{22}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0 \tag{23}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}_f \tag{24}$$

此外,电荷守恒方程 ⑭ 给出

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{j}_f = 0 \tag{25}$$

和静电场情形一样,前面两个方程 ㉑ 与 ㉒ 已足以决定电场.即可引进电势 ϕ,使 ③ 与式 ④ 成立.在介质交界面上,也有和前面一样的条件 ⑩ 与 ⑪.因此可以和静电场一样地进行讨论.

但在实际应用中,特别在电阻率法测井中,对稳定电流的电场,我们常采用

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2} = 0$$

以下有所不同的方法来建立其相应的微分方程模型.

仍由式 ㉒ 引入势函数 ϕ

$$E = -\operatorname{grad}\phi \tag{㉖}$$

再由微分形式的欧姆定律,电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和电流密度$\boldsymbol{j}_f$ 有下述关系

欧姆(Ohm, Martin, 1792—1872),德国数学家.物理学家 G.S.欧姆(以发现电学的欧姆定律著称)的弟弟.

$$\boldsymbol{j}_f = \sigma\boldsymbol{E} = \frac{1}{r}\boldsymbol{E} \tag{㉗}$$

或

$$\boldsymbol{E} = \gamma\boldsymbol{j}_f \tag{㉘}$$

其中 σ 及 $\gamma = \dfrac{1}{\sigma}$ 分别称为电导率及电阻率.这是因为场强的方向决定了介质中电流流动的方向,而电流流动的速度与 $\boldsymbol{E}$ 成正比,与电阻率成反比.

这样,由式 ㉖ 与 ㉘ 有

$$\boldsymbol{j}_f = -\frac{1}{\gamma}\operatorname{grad}\phi \tag{㉙}$$

将其代入电流连续性方程 ㉕,就得到 ϕ 满足如下的二阶椭圆型方程

$$-\operatorname{div}\left(\frac{1}{\gamma}\operatorname{grad}\phi\right) = 0 \tag{㉚}$$

即

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial z}\right) = 0 \tag{㉛}$$

这是一个拟调和方程.

在介质交界面上,我们可从 ㉒ 及 ㉕ 的积分形式与得到相应的交界面条件

$$[\boldsymbol{E}]\times\boldsymbol{n} = 0 \tag{㉜}$$

$$[\boldsymbol{j}_f]\cdot\boldsymbol{n} = 0 \tag{㉝}$$

因此,由式 ㉖ 及 ㉙ 可得

$$\phi_1 = \phi_2 \tag{㉞}$$

$$\frac{1}{\gamma_1}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{n}}\right)_1 = \frac{1}{\gamma_2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{n}}\right)_2 \tag{㉟}$$

这里式 ㉞ 也是在调整一附加常数后得到的.上两式表示:在介质的交界面上,势与电流的法向分量均是连续的.

这时,我们可以碰到的边界条件有

(1) 迪利克雷边界条件

$$\phi = \text{已知函数} \tag{㊱}$$

例如对接地的边界可设 $\phi = 0$;对"无穷远边界"上的电势也可取为零.

(2) 诺伊曼边界条件

$$\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{n}} = \text{已知函数} \tag{㊲}$$

例如在对称面上有$\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{n}} = 0$;在绝缘材料构成的边界上,由于无电流流入此边界,有 $\boldsymbol{j}_f \cdot \boldsymbol{n} = -\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{n}} = 0$,故仍有上述边界条件.

(3) 等值面边界条件

在电极面 Γ_0 上,由于电极面是导体,其上 ϕ 应为(待定)常数.此外,通过电极面向介质中发射稳恒电流 I_0,这是造成稳定电流的原因,在石油电法测井中就是这样.记 $\boldsymbol{n}$ 为在 Γ_0 上区域的单位外法线方向,由于向介质中发射的总电流为 I_0,有

$$-\int_{\Gamma_0} \boldsymbol{j}_f \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = I_0 \tag{38}$$

从而由 ㉙,有

$$\int_{\Gamma_0} \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{d}S = I_0 \tag{39}$$

这样,在电极面 Γ_0 上又一次得到如下的等值面边界条件或总流量边界条件

$$\phi \mid_{\Gamma_0} = \text{待定常数} \tag{40}$$

$$\int_{\Gamma_0} \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{d}S = I_0(\text{已知常数}) \tag{41}$$

而整个问题就化为求解相应的等值面边值问题或总流量边值问题.

三、静磁场

如前所述,稳定电流所形成的磁场称为静磁场.此时 ρ_f 及 $\boldsymbol{j}_f$ 均只为(x,y,z)的函数,而与 t 无关.麦克斯韦方程组以及电荷守恒方程具有形式 ㉑ ~ ㉕.

由稳定电流形成的电场已在前面处理.而相应的磁场同样可以单独处理,它们满足

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{B} = 0 \tag{42}$$

$$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}_f \tag{43}$$

及

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{j}_f = 0 \tag{44}$$

下面介绍处理静磁场的两种可能的方法.

首先讨论矢势法.由式 ⑫ 知,可引入矢势 $\boldsymbol{A}$ 使

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\, \boldsymbol{A} \tag{45}$$

且由于 $\boldsymbol{A}$ 可以相差一个任意函数 ψ 的梯度(即任一纵场),可以设 $\boldsymbol{A}$ 为横场,即满足

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{A} = 0 \tag{46}$$

上面引入的 $\boldsymbol{A}$ 称为静磁场的矢势(向量势).

将 $\boldsymbol{H}=\frac{1}{\mu}\boldsymbol{B}=\frac{1}{\mu}\text{rot}\,\boldsymbol{A}$ 代入式 ㊸,得

$$\text{rot}\left(\frac{1}{\mu}\text{rot}\,\boldsymbol{A}\right)=\boldsymbol{j}_f \tag{47}$$

这是矢势 $\boldsymbol{A}$ 应满足的方程. 利用向量分析公式,上式可写为

$$\text{grad}\left(\frac{1}{\mu}\right)\times\text{rot}\,\boldsymbol{A}+\frac{1}{\mu}\text{rot rot}\,\boldsymbol{A}=\boldsymbol{j}_f \tag{48}$$

再利用向量分析公式,并注意式 ㊻,上式可改写为

$$-\frac{1}{\mu}\Delta\boldsymbol{A}+\text{grad}\left(\frac{1}{\mu}\right)\times\text{rot}\,\boldsymbol{A}=\boldsymbol{j}_f \tag{49}$$

这就是矢势 $\boldsymbol{A}$ 满足的一个主部分离的二阶椭圆型方程组.

考察 μ 为常数的特殊情况(这是在应用中经常碰到的情形),此时有

$$-\Delta\boldsymbol{A}=\mu\boldsymbol{j}_f \tag{50}$$

即在矢势 $\boldsymbol{A}$ 取为横场时,它满足泊松方程. 利用体位势,这个方程的一个解可取为

$$\boldsymbol{A}(x,y,z)=\frac{\mu}{4\pi}\int_\Omega\frac{\boldsymbol{j}_f(P')\,\mathrm{d}V'}{r_{PP'}} \tag{51}$$

而且由式 ㊹ 不难证明,由上式给出的 $\boldsymbol{A}$ 的确满足横场条件 ㊻.

下面看一个磁场能量(不计电场)的表达式

$$U_{e,m}=\frac{1}{2}\int_\Omega\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}\,\mathrm{d}V \tag{52}$$

注意到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}&=\text{rot}\,\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{H}=\text{div}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{H})+\boldsymbol{A}\cdot\text{rot}\,\boldsymbol{H}=\\&\text{div}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{H})+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}_f\end{aligned}$$

而且 $\text{div}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{H})$ 在整个区域 Ω 上的积分在利用格林公式化为边界积分后应为零,故得

$$U_{e,m}=\frac{1}{2}\int_\Omega\boldsymbol{j}_f\cdot\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}V \tag{53}$$

这样,可见静电场 $\boldsymbol{E}$ 及静磁场 $\boldsymbol{B}$ 之间有许多相似的地方,见下面表格.

静电场	无旋场(纵场)
	有标势 ϕ,使 $\boldsymbol{E}=-\text{grad}\,\phi$ (ϕ 可相差一任意常数) ϕ 满足 $-\varepsilon\Delta\phi-\text{grad}\,\varepsilon\cdot\text{grad}\,\phi=\rho_f$ $-\Delta\phi=\frac{1}{\varepsilon}\rho_f$(或 ε 为常数)
	能量 $U=\frac{1}{2}\int_\Omega\rho_f\phi\,\mathrm{d}V$

<table>
<tr><td rowspan="3">静
磁
场</td><td>无源场(横场)</td></tr>
<tr><td>有矢势 $\boldsymbol{A}$,使 $\boldsymbol{B} = \text{rot}\,\boldsymbol{A}$
($\boldsymbol{A}$ 可相差一任意标量场的梯度)
$\boldsymbol{A}$(在 $\text{div}\,\boldsymbol{A} = 0$时) 满足
$-\frac{1}{\mu}\Delta\boldsymbol{A} + \text{grad}\left(\frac{1}{\mu}\right) \times \text{rot}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{j}_f$
$-\Delta\boldsymbol{A} = \mu\boldsymbol{j}_f$(若 μ 为常数)</td></tr>
<tr><td>能量 $U = \frac{1}{2}\int_{\Omega}\boldsymbol{j}_f \cdot \boldsymbol{A}\,\mathrm{d}V$</td></tr>
</table>

现在介绍静磁场的标势法.用矢势 $\boldsymbol{A}$ 来处理静磁场要出现三个函数 A_x, A_y 及 A_z,而且在 μ 不为常数时,方程组呈现复杂的面貌,不易于处理.现在说明,和一般情形下的电磁场不同,对静磁场还可以用标势来处理.

由式㊹,我们知道,存在向量 $\boldsymbol{F}$ 使

$$\boldsymbol{j}_f = \text{rot}\,\boldsymbol{F} \tag{54}$$

而且,总可以选取 $\boldsymbol{F}$ 使

$$\text{div}\,\boldsymbol{F} = 0 \tag{55}$$

将式㊴代入方程㊸,得

$$\text{rot}(\boldsymbol{H} - \boldsymbol{F}) = 0$$

必存在一个标量函数 ϕ 使

$$\boldsymbol{H} - \boldsymbol{F} = -\,\text{grad}\,\phi \tag{56}$$

我们称上式右端的 ϕ 为静磁场的标势(标量势).这样就是

$$\boldsymbol{B} = -\,\mu\,\text{grad}\,\phi + \mu\boldsymbol{F} \tag{57}$$

将其代入式㊷,得标势 ϕ 满足的方程

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial\phi}{\partial z}\right) = -\,\text{div}(\mu\boldsymbol{F}) \tag{58}$$

但 $\quad\text{div}(\mu\boldsymbol{F}) = \mu\,\text{div}\,\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}\cdot\text{grad}\,\mu = \boldsymbol{F}\cdot\text{grad}\,\mu$

这里我们利用了式㊵.将上式代入式㊸右端,得标势 ϕ 满足的非齐次拟调和方程

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial\phi}{\partial z}\right) = -\,\boldsymbol{F}\cdot\text{grad}\,\mu \tag{59}$$

特别在 μ 为常数的情形,上式变为调和方程

$$-\Delta\phi = 0 \tag{60}$$

下面讨论在介质交界面上的条件.因磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 的切向分量在介质的交界面上连续,由式㊻得

$$(-\operatorname{grad}\phi + \boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{m} = 0, \forall \text{ 切向量 } \boldsymbol{m} \tag{61}$$

注意到若 $\boldsymbol{B}$ 及其一阶偏导数在曲面 S 上有第一类间断，但 $\boldsymbol{B}$ 的法向分量在 S 上连续，那么可以证明，式 ㉔ 右端的 $\boldsymbol{F}$ 在介质的交界面上为连续的，从而式 ㉛ 给出

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{m}}[\phi] = 0, \forall \text{ 切向量 } \boldsymbol{m} \tag{62}$$

注意到 ϕ 的决定可以相差一个任意常数，由上式可得

$$[\phi] = 0, \text{ 即 } \phi_1 = \phi_2 \tag{63}$$

另外，磁感强度 $\boldsymbol{B}$ 的法向分量在介质交界面上连续，由式 ㉗ 得

$$[-\mu\operatorname{grad}\phi + \mu\boldsymbol{F}]\cdot\boldsymbol{n} = 0$$

注意到 $\boldsymbol{F}$ 的连续性，由上式得到

$$\left[\mu\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{n}}\right] = [\mu]\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n} \tag{64}$$

即

$$\mu_1\left(\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{n}}\right)_1 - \mu_2\left(\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{n}}\right)_2 = (\mu_1 - \mu_2)\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n} \tag{65}$$

因为 $\boldsymbol{F}$ 可由电流密度 $\boldsymbol{j}_f$ 确定，因而上式右端为已知函数. 于是，介质交界面上的条件为

$$\phi_1 = \phi_2 \tag{66}$$

$$\mu_1\left(\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{n}}\right)_1 - \mu_2\left(\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{n}}\right)_2 = (\mu_1 - \mu_2)\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n} \tag{67}$$

这个条件同样是易于用变分方法处理的.

下面讨论磁场能量的表达式. 由式 ㉖ 与 ㉗，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H} &= \mu(-\operatorname{grad}\phi + \boldsymbol{F})\cdot(-\operatorname{grad}\phi + \boldsymbol{F}) = \\ &\mu\,|\operatorname{grad}\phi|^2 - 2\mu\boldsymbol{F}\cdot\operatorname{grad}\phi + \mu\,|\boldsymbol{F}|^2\end{aligned} \tag{68}$$

但

$$\begin{aligned}\mu\boldsymbol{F}\cdot\operatorname{grad}\phi &= \operatorname{div}(\mu\phi\boldsymbol{F}) - \phi\operatorname{div}(\mu\boldsymbol{F}) = \\ &\operatorname{div}(\mu\phi\boldsymbol{F}) - \phi(\mu\operatorname{div}\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}\cdot\operatorname{grad}\mu) = \\ &\operatorname{div}(\mu\phi\boldsymbol{F}) - \phi\boldsymbol{F}\cdot\operatorname{grad}\mu\end{aligned} \tag{69}$$

在得到上式的过程中，我们利用了式 ㉕. 将式 ㊾ 代入式 ㊽，并在整个磁场 Ω 中积分，注意到散度项 $\operatorname{div}(\mu\phi\boldsymbol{F})$ 在 Ω 上的积分在利用格林公式化为边界积分后应为零，就得到

$$\begin{aligned}U_{e,m} &= \frac{1}{2}\int_\Omega \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}\,\mathrm{d}V = \\ &\frac{1}{2}\int_\Omega(\mu\,|\operatorname{grad}\phi|^2 + 2\phi\boldsymbol{F}\cdot\operatorname{grad}\mu + \mu\,|\boldsymbol{F}|^2)\,\mathrm{d}V\end{aligned} \tag{70}$$

因为 μ 及 $\boldsymbol{F}$ 为已知,上积分本质上为

$$U_{\mathrm{e,m}} = \frac{1}{2}\int_{\Omega}(\mu \mid \mathrm{grad}\ \phi \mid^2 + 2\phi\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{grad}\ \mu)\mathrm{d}V \qquad ⑦$$

这是相应于所考察的非齐次二阶椭圆型方程 ㊴ 的迪利克雷积分.

第五十四回 膜平衡 变分泊松伽辽金 广义解 三者之间是等价

我们先考虑一个物理模型——薄膜平衡问题：设有一个处于紧张状态的薄膜，其水平位置为 $O\text{-}xy$ 平面上的区域 Ω，在区域的边界 $\partial\Omega$ 上已知膜的垂直位移为 $\varphi(x,y)$. 以 $u(x,y)$ 表示膜上坐标为 (x,y) 的点在膜平衡时的位移. 若膜的内部还受到垂直于水平位置的密度为 $f(x,y)$ 的外力的作用，讨论膜处于平衡状态时的形状.

根据力学中的最小势能原理：受外力作用的弹性体，在满足已知边界位移约束的一切可能位移中，以达到平衡状态的位移使物体的总势能为最小.

按照弹性力学理论

$$\text{总势能} = \text{应变能} - \text{外力作功}$$

而应变能就是把膜从水平位置转移到平衡位置，为了抵抗张力所做的功. 设膜的形状为 $u = v(x,y)$，则当 $|v_x|, |v_y| << 1$ 时，略去高阶小量，膜的应变能近似为

$$T\Delta S = T\iint_{\Omega}(\sqrt{1 + v_x^2 + v_y^2} - 1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \approx \frac{T}{2}\iint_{\Omega}(v_x^2 + v_y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 T 为张力的大小，ΔS 为膜由于变形所产生的面积的增量. 而外力所做的功为

$$\iint_{\Omega} fv\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

故总势能近似地可表示为

$$J[v] = \frac{T}{2}\iint_{\Omega}(v_x^2 + v_y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{\Omega} fv\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad ①$$

这是关于二元函数 $v(x,y)$ 的一个泛函，其中一切可能位移 $v(x,y)$ 的容许函数集为

$$K = \{v(x,y) \mid J[v] < +\infty, \text{且 } v \mid \partial\Omega = \varphi(x,y)\} \qquad ②$$

于是，膜平衡问题归结为求泛函 ① 在条件 $v(x,y) \in K$ 下的极小值问题. 即求变分问题

$$J[u] = \min_{v \in K} J[v] \qquad ③$$

的解 $u(x,y)$.

膜平衡问题除了归结为求解上述变分问题，还可以表述为求解泊松方程的迪利克雷问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f(\Omega) & ④ \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi & ⑤ \end{cases}$$

或变分的伽辽金形式

$$\iint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Omega} fv\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \forall U \in H'_0(\Omega) \quad ⑥$$

可以证明,在一定的条件下以上三者之间是互相等价的.这就是下面要论述的迪利克雷原理.

在证明迪利克雷原理之前,我们先建立下述变分法的基本引理.

引理 设 $f(x,y) \in C(\overline{\Omega})$,且满足关系式

$$\iint_{\Omega} fv\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0, \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad ⑦$$

则在 Ω 上 $f(x,y) \equiv 0$.

证明 用反证法.假若在某点 $(\xi,\eta) \in \Omega$ 处 $f(\xi,\eta) \neq 0$,不妨设 $f(\xi,\eta) > 0$.由 f 的连续性知,在点 (ξ,η) 的 d 邻域 $D \subset \Omega$ 中仍有 $f > 0$.设

$$D = \{(x,y) \mid (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 < d^2\}$$

取

$$v(x,y) = \begin{cases} (d^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2)^2, (x,y) \in D \\ 0, (x,y) \in \Omega - D \end{cases}$$

则 $v(x,y) \in H_0^1(\Omega)$,但是有

$$\iint_{\Omega} fv\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Omega} fv\mathrm{d}x\mathrm{d}y > 0$$

此与引理的假设条件 ⑦ 矛盾,故在 Ω 上应有 $f(x,y) \equiv 0$.

现在我们仍以薄膜平衡问题为例,证明在一定的条件下变分问题与相应微分方程定解问题之间的等价性关系,建立下述变分原理.

定理(迪利克雷原理) 当 $u(x,y) \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ 时,泊松方程的迪利克雷问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f(\Omega) & ⑧ \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi & ⑨ \end{cases}$$

与变分问题

$$J[u] = \min_{v \in M} J[v] \quad ⑩$$

其中

$$J[v] = \frac{1}{2}\iint_{\Omega} |\nabla v|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{\Omega} fv\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad ⑪_1$$

$$M = \{v(x,y) \mid v \in H^1(\Omega), v|_{\partial\Omega} = \varphi\} \quad ⑫$$

以及变分形式

$$\iint_{\Omega}(\nabla u \cdot \nabla v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Omega} fv\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \forall v \in H_0^1(\Omega) \qquad ⑬_1$$

三者是互相等价的.

证明 先证定解问题 ⑧,⑨ 与变分形式 $⑬_1$ 等价.

设 $u(x,y) \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ 是定解问题 ⑧,⑨ 的解.则有

$$-\iint_{\Omega}(\Delta u + f)v\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0, \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

利用格林公式化简,即有

$$\iint_{\Omega}(\nabla u \cdot \nabla v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Omega} fv\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

反之,由引理即得 $-\Delta u = f$.故定解问题 ⑧,⑨ 与 $⑬_1$ 等价.

下面再证变分问题 ⑩ ~ ⑫ 与 $⑬_1$ 等价.为书写简单起见,引进记号

$$D(u,v) = \iint_{\Omega}\nabla u \cdot \nabla v\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad ⑭$$

$$(u,v) = \iint_{\Omega} uv\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad ⑮$$

则泛函 ⑪ 可写成

$$J[v] = \frac{1}{2}D(v,v) - (f,v) \qquad ⑪_2$$

变分形式 $⑬_1$ 为

$$D(u,v) = (f,v), \forall v \in H_0^1(\Omega) \qquad ⑬_2$$

设 $u \in M$,且满足

$$J[u] = \min_{w \in M} J[w]$$

则对于任意的实数 α 和 $v \in H_0^1(\Omega)$,有 $u + \alpha v \in M$,且

$$j(\alpha) = J[u + \alpha v] = \frac{1}{2}D(u + \alpha v, u + \alpha v) - (f, u + \alpha v) =$$

$$J[u] + \frac{\alpha^2}{2}D(v,v) + \alpha D(u,v) - \alpha(f,v)$$

由于 $j(0) = \min_{\alpha \in \mathbb{R}} j(\alpha)$,根据函数极值的必要条件应有 $j'(0) = 0$.即得

$$D(u,v) - (f,v) = 0, \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

反之,若函数 $u \in M$ 是变分形式 ⑬ 的解,则

$$J[u \pm v] - J[u] = \frac{1}{2}D(v,v), \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

由于 $D(v,v)$ 是非负的,即对一切 $v \in H_0^1(\Omega)$ 有 $D(v,v) \geqslant 0$.即得

$$J[u] = \min_{w \in M} J[w]$$

综上所述,迪利克雷原理得证.

需要强调指出的是：在定解问题 ⑧，⑨ 中要求其解 $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$，而在变分问题 ⑪ ~ ⑫ 或变分形式 $⑬_1$ 中的解 u 只须要具有一阶广义微商，即 $u \in H^1(\Omega)$ 且 $u|_{\partial\Omega} = \varphi$. 因此，若仅有 $u \in M$，而 $u \notin C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$，则此时的 u 就不能是定解问题 ⑧，⑨(在古典意义下) 的解. 我们把它称为是定解问题 ⑧，⑨ 的广义解.

又若我们把给定的函数 $\varphi(x,y)$ 提升(延拓) 为 $\phi(x,y)$，使 $\phi \in H^1(\Omega)$ 且 $\phi|_{\partial\Omega} = \varphi$，这时变分问题 ⑪ ~ ⑫ 或 $⑬_1$ 的解 u 应有 $u - \phi \in H_0^1(\Omega)$.

定义　若 $u \in H^1(\Omega)$，$u - \phi \in H_0^1(\Omega)$，且使得

$$J[u] = \min_{w-\phi \in H_0^1(\Omega)} J[w]$$

或

$$D(u,v) = (f,v),\ \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

则我们把 $u(x,y)$ 分别称为泊松方程迪利克雷问题 ⑧，⑨ 的黎兹形式的广义解，或伽辽金形式的广义解.

变分问题 ⑪ ~ ⑫ 在力学上相应于最小势能原理；而变分形式 $⑬_1$ 在力学上相应于虚功原理，这里 v 是虚位移，式 $⑬_1$ 的左端项表示虚内功，右端项表示虚外功. 变分问题 ⑪ ~ ⑫ 与 $⑬_1$ 等价，即反映了最小势能原理与虚功原理的等价性.

第五十一回　拟线性　弹塑渗流与电磁　现代化　山路引理冀斯尔[①]

20世纪70年代，对于一般的拟线性椭圆型方程的迪利克雷问题，利用 $C^{2,\alpha}$ 中的先验估计和 Leray-Schauder 不动点定理，在系数和边界满足适当的条件下，得到了存在至少一个解的结果.

但是，直到1973年之前，还不知道下面这样一个半线性椭圆型方程的齐次迪利克雷问题有没有非平凡解，即

$$-\Delta u = f(u),x \in \Omega \subset \mathbf{R}^n$$
$$u = 0,x \in \partial\Omega$$

其中 $f(0)=0$，显然 0 是上述半线性方程的一个解，称为平凡解. 1973 年 Ambrosetti 和 Rabinowitz 提出了一个翻山引理(山路引理)，证明了半线性椭圆方程齐次迪利克雷问题的非平凡解的存在性，以及当 $f(u)$ 是奇函数时，同一问题的无穷多个解的存在性. 这就引起了很多人的注意，并在这方面做了大量工作.

但是，对于物理以及实际中出现的大量的拟线性椭圆型方程齐次迪利克雷问题的多重解的存在性一直未见讨论. 如弹塑性理论中出现的拟线性方程

$$-\operatorname{div}(f(|Du|^2)Du) = g(x,u),x \in \Omega \subset \mathbf{R}^n,n = 2,3$$

渗流与电磁理论中出现的方程

$$-D_i(\sigma(|Du|)a_{ij}(x)D_ju) = g(x,u)$$

其中 $D_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}, u = u(x) = u(x_1,\cdots,x_n)$，有

$$|Du|^2 = a_{ij}(x)D_iuD_ju$$
$$\lambda|\xi|^2 \leqslant a_{ij}\xi_i\xi_j \leqslant \Lambda|\xi|^2,\lambda > 0$$

$\sigma(t)$ 是 t 的连续函数，$0 < a_0 \leqslant \sigma(t) \leqslant a$.

还有主部是 p 阶拉普拉斯算子的非线性方程

$$-D_i(|Du|^{p-2}D_iu) = g(x,u),x \in \Omega$$

以及 p 阶(广义)平均曲率算子

$$-D_i((1+|Du|^2)^{\frac{p}{2}-1}D_iu) = g(x,u),x \in \Omega$$

前面介绍的变分学的直接方法又称为变分学中的经典(古典)方法，而利用山路引理及一系列极小极大定理和无穷维流形上 Morse 理论等等，都属于变

[①] 本回引自沈尧天，严树森著. 拟线性椭圆型方程的变分方法[M]. 广州：华南理工大学出版社，1995.

分学中的现代方法.

一、Ekeland 变分原理和山路引理

设 E 是一个 Banach 空间,若泛函 $I(u)$ 满足:当 $u_n \to u$ 时即可推出

$$I(u) \leqslant \liminf_{n\to\infty} I(u_n)$$

则称 $I(u)$ 是下半连续的.

当函数集合既没有紧性,泛函本身也没有凸性,即不满足

$$I(\lambda v + (1-\lambda)u) \leqslant \lambda I(v) + (1-\lambda)I(u)$$

则一般不能使 I 达到极小值点,但有下述近似极小值点,即 Ekeland 变分原理.

定理 1 设 M 是完备度量空间,距离为 d,$I(u): M \to \mathbf{R}^1$,$I(u) \neq +\infty$,I 是下有界的下半连续泛函,则对于任给 $\varepsilon > 0$ 和 $u_0 \in M$,必存在 $v \in M$,使

$$I(w) - I(v) + \varepsilon d(w,v) \geqslant 0, \forall w \in M \quad ①$$

$$I(v) \leqslant I(u_0) - \varepsilon d(u_0, v) \quad ②$$

证明 现逐个定义 v_n,$n = 1,2,3,\cdots$,如下.

$v_0 = u_0$,若 v_n 已知,可这样定义 v_{n+1}:如果

(i) 对任意 $w \in M \setminus v_n$ 有

$$I(w) - I(v_n) + \varepsilon d(v_n, w) > 0$$

就取 $v_{n+1} = v_n$,否则就有

(ii) 存在 $w \in M \setminus v_m$,使

$$I(w) \leqslant I(v_n) - \varepsilon d(v_n, w)$$

令 $$T_n = \{w \mid w \in M, I(w) \leqslant I(v_n) - \varepsilon d(v_n, w)\}$$

取 $v_{n+1} \in T_n$ 使

$$I(v_{n+1}) - \inf_{v\in T_n} I(v) \leqslant \frac{1}{2}\left(I(v_n) - \inf_{v\in T_n} I(v)\right) \quad ③$$

下面证 $\{v_n\}$ 是一个柯西序列.

如果情况(i)一直发生,则 $v_0 = v_1 = \cdots = v_n = \cdots$. 所以,不妨设(i)不发生,使有

$$I(v_{n+1}) \leqslant I(v_n) - \varepsilon d(v_n, v_{n+1})$$

从而有

$$I(v_m) \leqslant I(v_n) - \varepsilon d(v_m, v_n), \forall n, m, n < m \quad ④$$

又因 $I(v_{n+1}) \leqslant I(v_n)$ 以及 $I(v_n) \geqslant \inf_{v\in M} I(v)$,所以 v_n 是柯西序列. 设 $v_n \to v$,在 M 中,由 I 的下半连续性得

$$I(v) \leqslant \liminf_{m\to\infty} I(v_m)$$

在式 ④ 中取 $n = 0$,令 $m \to \infty$,即得

$$I(v) \leqslant I(v_0) - \varepsilon d(v_0, v) = I(u_0) - \varepsilon d(u_0, v)$$

最后证式 ①,用反证法.

若式 ① 不成立,则 $\exists w \neq v$ 使

$$I(w) \leqslant I(v) - \varepsilon d(w, v)$$

在式 ④ 中令 $m \to \infty$,则有

$$I(v) \leqslant I(v_n) - \varepsilon d(v, v_n)$$

从而

$$I(w) \leqslant I(v_n) - \varepsilon d(w, v) - \varepsilon d(v_n, v) \leqslant$$
$$I(v_n) - \varepsilon d(w, v_n) < I(v_n) \quad ⑤$$

即 $w \in \bigcap_{n=1}^{\infty} T_n$,但由式 ③ 知

$$2I(v_{n+1}) - I(v_n) \leqslant \inf_{v \in T_n} I(v) \leqslant I(w)$$

令 $n \to \infty$,即得

$$I(v) \leqslant I(w)$$

与式 ⑤ 矛盾. 证毕.

定义 1 设 E 是 Banach 空间,$I(u) \in C^1(E, R)$,称 I 满足 Palais Smale 条件(简称(PS) 条件) 是指:$\forall \{u_m\} \subset E$,使 $I(u_m)$ 有界,$I'(u_m) \to \theta$,则$\{u_m\}$ 必有收敛子列.

注 定义中 E 可以换为 Finsler 流形. 而这定义是把泛函 $I(u)$ 与空间 E 和 "紧性" 条件结合起来考虑的. 这在变分学的现代理论中是经常要遇到的,也是利用山路引理、极小极大定理、Morse 理论所需克服的主要困难.

定义 2 称 $I(u)$ 满足$(\mathrm{PS})_C$. 条件是指:若 $u_m \in E$,且

$$I(u_m) \to c, I'(u_m) \to \theta$$

则 u_m 必有收敛子列.

定理 2 设 E 是 Banach 空间,$I \in C^1(E, R)$,I 有下界且满足(PS) 条件,则每一个极小化序列必有一收敛的子列.

证明 设 u_m 是极小化序列,则

$$I(u_m) \leqslant \inf I(u) + \frac{1}{m^2}$$

利用定理 1 知存在 $v_m \in E$,使

$$I(w) - I(v_m) + \frac{1}{m} \| w - v_m \|_E \geqslant 0, \forall w \in E$$

$$I(v_m) \leqslant I(u_m) - \frac{1}{m} \| u_m - v_m \|_E$$

于是 $$\| I'(v_m) \| \leqslant \frac{1}{m}, I(v_m) \leqslant \inf I(u) + \frac{1}{m^2}$$

和 $$\| u_m - v_m \|_K \leqslant \frac{1}{m}$$

利用(PS)条件，v_m 有收敛子列，仍记为 v_m，故 u_m 也同样收敛.

下面先介绍山路引理的一个变形，它在讨论临界指数情况的泛函的临界点是很有用的.

定理 3 若 E 是 Baanch 空间，$I \in C^1(E,R)$ 存在一个 θ 的开邻域 U 和某点 $u_0 \notin \overline{U}$ 使

$$I(0), I(u_0) < c_0 \leqslant I(u), \forall u \in \partial U$$

设 $\mathscr{A}$ 表示所有连续 0 和 u_0 的连续道路 A 的全体，即

$$c = \inf_{A \in \mathscr{A}, u \in A} \max I(u)$$

则存在 $u_m \in E$，使 $I(u_m) \to c$，$I'(u_m) \to \theta$.

定理 4 若 I 满足定理 3 条件，且 $I(u)$ 满足(PS)条件，则存在 $u \in E$ 使

$$I(u) = c, I'(u) = 0 \qquad ⑥$$

注 满足式⑥的 c 称为泛函 I 的临界值，相应的 u 称为临界点. 而定理 4 就是标准的山路引理. 定理 4 可由定理 3 直接推出.

下面是定理 3 的证明的框架，这个优美的证明是由 Aubin 和 Ekeland[1] 发现的.

设

$$\mathscr{A} = \{ p \in C([0,1],E) \mid p(0) = 0, p(1) = u_0 \}$$

用 sup 范数作为度量，考虑 $f: M \to R$

$$f(p) = \max_{t \in [0,1]} I(p(t))$$

$$c = \inf_{p \in \mathscr{A}} f(p)$$

由定理 1 知存在 $p_\varepsilon \in \mathscr{A}$ 使

$$f(p_\varepsilon) \leqslant c + \varepsilon \qquad ⑦$$

$$f(p) - f(p_\varepsilon) + \varepsilon d(p, p_\varepsilon) \geqslant 0, \forall p \in \mathscr{A} \qquad ⑧$$

换句话讲，p_ε 是一条联结 0 到 u_0 的几乎最佳路径. 由式⑦和式⑧知：存在 $t_\varepsilon \in [0,1]$ 使

$$c \leqslant f(p_\varepsilon(t_\varepsilon)) = \max_{t \in [0,1]} I(p_\varepsilon(t)) \leqslant c + \varepsilon$$

和 $$\| I'(p_\varepsilon(t_\varepsilon)) \| < \varepsilon$$

取 $\varepsilon_m = \frac{1}{m}$，$u_m = p_{\varepsilon_m}(t_m)$，即得定理 3.

下面介绍一个更广泛的山路引理，而定理 3 是它的特殊情况.

设 $I(u)$ 是 Banach 空间 E 中的实泛函，K 是紧度量空间，K^* 是非空闭子集，$K^* \neq K$. 设

$$\mathscr{A} = \{ p \in C(K,E), p = p^* \text{ 在 } K^* \}$$

其中 p^* 是 K 上连续映射.定义

$$c = \inf_{p\in\mathscr{A}}\max_{\xi\in K} I(p(\xi))$$

因而

$$\max_{\xi\in K^*} I(p^*(\xi)) \leqslant c$$

定理 5 设对每一 $p\in\mathscr{A}$, $\max\limits_{\xi\in K} I(p(\xi))$ 是在 $K\setminus K^*$ 中某点达到(这条件等价于对每一 $p\in\mathscr{A}$,存在某点 $\xi\in K\setminus K^*$ 使 $I(p(\xi))\geqslant c$),则存在 $u_m\in E$ 使

$$I(u_m)\to c,\ \| I'(u_m)\| \to 0$$

若 I 满足$(\mathrm{PS})_c$ 条件,则 c 是临界值,而且 p_m 是 $\mathscr{A}$ 中任意序列使

$$\max_{\xi\in K} I(p_m(\xi))\to c$$

则存在 K 中序列 ξ_m 使

$$I(p_m(\xi_m))\to c, \text{且}\ \| I'(p_m(\xi_m))\| \to 0$$

注 若 $K=[0,1]$, $K^*=\{0,1\}$, $p^*(t)=tu_0$,则定理 5 就变成定理 3.

为了证明定理 5,需要一个引理.

引理 设 M 是度量空间. $f:M\to E^*$ 为连续映射, E^* 表示 Banach空间 E 的对偶空间,则对任 $\varepsilon>0$,存在局部 Lipschitz 映射 $v:M\to E$,使对所有 $\xi\in M$ 有

$$\| v(\xi)\|_E < 1$$

$$\langle f(\xi), v(\xi)\rangle \geqslant \| f(\xi)\|_{E^*} - \varepsilon$$

注 这样的 v,通常称为伪梯度向量场,可以利用单位分解的思想证明.

定理 5 的证明如下.

对 $\xi\in K$,置

$$d(\xi)=\min\{\mathrm{dist}(\xi,K^*),1\}$$

对任 $\varepsilon>0$ 和 $p\in\mathscr{A}$,考虑

$$G(p,\xi)=I(p(\xi))+\varepsilon d(\xi)$$

令

$$I_\varepsilon(p)=\max_{\xi\in K} G(p(\xi),\xi) \tag{⑨}$$

$$c_\varepsilon = \inf_{p\in\mathscr{A}} I_\varepsilon(p)$$

显然, $c\leqslant c_\varepsilon\leqslant c+\varepsilon$.

把装备着通常度量的 $\mathscr{A}$ 看做 M,可看出 $I_\varepsilon(p)$ 在 M 上是连续的,利用定理 1 知 $\exists\, p\in\mathscr{A}$,使

$$I_\varepsilon(q)-I_\varepsilon(p)+\varepsilon d(p,q)\geqslant 0, \forall\, q\in\mathscr{A} \tag{⑩}$$

$$c\leqslant c_\varepsilon\leqslant I_\varepsilon(p)\leqslant c_\varepsilon+\varepsilon\leqslant c+2\varepsilon$$

由式 ⑨ 知

$$\max_{\xi \in k^*} I(p(\xi)) < I_\varepsilon(p) \qquad ⑪$$

置
$$B_\varepsilon(p) = \{\xi \in K \mid G(p(\xi),\xi) = I_\varepsilon(p)\}$$
将证明存在 $\xi_0 \in B_\varepsilon(p)$ 使
$$\| I'(p(\xi_0)) \| \leqslant 2\varepsilon \qquad ⑫$$
则取 $\varepsilon = \dfrac{1}{m}$，$u_m = p(\xi_0)$，就可得出本定理的第一部分结论.

令 $M = K$，$f = I'(p(\xi))$，利用引理知存在连续映射 $v: K \to E$，使对所有 $\xi \in K$，有
$$\| v(\xi) \| \leqslant 1$$
$$\langle I'(p(\xi)), v(\xi) \rangle \geqslant \| I'(p(\xi)) \| - \varepsilon \qquad ⑬$$

利用式 ⑪，$B_\varepsilon(p) \subset K \setminus K^*$，于是存在一个连续非负函数 $\alpha(\xi) \leqslant 1$，在 K 上，而 $\alpha(\xi)$ 在 $B_\varepsilon(p)$ 上等于1，在 K^* 中为0. 在式 ⑨ 中取 p 的充分小变分(差)为
$$q_h(\xi) = p(\xi) - hw(\xi)$$
其中 h 充分小，$w(\xi) = \alpha(\xi)v(\xi)$，则对固定的 ε，当 $h \to 0$ 时，显然
$$I_\varepsilon(q_h) = \max_{\xi \in \mathscr{A}} G(q_h(\xi), \xi)$$
在某点 $\xi_h \in K$ 可达，对于适当序列 $h_m \to 0$，$\xi_{h_m} \to \xi_0 \in B_\varepsilon(p)$，在式 ⑩ 中取 $q = q_h$ 且利用式 ⑬ 即得
$$I(p(\xi_h) - hw(\xi_h)) + \varepsilon d(\xi_h) - I_\varepsilon(p) + \varepsilon h \geqslant 0 \qquad ⑭$$

另一方面，容易验证当 $h \to 0$ 时有
$$I(p(\xi_h) - hw(\xi_h)) = I(p(\xi_h)) - \langle I'(p\xi_h), hw(\xi_h) \rangle + o(h) \qquad ⑮$$
把式 ⑭ 和式 ⑮ 结合起来，得
$$-h\langle I'(p(\xi_h)), w(\xi_h) \rangle + \varepsilon h + o(h) \geqslant 0$$

注意到 $I(p(\xi_h)) + \varepsilon d(\xi_h) \leqslant I_\varepsilon(p)$，因此
$$\langle I'(p(\xi_h)), w(\xi_h) \rangle \leqslant \varepsilon + o(1)$$
令 $h \to 0$，得出
$$\langle I'(p(\xi_0), v(\xi_0)) \rangle \leqslant \varepsilon \qquad ⑯$$
由上式和式 ⑬ 即得本定理的第一部分.

下面证明定理 5 的第二部分.

由定理 1 知存在序列 $q_n \in \mathscr{A}$ 使
$$I_{\varepsilon_n^2}(q) - I_{\varepsilon_n^2}(q_n) + \varepsilon_n d(q, q_n) \geqslant 0, \forall q \in \mathscr{A}$$
$$I_{\varepsilon_n^2}(q_n) \leqslant I_{\varepsilon_n^2}(p_n) - \varepsilon_n d(p_n, q_n)$$
其中 ε_n 是一列正数，$\varepsilon_n \to 0$，使
$$I(p_n(\varepsilon)) \leqslant c + \varepsilon_n^2$$

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2} = 0$$

由此得出 $d(p_m, q_n) \leqslant 2\varepsilon_m$，于是存在 $\xi_n \in K$，使

$$I(q_n(\xi_n)) = c + o(\varepsilon_n^2)$$
$$\| I'(q_n(\xi_n)) \| \leqslant 2\varepsilon_n$$

由$(PS)_c$ 条件，若 $q_n(\xi_n)$ 的一个子列收敛于临界点，则相应 $p_n(\xi_n)$ 的一个子列也收敛于同一极限．经过一个标准的论证，显示出

$$I(p_n(\xi_n)) \to c$$
$$\| I'(p_n(\xi_n)) \| \to 0$$

证毕．

注 定理 5 是山路引理的推广，是由 Brezis 和 Nirenberg[2] 中提出的．

下面是关于偶泛函的临界点定理．

定理 7 设 E 是无穷维 Banach 空间，$I \in C^1(E, R^1)$，I 是偶泛函，$I(0) = 0$，且满足(PS) 条件．设 $E = V \oplus X$，其中 V 是有限维子空间，I 还满足：

(i) 存在常数 $\rho, \alpha > 0$，使 $I|_{\partial B_\rho(0) \cap X} \geqslant \alpha$．

(ii) 对所有有限维子空间 $\widetilde{E}$，存在 $R = R(\widetilde{E})$，使 $I(u) \leqslant 0$，当 $u \in \widetilde{E} \setminus B_R(0)$ 时．则 I 具有无界的临界值序列．

略证 先定义集合簇 Γ_j，而 I 在这些集合上面的极小即为泛函 I 的临界值．设 V 是E 中以$\{e_1, \cdots, e_l\}$ 为基的 l 维空间；设 $e_{m+1} \notin \mathrm{span}\{e_1, \cdots, e_m\} \equiv E_m$，当 $m \geqslant l$ 时；设 $R_m = R(E_m)$，$D_m = B_{R_m} \cap E_m$．定义 $G_m = \{h \in C(D_m, E) \mid h$ 是偶的，在 $\partial B_{R_m} \cap E_m$ 上，$h = id\}$，此时 $G_m \neq \varnothing$，且 $id \in G_m$．现设

$$\Gamma_j = \{h(\overline{D_m \setminus Y}) - \mid m \geqslant j, h \in G_m, Y \in E, \gamma(Y) \leqslant m - j\}$$

其中 γ 表示集合 Y 的亏格(genus)．

定义

$$c_j = \inf_{B \in \Gamma_j} \max_{u \in B} I(u)$$

则 $c_j \leqslant c_{j+1}$，且当 $j > l$ 时有 $c_j \geqslant \alpha$．

如果 $j > l$，而 $c_j = \cdots = c_{j+q-1} \equiv c$，则

$$\gamma(K_c) \geqslant q, K_c = \{u \in E \mid I(u) = c, I'(u) = 0\}$$

因而 K_c 中有 q 个不同的临界点．

最后可证明当 $j \to \infty$ 时，$c_j \to \infty$．

注 定理3和定理7都属于极小极大原理，而定理7是极小极大原理和拓扑不变量亏格的结合．

二、二阶拟线性椭圆型方程迪利克雷问题的多重解 $n > p$

这里将讨论一般拟线性椭圆型 Euler 方程的齐次迪利克雷问题

$$-D_i(F_{r_i}(x,u,Du))+F_u(x,u,Du)=0,x\in\Omega \quad ⑰$$

$$u=0,x\in\partial\Omega \quad ⑱$$

的非平凡解和无穷多个解的存在性. Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中有界区域,

$$F_{r_i}=\frac{\partial F(x,u,r)}{\partial r_i},F_u=\frac{\partial F(x,u,r)}{\partial u}$$

$$D_i=\frac{\partial}{\partial x_i},x=(x_1,\cdots,x_n),r=(r_1,\cdots,r_n)$$

证明多重解的存在性,是利用山路引理讨论与问题 ⑰,⑱ 相应的泛函

$$I(u)=\int_\Omega F(x,u,Du)\mathrm{d}x \quad ⑲$$

的多重临界点的存在性.

设 $F(x,u,r)$ 满足下列条件:

(1) $F(x,u,r)$ 关于 x 可测,关于 u,r 一阶连续可微.

(2) F_r 和 F_u 满足下述结构(增长)条件,即

$$|F_r(x,u,r)|\leqslant C|r|^{p-1}+C|u|^{q/p'}+\varphi_1(x)$$

$$|F_u(x,u,r)|\leqslant C|r|^{p/q'}+C|u|^{q-1}+\varphi_2(x)$$

其中,$q<\frac{np}{n-p},n>p,q'=\frac{q}{q-1},p>1,\varphi_1\in L^{p'}(\Omega),\varphi_2\in L^{q'}(\Omega)$.

(3) 椭圆型条件:如果 $r\neq r'$ 则

$$(F_{r_i}(x,u,r)-F_{r_i}(x,u,r'))(r_i-r'_i)>0 \quad ⑳$$

$$\lambda|r|^p-a_1|r|^{p_1}-a_2\leqslant F_{r_i}(x,u,r)r_i \quad ㉑$$

其中,$1\leqslant p_1<p,\lambda>0,a_i\geqslant 0,i=1,2$.

(4) 存在 $\theta>0$,使

$$F(x,u,r)-\theta(F_{r_i}(x,u,r)r_i+F_u(x,u,r)u)\geqslant$$

$$\alpha|r|^p-a_1|r|^{p_2}-\beta|u|^p-\varphi_3(x)$$

其中,$1\leqslant p_2<p,\alpha>0,a_1\geqslant 0,0<\beta<\alpha A_p^{-1},\varphi_3\in L^1,A_p$ 是

$$\int_\Omega|u|^p\mathrm{d}x\leqslant A_p\int_\Omega|Du|^p\mathrm{d}x,\forall u\in E \quad ㉒$$

中最佳常数,$E=W_0^{1,p}(\Omega)$.

(5) $F(x,u,r)\geqslant C_1|r|^p-C_2|u|^p-C_3|u|^q$.

其中,$C_1>0,C_3>0$;若 $C_2>0$,则 $C_2<C_1A_p^{-1}$.

(6) $F(x,u,r)\leqslant C'_1|r|^p+C'_2|r|^{p_2}+C'_3|u|^p-C'_4|u|^{q_1}$

其中,$C'_1,C'_4>0,C'_2,C'_3\geqslant 0,1\leqslant p_2<p,q\geqslant q_1>p$.

$$\frac{\partial^2\mathscr{U}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathscr{U}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mathscr{U}}{\partial z^2}=0$$

分析篇

第九章

第五十二回　联系密　迪氏问题重表示
内在美　格林公式新形式

调和函数理论中最重要的问题是求给定边值的调和函数，即迪利克雷问题．确切地说就是在一个区域 D 的边界 ∂D 上给定连续实函数 $f(\xi)$，寻求 D 内的调和函数 $u(z)$，它以 $f(\xi)$ 为边值，根据极值原理，如果 $u(z)$ 存在，它一定是唯一的．

如果一个区域内迪利克雷问题是可解的，则该区域称为迪利克雷区域．

如果区域 D 的每个边界点是 D 的外部一线段的端点，则 D 是迪利克雷区域，特别地，若 D 的边界 ∂D 是由有限多条约当曲线所组成，则 D 是迪利克雷区域．

与迪利克雷问题密切相关的是格林函数的概念．

设 D 是一个区域，$a \in D$，称函数 $g(z,a)$ 是关于奇点 a 的格林函数，如果它具有性质：

(1) $g(z,a)$ 在 D 内除 a 点外是调和的；

(2) 若 $a \neq \infty$，$g(z,a) = -\log|z-a| + G(z)$，$G(z)$ 在 a 点邻域内调和；

若 $a = \infty$，$g(z,\infty) = \log|z| + G(z)$，$G(z)$ 在 ∞ 的邻域

内是调和的；

(3) 对于 ∂D 上的任意一点 ξ，$\lim\limits_{z\to\xi} g(z,a)=0$.

则下面的定理给出了迪利克雷问题的表达式.

定理 设 D 是一个由有穷多条分段光滑约当曲线所围成的区域，$g(z,z_0)$ 是 D 内关于 z_0 的格林函数，那么，对于 ∂D 上任意给定的连续实函数 $f(\xi)$，迪利克雷问题的解可表示为

$$u(z)=-\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} f(\xi)\frac{\partial g(\xi,z)}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}\xi$$

其中 $\partial g(\xi,z)/\partial \boldsymbol{n}$ 是 $g(\xi,z)$ 作为变量 ξ 的函数在 ∂D 上的外法向导数.

设 G 表示 z 平面上一有界开域，其边界为闭围道 Γ，并令 $\overline{G}=G+r$，设 $P=P(x,y)$，$Q=Q(x,y)$ 在 $\overline{G}$ 中连续且具有连续一阶偏导数，通常所述的格林公式为

$$\int_{\Gamma}(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y)=\iint_{\overline{G}}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

这里 Γ 的正方向为逆时针，线积分沿 Γ 的正方向进行，用∇ 表示拉普拉斯算子 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$，则格林公式的新形式为：

设在有界闭域 $\overline{G}$ 中，$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$ 均为连续函数且具有一阶与二阶连续偏导数，则

$$\iint_{\overline{G}}(u\nabla v-v\nabla u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\Gamma}\left(u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}-v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}s$$

这里 $\mathrm{d}s$ 表示闭围道 Γ 的弧微分，$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}$ 表示沿 Γ 的外法线求导数，线积分沿 $\mathrm{d}s$ 取正值方向进行.

利用格林公式可证明调和函数 u_1,u_2,u（v 为 u 的共轭函数）的下列性质：

(1) $D(u)=\int_C u\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s=\int_C u\mathrm{d}v$；

(2) $\int_C \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s=\int_C \mathrm{d}v=0$；

(3) 若在 C 上，$u_1=u_2$，则在 G 内，$u_1=u_2$；

(4) 若在 C 上，$\frac{\partial u_1}{\partial \boldsymbol{n}}=\frac{\partial u_2}{\partial \boldsymbol{n}}$，则在 G 内，$u_1-u_2=$ 常数.

其中 $\boldsymbol{n}$ 为外法线方向.

第五十三回　新测度　边值函数所确定
形象化　圆心所张欧氏角

我们已经知道利用泊松积分可以解决圆盘上调和函数的迪利克雷边值问题.

迪利克雷边值问题是否有解,不在于区域边值函数 $f(\xi)$ 的选择,而在于区域本身的构造,这是迪利克雷边值问题研究的一个实质内涵.

给出一个定理:设 G 为一个区域,对任意给定 ∂G 上的连续函数总有相应的迪利克雷边值问题的调和解.

为此可给出一个定义:若在 G 上迪利克雷边值问题总有解,则称 G 为迪利克雷区域,显然单连通区域一定是迪利克雷区域.

实质性地解决迪利克雷边值问题的思想值得一提,从正面构造调和函数来认清什么区域是迪利克雷区域似乎是相当困难,事实上,O. 佩龙解决这个问题的方法是保留了调和函数一些重要性质,例如最大值定理,但条件较弱的一种二元实函数 —— 称之为次调和函数出发的,因这类函数较调和函数更容易构造,然后用这类函数的一个所谓佩龙族来逼近调和函数,以至达到解决迪利克雷边值问题的目的.

定义　设区域 G 的边界是由有限条简单封闭曲线所组成,α 表示 ∂G 上的有限条曲线段,$\beta = \partial G \setminus \alpha$,一个二元实函数称为 G 上的关于 α 的调和测度,记为 $w(z,\alpha,G)$,若它为 G 上的有界调和函数,在 $\overline{G}$ 上除了 α 的所有端点外连续,且

$$w(\xi,\alpha,G) = \begin{cases} 1, \xi \in \alpha \\ 0, \xi \in \beta \end{cases}$$

所以调和测度是由边值函数

$$f(\xi) = \begin{cases} 1, \xi \in \alpha \\ 0, \xi \in \beta \end{cases}$$

所确定的有界的广义迪利克雷边值问题的解.

它有一般测度均具有的一些典型性质:

(1) $w(z,\alpha,G)$ 是非常值的,除非 β 由有限个点所构成,且对 $\forall z \in G$,有 $0 < w(z,\alpha,G) < 1$;

(2) 设 $\alpha_1, \alpha_2 < \partial G, \alpha_1 \cap \alpha_2 = \varnothing$,则

$$w(z,\alpha_1,G) + w(z,\alpha_2,G) = w(z,\alpha_1 \cup \alpha_2, G)$$

特别地有

$$w(z,\alpha,G)+w(z,\beta,G)=1$$

(3)(单调性) 若 $\alpha_1 \subset \alpha_2$，则

$$w(z,\alpha_1,G)\leqslant w(z,\alpha_2,G)$$

(4) 如果 G_1 和 G_2 有非空边界交集，且 $G_1 \subset G_2$，则对 $\forall \alpha \subset \partial G_1 \cap \partial G_2$，$z \in G_1$，有

$$w(z,\alpha,G_1)\leqslant w(z,\alpha,G_2)$$

(5)(共形不变性) 设 $w=f(z)$ 为区域 G 上的共形映照，$\alpha \subset \partial G$，则

$$w(z,\alpha,G)=w(f(z),f(\alpha),f(G))$$

利用这一概念还可以简证哈达玛之圆定理，但这需要借助一个结论.

设有界区域 G，其边界 Γ 及 Γ 的子集 E 同上，设 $f(z)$ 在 $\overline{G}$ 上解析，并且

$$|f(z)|\leqslant\begin{cases}\leqslant M_1, z\in E\\ \leqslant M_2, z\in \Gamma\setminus E\end{cases}$$

其中 M_1 及 M_2 是有限正数，那么 $\forall z\in \overline{G}$.

$$\ln|f(z)|\leqslant w(z,E,G)\ln M_1+(1-w(z,E,G))\ln M_2$$

在单位圆内部 $|z|<1$ 考虑一个固定的点 z，以及圆 $|z|=1$ 上的弧 $\varphi_1\leqslant\varphi\leqslant\varphi_2$(见图 1). 通过 z 以及弧 $\varphi_1\varphi_2$ 的端点作弦 $e^{i\omega_1}e^{i\varphi_1}$ 和 $e^{i\omega_2}e^{i\varphi_2}$，我们将证明，作为 z 的函数，弧 $\omega_1\leqslant\omega\leqslant\omega_2$ 可以用泊松积分表示. 为此，我们首先考虑顶点为 z，$e^{i\varphi}$ 以及 $e^{i\varphi'}$ 的三角形，它是与以 z，$e^{i\omega}$ 以及 $e^{i\omega'}$ 为顶点的三角形相似的. 因此当 φ' 趋于 φ 时，我们得到关系

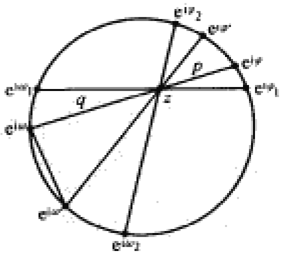


图 1

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\varphi}=\frac{p}{q} \qquad ①$$

其中，q 是 z 到 $e^{i\omega}$ 的距离，而 p 是 z 到 $e^{i\varphi}$ 的距离. 此外，置 $z=re^{i\theta}$ 时，我们由一个熟知的平面几何定理得到关系

$$pq=(1-r)(1+r)=1-r^2$$

因此我们最后有

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\varphi}=\frac{pq}{p^2}=\frac{1-r^2}{|e^{i\varphi}-re^{i\theta}|^2}=\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2} \qquad ②$$

如果我们记

$$u(x,y)=\frac{\omega_2-\omega_1}{2\pi}=\frac{\omega}{2\pi} \qquad ③$$

我们就得到关系

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\mathrm{d}\varphi \qquad ④$$

④ 的右边表示一个在圆盘 $|z|<1$ 内调和的函数，而且由施瓦兹定理，它在弧 $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$ 之每一个内点等于1，而在 $|z|=1$ 的其余弧段的每一内点上等于零.

调和函数 u 之等值线可确定如下. 我们作过三点 $e^{i\varphi_1}$，z 以及 $e^{i\varphi_2}$ 的圆，又用 δ 表示该圆与单位圆的交角(见图2)，由初等平面几何求得 $\omega' = 2\delta$，于是由 ③ 得

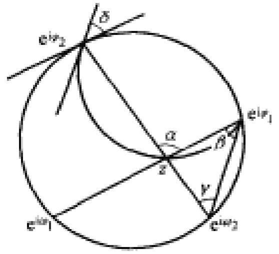


图2　$\varphi = 2\gamma, \omega = 2\beta, \alpha = \beta + \gamma, \alpha = \delta + \varphi/2$，因此 $\omega = 2\alpha - \varphi = 2\delta$

$$u(x,y) = \frac{\delta}{\pi} \qquad ⑤$$

因此，等值线是通过弧 $\varphi_1\varphi_2$ 之端点的一些圆弧.

对于弧 $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$，即对于 $\delta = \pi$，我们得到 $u = 1$；对于余下的弧，即对于 $\delta = 0$，我们有 $u = 0$.

函数 $u(x,y)$ 称做弧 $\varphi_1\varphi_2$ 在点 z 处的调和测度，我们可以给它以第二个几何解释，这个解释正像第一个一样简单.

为此，我们把圆盘 $|z|<1$ 看做一非欧平面，并且定出非欧角 ω^*，这就是点 z 对地平线一部分 $\varphi_1\varphi_2$ 所张的角. 由图3看出

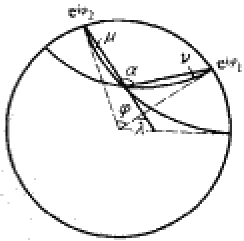


图3

$$\alpha = \lambda + \nu ; \lambda = \varphi + \mu$$

因此

$$\omega^* = \alpha + \mu + \nu = 2\alpha - \varphi = \omega$$

于是角 ω^* 等于弧 $\varphi_1\varphi_2$ 在点 z 处的调和测度成正比.

这个解释说明，调和测度是一切非欧运动下的不变量.

注　调和测度的概念还可以大大地扩充，如果我们通过一个非欧运动，将点 z 移动到圆盘 $|z| \leqslant 1$ 的中心，则弧 $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$ 的调和测度就变成从这个圆的中心向这段弧所张的欧氏角. 如果以 $|z|=1$ 的任一勒贝格可测子集代替上述讨论中所描绘的弧 $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$，则类似于上面引入调和函数的一个结构将称做所给集关于点 z 的调和测度. 但是，以后我们将不应用这个推广，虽然它是很重要的.

几个思考题：

(1) 区域 G 为圆 $|z|<1$，而 $w(z,\theta_1,\theta_2)$ 为弧 $\alpha = (\theta_1,\theta_2)$；$w = e^{i\theta}$ 的调和测度.

求函数$\frac{\mathrm{d}w(z,\theta_1,\theta)}{\mathrm{d}\theta}$关于一个固定的$\theta$值的阶层曲线($z = re^{i\varphi}$为动点).

(2) 求角域$0 < \arg z < \gamma$的两条边的调和测度.

(3) 求直径Δ与平圆弧Γ关于半圆$|z| < R, \mathrm{Im}\, z > 0$的调和测度.

(4) 求圆环$r < |z| < R$的边界圆周的调和测度.

第五十四回　普适性　调和概念涉及广[①]
喜综合　分析代数是一家

设变量是 $x_1,\cdots,x_n$，这些变量的所有实系数多项式记为

$$R[x_1,\cdots,x_n]$$

具有形式 $x_1^{j_1}\cdots x_n^{j_n}$ 的多项式称为单项式.

任何多项式都是线性组合

$$P(x_1,\cdots,x_n)=\sum C_{j_1,\cdots,j_n}x_1^{j_1}\cdots x_n^{j_n}$$

其中实系数 $C_{(j)}\in R$，单项式可缩写成

$$M_{(j)}(x)=x^{(j)}=x_1^{j_1}\cdots x_n^{j_n}$$

因式 $P(x)=\sum C_{(j)}M_{(j)}(x)$. $M_{(j)}(x)$ 的次数定义为

$$\deg M_{(j)}(x)=j_1+\cdots+j_n$$

如果所有具有非零系数的单项式具有相同的次数 d，则多项式 $P(x)$ 称为齐次的. 我们用 $\mathrm{Pol}(n,d)$ 表示 R 上 n 个变量 $x_1,\cdots,x_n$ 的 d 次单项式生成的向量空间.

我们可以定义偏微分算子多项式

$$P(\partial_1,\cdots,\partial_n)Q=\sum C_{(j)}\partial_1^{j_1}\cdots\partial_n^{j_n}Q$$

Q 为任意多项式.

对拉普拉斯算子 $\Delta=\partial_1^2+\cdots+\partial_n^2$，则满足 $\Delta p=0$ 的多项式 P 称为调和多项式. 注意

$$\Delta:\mathrm{Pol}(n,d)\to\mathrm{Pol}(n,d-2)$$

是一个从 d 次多项式向量空间到 $d-2$ 次多项式向量空间的线性映射.

我们有以下简单结论.

定理　这个线性映射是满射的，即给定一个 $d-2$ 次多项式 Q，存在 $P\in\mathrm{Pol}(n,d)$ 使得 $\Delta P=Q$.

记 $\mathrm{Har}(n,d)$ 是线性映射 $\Delta:\mathrm{Pol}(n,d)\to\mathrm{Pol}(n,d-2)$ 的核，则 d 次齐次多项式空间有一个正交分解

$$\mathrm{Pol}(n,d)=\mathrm{Har}(n,d)+r^2\mathrm{Pol}(n,d-2)$$

其中 $r^2=r^2(x_1,\cdots,x_n)=x_1^2+\cdots+x_n^2$. 即 r^2 是2次齐次多项式，且 $r^2(\partial)=\Delta$.

用 S^W 表示所有对称多项式的空间，则有熟知结论

① 本回引自文献[17].

$$S^W = R[I_1, \cdots, I_n]$$

其中 $I_j = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_j \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_j}$,即所谓的初等对称多项式.

设 S_+^W 定义为常数项为零的对称单项式子空间,若 H 是一个多项式,当且仅当对所有 $Q \in S_+^W, Q(\partial)H = 0$,$H$ 称为 W - 调和的.

若 $P(\partial) = P(\partial_1, \cdots, \partial_n) \in R[\partial_1, \cdots, \partial_n]$,我们定义 W - 调和函数为 $\mathbf{R}^n$ 上无穷次可微函数 f,并且满足:对所有的 $P \in S_+^W$,有 $P(\partial)f = 0$. 每一个多项式微分算子 $P(\partial)(P \in S, S = R[x_1, \cdots, x_n]$ 是实数上的多项式环)是 S 到自身的一个线性映射,设 $S(\partial)$ 是所有多项式微分算子 $P(\partial)$ 的集合,$S(\partial)$ 的特征函数 f 意味着,f 是一个非零函数并且对每一个 $D \in S(\partial)$,存在一个实数 $\lambda(D)$,使得

$$D(f) = \lambda(D)f$$

例如,设 $S = (s_1, \cdots, s_n)$ 是一组实数. 定义函数 $f_s: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$,这里 $f_s(x_1, \cdots, x_n) = e^{x_1 s_1} \cdots e^{x_n s_n}$,那么 $(\partial_i f_s)(x) = s_i f_s(x)$ 或者 $\partial_i f_s = s_i f_s$,对任意多项式 $p \in S$,得

$$(P(\partial)f_s)(x) = P(s)f_s(x)$$

因此 f_s 是一个具有特征标 λ_s 的特征函数.

决定 S^W 的所有特征函数是一个很好的问题. 这个问题在非常一般的情况下由斯坦尼伯格于 1964 年在《美国数学月刊》中解决.

第五十五回 赶潮流 小波分析异军起①
发新芽 迪氏问题又开花

长期以来，分析中的基函数是余弦函数、正弦函数和虚指数函数，函数 $(2\pi)^{-\frac{1}{2}}e^{ikx}(k\in\mathbf{Z})$ 构成了空间 $L^2[0,2\pi]$ 的一组正交基，傅里叶级数是它们的线性组合 $\sum a_k e^{ikx}$，对它们的研究一直是并且仍然是数学分析中问题和发现的用之不竭的源泉. 之所以问题多，这主要是因为缺乏一本好的字典，用它可以把函数的性质翻译到它的傅里叶系数上.

考尔德伦(A. Calderón)，美国数学家，1920年9月4日生于阿根廷门多萨，1947年毕业于布宜诺斯艾利斯大学工程学院，1979年获美国数学会博谢纪念奖，1989年获沃尔夫奖和美国数学会斯蒂尔奖.

在20世纪80年代初，一些科学家就使用了"小波"作为传统的傅里叶分析的一个替代物.

G. Weiss 曾指出：当一个空间可以作"原子分解"时，对作用到这个空间上的算子的研究就变得很简单了. 他写道："分析中的许多问题可自然地表述为定义在函数或分布空间上的线性算子的连续性问题. 如果这个问题可以首先化为研究算子作用到适当的一类简单的元上，而这些元又以某种方便的形式生成整个空间的话，那么这些问题就可以用很直接而容易的技术来解决".

考尔德伦以探讨边界不规则的区域内的椭圆型偏微分方程为动机而实施其研究计划，考尔德伦方法的本质在于用边界上的伪微分方程代替内部的偏微分方程.

以迪利克雷问题为例：计算一个已知"边值"的 Ω 内的调和函数，已知边界数据 $g(x)\in L^2(\partial\Omega,\mathrm{d}\sigma)$，这里 $\mathrm{d}\sigma$ 是边界上的表面积测度，可以想像这个问题没有任何意义，因为一方面 $g(x)$ 仅在 $\partial\Omega$ 上几乎处处有定义，另一方面为确定 Ω 内的调和函数 u，仅仅知道在边界 $\partial\Omega$ 上的几乎所有点的非切向极限是不够的. 这个困难在正则情形同样出现. 请看反例，设 $\Omega=\{(x',x_{n+1})\in\mathbf{R}^{n+1}\mid x_{n+1}>0\}$. 令 $u(x)=u(x',x_{n+1})=x_{n+1}(|x'|^2+x_{n+1}^2)^{-\frac{n+1}{2}}$，那么 u 在 Ω 内调和，并且除 $x'=0$ 外，处处有 $u(x',0)=0$.

为排除迪利克雷问题的这种病态解，只须引进一个安全类，它类似于在勒贝格控制收敛定理中出现的函数类，这个类由 Ω 内这样的调和函数 u 组成，其相应于非切向逼近的极大函数 $u^*(x)\in L^2(\Omega,\mathrm{d}\sigma)$.

定义 设 u 是 Ω 内的一个调和函数，我们说 $u\in H^2(\Omega)$，如果 $u^*(x)\in L^2(\partial\Omega,\mathrm{d}\sigma)$，其中

---

① 本回引自文献[87].

$$u^*(x) = \sup_{y\in\Gamma(x)} |u(y)|$$

B. Dahlberg 证明了如下定理. 迹算子 $\theta: H^2(\Omega) \to L^2(\partial\Omega, \mathrm{d}\sigma)$ 是这两个空间之间的一个同构.

考尔德伦证明了如下定理:

假设 Ω 是一个利普希兹区域,那么“边界”算子

$$\frac{1}{2} + k: L^2(\partial\Omega; \mathrm{d}\sigma) \to L^2(\partial\Omega; \mathrm{d}\sigma)$$

是一个同构,若 $g \in L^2(\partial\Omega; \mathrm{d}\sigma)$,调和函数 $u = k(\frac{1}{2} + k)^{-1}g$ 是下列迪利克雷问题的唯一解

$$\Delta u = 0, 在\ \Omega\ 内, u^* \in L^2(\partial\Omega, \mathrm{d}\sigma)$$

并且 $g(x) = \lim_{y\in\Gamma(x), y\to x} u(y)$ 对 $\mathrm{d}\sigma$ - 几乎所有 x 成立.

考尔德伦原来是工科毕业. 留校任电子线路理论助教,因此他对数学产生了兴趣,成为赞格蒙的学生,他对分析领域影响巨大,在现代傅里叶分析中定理常常不及证明的方法重要,考尔德伦创造了许多方法与技巧,现已成为调和分析中的标准工具,他还和他的老师赞格蒙一起建立了强有力的分析学派.

第五十六回　帕格曼　共形映照核函数①
五十年　历久弥新真经典

1958 年科学出版社出版了由龚升、陈希孺翻译的施梯芳·帕格曼的名著《核函数和共形映照》，对迪利克雷积分与迪利克雷边值问题进行了充分的论述.

在这里，我们将引进区域 B 内调和函数的封闭系，它们对于迪利克雷积分

$$D\{\varphi,\psi\}=\iint_B\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\mathrm{d}\omega$$

是直交的. 为了给这个直交调和函数的理论作一些准备工作，我们给出联系于 B 的典型区域函数以简短的讨论.

我们假设区域 B 具有有限连通数 p，且其边界 b 由闭光滑曲线 $b_1,\cdots,b_p$ 所组成. 我们说一曲线是光滑的，如果它具有连续转动的切线. B 的格林函数 $G(z,\zeta)$ 定义如下：$G(z,\zeta)$ 对于 $z\in B$ 除去点 $z=\zeta$ 外是调和的，而 $G(z,\zeta)+\log|z-\zeta|$ 在点 $z=\zeta$ 处调和，且当 z 趋近于 b 时，$G(z,\zeta)$ 趋向于零. B 的奈依曼函数具有与格林函数相同的对数奇点，且满足条件

$$\frac{\partial N(z,\zeta)}{\partial n_z}=\text{const}\quad,z\in b \tag{①}$$

$$\int_b N(z,\zeta)\mathrm{d}s_z=0 \tag{②}$$

这里 n_z 为 b 在 $z\in b$ 处的内法线.

容易看到，式 ① 中常数的值必须为 $2\pi/l$，这里 l 为 b 的长度. 事实上，设 Γ 为以 $z=\zeta$ 为中心，r 为半径的小圆. 于是按照格林公式

$$\int_b\frac{\partial N}{\partial n_z}\mathrm{d}s_z=\int_\Gamma\frac{\partial N}{\partial n_z}\mathrm{d}s_z=\int_0^{2\pi}\frac{1}{r}r\mathrm{d}\theta+O(r)=2\pi+O(r)=2\pi$$

这是因为左边的积分与 r 无关的缘故.

这样，假使我们要求

$$\frac{\partial N(z,\zeta)}{\partial n_z}=c=\text{const}\quad,z\in b$$

那么我们必须有 $c=2\pi/l$.

众所周知，函数 $G(z,\zeta)$ 和 $N(z,\zeta)$ 是存在的. 它们满足对称条件关系式

$$G(z,\zeta)=G(\zeta,z),N(z,\zeta)=N(\zeta,z) \tag{③}$$

---

① 本回引自文献[131].

所以它们对于 ζ 也正如对 z 一样是调和的. 我们仅对 N 证此对称性, 因为对于 G 的证明是完全相似的. 我们以 Γ^* 记以 $t = z$ 为中心, r 为半径的圆, 由 ① 及 ②, 我们得

$$2\pi(N(z,\zeta) - N(\zeta,z)) = \lim_{r\to 0}\int_{\Gamma+\Gamma^*}\left(N(t,\zeta)\frac{\partial N(t,z)}{\partial n_t} - N(t,z)\frac{\partial N(t,\zeta)}{\partial n_t}\right)ds_t = \int_b\left(N(t,\zeta)\frac{\partial N(t,z)}{\partial n_t} - N(t,z)\frac{\partial N(t,\zeta)}{\partial n_t}\right)ds_t = \frac{2\pi}{l}\int_b N(t,\zeta)ds_t - \frac{2\pi}{l}\int_b N(t,z)ds_t = 0$$

因此式 ③ 得证.

我们以 $\Lambda^2(B)$ 表示在 B 内满足条件

$$D\{\varphi\} = D\{\varphi,\varphi\} < \infty \quad ④$$

$$\int_b \varphi ds = 0 \quad ⑤$$

的单值调和函数族. 条件 ⑤ 是有约束的, 因为的确存在有调和函数 $\varphi(z)$, 它满足条件 ④, 但对于它来说 ⑤ 没有意义. 以后将指出, 条件 ⑤ 可以改为另一不同的形式 —— 公式 ⑭, 它可应用于满足条件 ④ 的最普遍的调和函数. 由格林定理, 我们有

$$D(N(z,\zeta),\varphi(\zeta)) = \iint_B\left(\frac{\partial N}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial N}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)d\omega = + \lim_{r\to 0}\int_{|\zeta-z|=r}\varphi\frac{\partial N}{\partial n_\zeta}ds_\zeta - \int_b\varphi\frac{\partial N}{\partial n_\zeta}ds_\zeta = 2\pi\varphi(z) - \frac{2\pi}{l}\int_b\varphi dS = 2\pi\varphi(z) \quad ⑥$$

我们以 $\omega(z,C)$ 记 B 内的有界调和函数, 当 z 趋向于由 b 上的弧所组成的某集合 C 时, 它趋向于 1; 而当 z 趋向于 b 上的其他部分时, 它趋向于 0. $\omega(z,C)$ 称为 C(相对于 B) 在点 z 的调和测度. 若 b 由 p 个互不相连的曲线 $b_1,\cdots,b_p$ 所组成, 则我们将以 ω_ν 记 b_ν 的调和测度. 由格林公式, 我们有

$$\omega_\nu(z) = \omega(z,b_\nu) = \frac{1}{2\pi}\int_b\omega_\nu(\zeta)\frac{\partial G(z,\zeta)}{\partial n_\zeta}ds_\zeta$$

因而由 $\omega_\nu(z)$ 的边界性质

$$\omega_\nu(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{b_\nu}\frac{\partial G(z,\zeta)}{\partial n_\zeta}ds_\zeta \quad ⑦$$

若以 $H(\zeta,z)$ 记格林函数 $G(\zeta,z)$ 的共轭调和函数, 则由柯西 – 黎曼方程, 我们有 $\frac{\partial G}{\partial n_\zeta} = -\frac{\partial H}{\partial s_\zeta}$, 因而

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2} = 0$$

$$\omega_\nu(z) = -\frac{1}{2\pi}\int_{b_\nu}\frac{\partial H(\zeta,z)}{\partial s_\zeta}\mathrm{d}s_\zeta = -\frac{1}{2\pi}\int_{b_\nu}\mathrm{d}H(\zeta,z)$$

这样，若 ζ 描出边界曲线 b_ν，则 $-2\pi\mathrm{i}\omega_\nu(z)$ 为解析函数 $P(\zeta,z) = G(\zeta,z) + \mathrm{i}H(\zeta,z)$ 的周期.

容易证明 $\sum_{\nu=1}^{p}\omega_\nu(z) = 1$，但任意 $p-1$ 个调和测度都是线性无关的.

我们以 $\widetilde{\omega}_\nu(z)$ 记调和测度 $\omega_\nu(z)$ 的共轭调和函数，且置

$$F_\nu(z) = \omega_\nu(z) + \mathrm{i}\widetilde{\omega}_\nu(z), \nu = 1,\cdots,p$$

$F_\nu(z)$ 称为 B 的第一类规格函数，而 $P(\zeta,z)$ 称为第三类函数.

以 $\mathrm{i}p_{\nu\mu}$ 记 $F_\nu(z)$ 对于边界曲线 b_μ 的周期，我们有

$$p_{\nu\mu} = \int_{b_\mu}\mathrm{d}\widetilde{\omega}_\nu(z) = -\int_{b_\mu}\frac{\partial\omega_\nu}{\partial n}\mathrm{d}s$$

由格林公式

$$\int_b\left(\frac{\partial\omega_\nu}{\partial n}\omega_\mu - \frac{\partial\omega_\mu}{\partial n}\omega_\nu\right)\mathrm{d}s = 0$$

我们可以容易地导出对称关系式

$$p_{\nu\mu} = p_{\mu\nu}$$

对于任意不全为零的实数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_{p-1}$，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{\nu,\mu=1}^{p-1}\lambda_\nu\lambda_\mu p_{\mu\nu} = -\sum_{\nu=1}^{p-1}\sum_{\mu=1}^{p-1}\lambda_\nu\mu_\mu\int_{b_\mu}\frac{\partial\omega_\nu}{\partial n}\mathrm{d}s &= -\sum_{\nu=1}^{p-1}\sum_{\mu=1}^{p-1}\lambda_\nu\lambda_\mu\int_b\omega_\mu\frac{\partial\omega_\nu}{\partial n}\mathrm{d}s = \\ -\int_b\left(\sum_{\nu=1}^{p-1}\sum_{\mu=1}^{p-1}\lambda_\nu\lambda_\mu\omega_\mu\frac{\partial\widetilde{\omega}_\nu}{\partial n}\right)\mathrm{d}s &= \\ -\int_b\left(\sum_{\nu=1}^{p-1}\lambda_\nu\frac{\partial\omega_\nu}{\partial n}\right)\left(\sum_{\mu=1}^{p-1}\lambda_\mu\omega_\mu\right)\mathrm{d}s &\qquad ⑧\end{aligned}$$

因为 $\omega_\nu(1 \leqslant \nu \leqslant p-1)$ 是线性无关的，应用格林公式，我们有

$$\sum_{\nu,\mu=1}^{p-1}\lambda_\nu\lambda_\mu p_{\mu\nu} = D\left(\sum_{\nu=1}^{p-1}\lambda_\nu\omega_\nu\right) > 0$$

因而行列式 $|(p_{kl})^{(p-1)\times(p-1)}|$ 不为零.①

这样，我们可以将任意一个在 B 内的单值解析函数 $f(z)$ 的积分表为一单值函数与 $F_1,\cdots,F_p$ 之一适当的线性组合之和. 事实上，假设函数 $\int_{z_0}^{z}f(z)\mathrm{d}z$ 对于以围绕 b_ν 的周期为 $a_\nu(\nu = 1,\cdots,p)$. 我们建立形如

① 从现在开始，除非有相反的声明，我们恒将以 $(a_{kl})^{n\times n}$ 来记一 $n\times n$ 矩阵，其中足标 k,l 由 1 变到 n.

$$F(z) = \sum_{j=1}^{p-1} \mu_j F_j(z)$$

的函数，使其具有周期 a_ν，这是可能的，因为行列式 $|(p_{kl})^{(p-1)\times(p-1)}|$ 不为零，因而方程组

$$i\sum_{j=1}^{p-1} \mu_j p_{js} = a_s, s = 1,\cdots,p-1$$

有一解. 函数 $\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z - F(z)$ 显然没有周期，而 $f(z)$ 可写为形式

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z = g(z) + \sum_{j=1}^{p-1} \mu_j F_j(z) \quad ⑨$$

这里 $g(z)$ 在 B 内是单值的.

函数 $F_\nu(z)$ 之所以被称为第一类函数，是因为在许多方面它与系数为 $p-1$ 的闭黎曼曲面上的第一类阿贝尔积分相似. 由于相似的理由，我们称函数 $P(z,\zeta)$（它的实部为格林函数 $G(z,\zeta)$）为第三类函数. 追随这个相似性，自然要在 B 内定义第二类函数. $S(z) = \sigma(z) + \mathrm{i}\tau(z)$ 称为在 B 内的第二类函数，如果它在 B 内除有限多个极点外是正则的，且其实部在每一 b_ν 上为常数. 第二类函数最简单的例子乃是第三类函数 $P(z,\zeta)$ 对其参数的实部的微商 $\partial[P(z,\zeta)]/\partial\xi(\zeta = \xi + \mathrm{i}\eta)$. 容易验证，$\partial(P(z,\zeta))/\partial\xi$ 在 $z=\zeta$ 处有一留数为 1 的极点，且对于 $z \in b$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}(P(z,\zeta))\right) = 0$$

阿贝尔（Abel, Niels Henrik, 1802—1829），挪威数学家. 生于挪威西南角海岸斯塔万格附近的小岛芬岛（另一说生于挪威最南端克里斯蒂安桑的小树镇），卒于挪威阿伦达尔附近的弗鲁兰.

为了引进直交调和函数的封闭系，我们来定义族 $\mathfrak{L}^2(B)$ 的子族 $l^2(B)$，它由 $\mathfrak{L}^2(B)$ 中那些具有单值不定积分的函数的全体所组成. 我们可以在 $l^2(B)$ 族中引进直交函数的封闭系 $\{g_\nu(z)\}$. 我们用通常的方法来定义这个新系的核函数

$$\widetilde{K}_B(z,\overline{\zeta}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} g_\nu(z)\overline{g_\nu(\zeta)} \quad ⑩$$

现在转向于调和函数的情形，使这个理论基于迪利克雷积分

$$D\{\varphi,\psi\} = \iint_B \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\mathrm{d}w$$

所引进的度量上，这是自然的.

我们定义族 $\Lambda^2(B)$，它在 B 内满足条件 ⑤，且由具有有限迪利克雷积分

$$D\{\varphi\} = D\{\varphi,\varphi\} < \infty$$

的全体调和函数所组成；我们必须证明，对于族 $\Lambda^2(B)$，存在一封闭系 $\{\varphi_\nu\}$，它对于迪利克雷积分是直交的，亦即

$$D\{\varphi_\nu,\varphi_\mu\} = \delta_{\nu\mu}, \delta_{\nu\nu} = 1, \delta_{\nu\mu} = 0, \nu \neq \mu \quad ⑪$$

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2} = 0$$

设 $\varphi \in \Lambda^2(B)$ 有一单值的共轭调和函数 ψ，与前相同以 $\omega_\nu(z)$ 记 b_ν 的调和测度，假设$\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ 在 b 上有定义而且连续，则由格林定理我们有

$$D\{\varphi, \omega_\nu\} = -\int_b \omega_\nu \frac{\partial \varphi}{\partial n} \mathrm{d}s = -\int_{b_\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \mathrm{d}s =$$

$$\int_{b_\nu} \frac{\partial \psi}{\partial s} \mathrm{d}s = \int_{b_\nu} \mathrm{d}\psi(s) = 0 \qquad ⑫$$

若这后一条件不满足，则借助于下述技巧，我们仍可证明 $D\{\varphi, \omega_\nu\} = 0$. 以 B_ε 记由调和测度 ω_ν 的阶层曲线 $\omega_\nu(z) = \varepsilon$ 及 $\omega_\nu(z) = 1 - \varepsilon\ (\varepsilon > 0)$ 所围成的 B 的子区域，则曲线 $\omega_\nu(z) = 1 - \varepsilon$ 在 B_ε 内的调和测度显然由

$$\omega_\nu(z, \varepsilon) = \frac{\omega_\nu(z) - \varepsilon}{1 - 2\varepsilon}$$

给出. 因为$\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ 在 B_ε 的边界上有定义而且连续，由 ⑫ 我们有

$$\iint_{B_\varepsilon} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \omega_\nu(z, \varepsilon)}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \omega_\nu(z, \varepsilon)}{\partial y} \right) \mathrm{d}\omega = 0$$

所以

$$\iint_{B_\varepsilon} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \omega_\nu}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \omega_\nu}{\partial y} \right) \mathrm{d}\omega = 0$$

令 ε 趋向于 0，我们获得 $D\{\varphi, \omega_\nu\} = 0$.

现在让我们重新考虑 $\varphi \in \Lambda^2(B)$ 且其共轭函数 ψ 可能是多值的一般情形. 因为迪利克雷积分 $D\{\varphi, \psi\}$ 仅与 φ 和 ψ 的微商有关，且我们希望把 $D\{\varphi, \varphi\}$ 规范化，使其当且仅当 φ 恒等于 0 时才等于 0，我们必须置一附加的规范化条件于函数族 $\Lambda^2(B)$. 这个可以用若干方法完成之，此处选择一个便于引向最简单的公式的方法，但它有着不能在共形变换下保持不变性的缺点.

在 $\varphi(z)$ 具有连续边界值的情形，$\varphi(z)$ 将以条件

$$\int_b \varphi(z) \mathrm{d}s_z = 0 \qquad ⑬$$

规范化. 若此积分无定义，则 ⑬ 将以

$$D\{N(z, \zeta_0), \varphi\} = 2\pi\varphi(\zeta_0) \qquad ⑭$$

代替之. 这里 $N(z, \zeta_0)$ 为 B 的奈依曼函数，以固定点 $\zeta_0\ (\zeta_0 \in B)$ 为其奇点. 当 ⑬ 有定义时，此二条件是等价的，因为按格林公式

$$D\{N(z, \zeta), \varphi\} = -\int_b \varphi \frac{\partial N(z, \zeta)}{\partial n_z} \mathrm{d}s_z + \lim_{r \to 0} \int_{C_r} \varphi \frac{\partial N(z, \zeta)}{\partial n_z} \mathrm{d}s_z$$

这里 C_r 为圆周 $|z - \zeta| = r$，所以

$$D\{N(z, \zeta), \varphi\} = -\frac{2\pi}{l} \int_b \varphi \mathrm{d}s_z + 2\pi\varphi(\zeta) = 2\pi\varphi(\zeta)$$

以前曾经证明,对于任意的 $\varphi \in \Lambda^2(B)$, $\varphi(z)+\mathrm{i}\psi(z)$ 可表为 F_ν 的一线性组合加上一个单值函数.因此

$$\varphi(z) = \mathrm{Re}\Big(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \int^z g_\nu(t)\mathrm{d}t + \sum_{\nu=1}^{p-1} \mu_\nu F_\nu(z)\Big)$$

这里 $g(t) \in l^2(B)$.

我们若将 $\int^z g_\nu(t)\mathrm{d}t$ 的实部与虚部分出

$$\int^z g_\nu(t)\mathrm{d}t = \varphi_\nu(z) + \mathrm{i}\psi_\nu(z)$$

且选择积分常数使得 $\varphi_\nu \in \Lambda^2$, $\psi_\nu \in \Lambda^2$,则将有关系式

$$J_B(g_\nu, \overline{g_\mu}) = D\{\varphi_\nu, \varphi_\mu\} - \mathrm{i}D\{\varphi_\nu, \psi_\mu\} = D\{\psi_\nu, \psi_\mu\} + \mathrm{i}D\{\psi_\nu, \varphi_\mu\} = \delta_{\nu\mu}$$

因为任一单值调和函数必为一个具有虚周期的解析函数的实部,那么显然,联合函数 $\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2, \cdots$ 以及函数 $\omega_\nu(\nu = 1,\cdots,p-1)$ 可以作为 $\Lambda^2(B)$ 之一封闭系,因为 μ_ν 都是实数,在作成此系时并不必须应用函数 $\widetilde{\omega}_\nu$.我们只须来规范直交化 ω_ν, $\nu = 1,\cdots,p-1$.

由核函数 $\widetilde{K}_B(z,\overline{\zeta})$ 的收敛性我们得出调和核函数

$$k_B(z,\zeta) = \sum_{\nu=1}^{\infty}(\varphi_\nu(z)\varphi_\nu(\zeta) + \psi_\nu(z)\psi_\nu(\zeta)) + \sum_{\nu,\mu=1}^{p-1} C_{\nu\mu}\omega_\nu(z)\omega_\mu(\zeta)$$

的收敛性.这里 $C_{\nu\mu}$ 为将 ω_ν 规范直交化所产生的常数,而 $C_{\nu\mu} = C_{\mu\nu}$. $k_B(z,\zeta)$ 具有性质

$$k_B(z,\zeta) = k_B(\zeta,z) \qquad ⑮$$

$$\varphi(z) = D\{k_B(z,\zeta), \varphi(\zeta)\}, \varphi \in \Lambda^2 \qquad ⑯$$

这表示出它的唯一性.

因此

$$k = k_B(z,\zeta) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\varphi_\nu(z)\varphi_\nu(\zeta) \qquad ⑰$$

对于 Λ^2 中任一封闭直交系 $\{\varphi_\nu\}$ 成立,而核函数仅仅依赖于区域 B.

由恒等式

$$D\{k+\varphi\} = D\{k\} + 2D\{k,\varphi\} + D\{\varphi\}$$

及 ⑯ 推出函数

$$m(z,\zeta) = \frac{k(z,\zeta)}{k(\zeta,\zeta)}$$

是 $\Lambda^2(B)$ 内所有满足条件 $\varphi(\zeta)=1$ 的调和函数中使迪利克雷积分 $D\{\varphi\}$ 的值成为最小的函数.

下面我们将证明核函数 $k(z,\zeta)$，格林函数 $G(z,\zeta)$ 以及奈依曼函数是由简单的关系式

$$k(z,\zeta)=\frac{1}{2\pi}(N(z,\zeta)-G(z,\zeta)) \tag{18}$$

联系的.

⑱ 的右边代表一个 $\Lambda^2(B)$ 内的调和函数，如果能够证明这个函数具有核函数的特征性质 ⑯，则恒等式 ⑱ 将被建立. 因此，我们下一步的工作就在于对所有的 $\varphi(z)\in\Lambda^2$ 来计算纯量积 $D\{N(z,\zeta),\varphi\}$ 及 $D\{G(z,\zeta),\varphi\}$.

若 $\varphi(z)$ 具有连续边界值，则由 ⑭ 我们有

$$D\{N(z,\zeta),\varphi(z)\}=2\pi\varphi(\zeta) \tag{19}$$

对每一 $\zeta\in B$. 同样，若$\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ 在 b 上连续

$$D\{G(z,\zeta),\varphi(z)\}=-\int_b G(z,\zeta)\frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}s_z+\lim_{r\to0}\int_{C_r}G(z,\zeta)\frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}s_z$$

这里 C_r 为圆周 $|z-\zeta|=r$，因为 $G(z,\zeta)$ 在 b 上等于0，且第二个积分显然趋向于0，我们有

$$D\{G(z,\zeta),\varphi(z)\}=0 \tag{20}$$

若$\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ 在 b 上不连续，我们亦能证明 ⑳ 成立. 为此我们只须用由阶层曲线 $G(z,\zeta)=\varepsilon$ 围成的区域 B_ε 来逼近 B，且以证明 ⑫ 同样的方式来进行之.

对于 $\Lambda^2(B)$ 内不在 b 上连续的函数$\varphi(z)$，式 ⑲ 的证明较为困难，因而我们把它详细写出来. 由族 $\Lambda^2(B)$ 的定义，⑭ 对固定的点 $\zeta_0\in B$ 成立. 所以，如果我们证明了

$$D\{N(z,\zeta)-N(z,\zeta_0),\varphi(z)\}=2\pi(\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)) \tag{21}$$

则式 ⑲ 将得证. 函数

$$N=N(z;\zeta,\zeta_0)=N(z,\zeta)-N(z,\zeta_0)$$

显然有在 b 上等于零的法微商. 虽然 $N(z;\zeta,\zeta_0)$ 的共轭调和函数 $\widetilde{N}(z;\zeta,\zeta_0)$ 在围绕点 ζ,ζ_0 时具周期 $\pm2\pi$，它沿边界曲线 b 是没有周期的. 更有进者，在每一 $b_\nu(\nu=1,\cdots,p)$ 上，$\widetilde{N}$ 为常数，姑且记之为 $c_\nu:\widetilde{N}=c_\nu$.

当 N 由 $-\infty$ 变到 $+\infty$ 时，阶层曲线 $\widetilde{N}=c_\nu\pm\varepsilon$ 由ζ_0出发，逼近边界 b_ν 的一部分而以 ζ 为终点. 这样，我们可以用四段阶层曲线

$$\widetilde{C}_{\varepsilon,\nu}:\widetilde{N}=c_\nu+\varepsilon,\alpha_\nu\leqslant N\leqslant\beta_\nu$$

$$C_{\varepsilon,\nu}:N=\beta_\nu,c_\nu-\varepsilon\leqslant\widetilde{N}\leqslant c_\nu+\varepsilon$$

$$\widetilde{C}_{\varepsilon,\nu+p}:\widetilde{N}=c_\nu-\varepsilon,\alpha_\nu\leqslant N\leqslant\beta_\nu$$

$$C_{\varepsilon,\nu+p}: N = \alpha_\nu, c_\nu - \varepsilon \leqslant \widetilde{N} \leqslant c_\nu + \varepsilon$$

来包围边界 b_ν. 这里 α_ν 小于 N 在 b_ν 上的最小值，而 β_ν 大于 N 在 b_ν 上的最大值. 以 $\widetilde{C}_\varepsilon$ 及 C_ε 分别记曲线 $\widetilde{C}_{\varepsilon,i}$ 及 $C_{\varepsilon,i}$ 之全体，我们得到在 B 内以 $\widetilde{C}_\varepsilon$ 及 C_ε 为边界的渐近区域 B_ε（参看图 1，那里 $\widetilde{C}_\varepsilon$ 和 C_ε 皆以实线标出）. 这样我们有

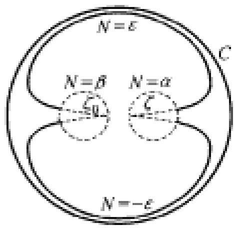


图 1

$$\iint_B \left(\frac{\partial N(z;\zeta,\zeta_0)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial N(z;\zeta,\zeta_0)}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{B_\varepsilon} \left(\frac{\partial N(z;\zeta,\zeta_0)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial N(z;\zeta,\zeta_0)}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$2\pi(\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)) - \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon} \varphi \frac{\partial N(z;\zeta,\zeta_0)}{\partial n}\mathrm{d}s - \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\widetilde{C}_\varepsilon} \varphi \frac{\partial N(z;\zeta,\zeta_0)}{\partial n}\mathrm{d}s$$

当 $z \in \widetilde{C}_\varepsilon, \frac{\partial N}{\partial n} = -\left(\frac{\partial \widetilde{N}}{\partial s}\right) = 0$. 当 $z \in C_\varepsilon$，因为 C_ε 上的点与 b 之距离有一正的最小值，所以

$$\left| \int_{C_\varepsilon} \varphi \frac{\partial N}{\partial n}\mathrm{d}s \right| \leqslant M \left| \int_{C_\varepsilon} \frac{\partial \widetilde{N}}{\partial s}\mathrm{d}s \right| = 4Mp\varepsilon$$

这样当 $\varepsilon \to 0$，我们得到恒等式 ㉑. 这就完成了 ⑲ 的证明.

结合 ⑲ 及 ⑳ 我们得到

$$D\left(\frac{1}{2\pi}(N(z,\zeta) - G(z,\zeta)), \varphi(z)\right) = \varphi(\zeta) \tag{㉒}$$

这证明了函数

$$\frac{1}{2\pi}(N(z,\zeta) - G(z,\zeta))$$

具有核函数的特征性质而恒等式 ⑱ 得证.

恒等式 ⑱ 指出，势论的第一和第二边值问题可借核函数之助得到解决. 第一边值问题（迪利克雷问题）在于寻求在 B 内的调和函数，在 b 上取给定的边值 $u(\zeta)(\zeta \in b)$，按格林公式，此问题的解 $u(z)$ 有形式

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_b u(\zeta) \frac{\partial G(z,\zeta)}{\partial n_\zeta}\mathrm{d}s_\zeta$$

由 ⑱，在 b 上我们有

$$\frac{\partial k(z,\zeta)}{\partial n_\zeta} = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial N(z,\zeta)}{\partial n_\zeta} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial G(z,\zeta)}{\partial n_\zeta} =$$

$$\frac{1}{l} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial G(z,\zeta)}{\partial n_\zeta} \quad ,\zeta \in b$$

所以

$$u(z)=-\int_b u(\zeta)\frac{\partial k(z,\zeta)}{\partial n_\zeta}ds_\zeta+\frac{1}{l}\int_b u(\zeta)ds_\zeta \quad ㉓$$

在边值函数满足简单条件$\int_b u(\zeta)d\zeta=0$的情形，我们有

$$u(z)=-\int_b u(\zeta)\frac{\partial k(z,\zeta)}{\partial n_\zeta}ds_\zeta \quad ㉔$$

类似地我们可以解决第二边值问题(诺依曼问题).这个问题在于寻求在 B 内调和的函数 $u(z)$，其法微商$\frac{\partial u(\zeta)}{\partial n_\zeta}(\zeta\in b)$在 b 上取给定的值.我们注意，按高斯定理，此给定的值必须满足条件

$$\int_b \frac{\partial u(\zeta)}{\partial n_\zeta}ds_\zeta=0$$

由格林公式推知，诺依曼问题之一个解由

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_b \frac{\partial u(\zeta)}{\partial n_\zeta}N(z,\zeta)ds_\zeta \quad ㉕$$

给出.必须注意，奈依曼问题的条件仅仅确定 $u(z)$ 有可加常数项.在解 ㉕ 中，此常数显然已如此选择，使得 $u(z)$ 在 $\Lambda^2(B)$ 内.

诺依曼问题亦可借核函数之助而得解决.由 ⑱，对 $\zeta\in b$ 我们有

$$k(z,\zeta)=\frac{1}{2\pi}N(z,\zeta)$$

以此代入 ㉕，我们得

$$u(z)=\int_b \frac{\partial u(\zeta)}{\partial n_\zeta}k(z,\zeta)ds \quad ㉖$$

这样我们看到，当核函数 $k(z,\zeta)$ 已知时，迪利克雷问题与奈依曼问题都能获得解决.

作为 ㉓ 之一个应用，我们得到调和测度 $\omega_\nu(z)$ 通过核函数的表达式.我们有

$$\omega_\nu(z)-\frac{l_\nu}{l}=-\int_{b_\nu}\frac{\partial k(z,\zeta)}{\partial n_\zeta}ds_\zeta \quad ㉗$$

这里 l_ν 为 b_ν 的长度.

设 $k^*(z,\zeta)$ 为 $k(z,\zeta)$ 对于 ζ 的共轭调和函数.由柯西－黎曼方程及 ㉗，我们有

$$\omega_\nu(z)-\frac{l_\nu}{l}=\int_{b_\nu}\frac{\partial k^*(z,\zeta)}{\partial s_\zeta}ds_\zeta=\int_{b_\nu}dk^*(z,\zeta)$$

因为 $k(z,\zeta)$ 在 B 内是单值的，我们有

$$\int_{b_\nu} \mathrm{d}k(z,\zeta) = 0$$

所以

$$\omega_\nu(z) - \frac{l_\nu}{l} = \int_{b_\nu} \mathrm{d}(k^*(z,\zeta) + \mathrm{i}k(z,\zeta)) = \mathrm{i}\int_{b_\nu} \mathrm{d}(k(z,\zeta) - \mathrm{i}k^*(z,\zeta))$$

显然，$k(z,\zeta) - ik^*(z,\zeta)$ 为 $\overline{\zeta}$ 的解析函数. 故

$$\omega_\nu(z) - \frac{l_\nu}{l} = \mathrm{i}\int_{b_\nu} \frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}}(k(z,\zeta) - \mathrm{i}k^*(z,\zeta))\mathrm{d}\overline{\zeta} = 2\mathrm{i}\int_{b_\nu} \frac{\partial k(z,\zeta)}{\partial\overline{\zeta}}\mathrm{d}\overline{\zeta}$$

应用运算子 $\frac{\partial}{\partial z}$，我们最后得到

$$F'_\nu(z) = 4\mathrm{i}\int_{b_\nu} \frac{\partial^2 k(z,\zeta)}{\partial z\partial\overline{\zeta}}\mathrm{d}\overline{\zeta} \qquad ㉘$$

作为公式 ㉒ 的第二个应用，我们通过核函数来推导格林函数的一个表达式. 应用 ㉒ 于调和函数 $G(z,\zeta) + \log|z-\zeta|$，我们得

$$G(z,\zeta) + \log|z-\zeta| = -\int_b \log|\zeta - t|\frac{\partial k(z,t)}{\partial n_t}\mathrm{d}s_t + \frac{1}{l}\int_b \log|\zeta - t|\mathrm{d}s_t$$

这也可以写为

$$G(z,\zeta) = \log\frac{1}{|z-\zeta|} + \lambda(\zeta) + D\left\{k(z,t),\log\frac{1}{|t-\zeta|}\right\}$$

这里

$$\lambda(\zeta) = \frac{1}{l}\int_b \log|\zeta - t|\mathrm{d}s_t$$

在这一回的结尾，我们来推导若干联系函数 $G(z,\zeta)$，$N(z,\zeta)$. $k(z,\zeta)$，$K(z,\overline{\zeta})$ 以及 $\widetilde{K}(z,\overline{\zeta})$ 的有趣恒等式. 在前面我们曾借函数族 $l^2(B) \subset \mathcal{L}^2(B)$ 的封闭直交系 $\{g_\nu(z)\}$ 来定义核函数 $\widetilde{K}(z,\overline{\zeta})$. 曾求得，若

$$\int^z g_\nu(t)\mathrm{d}t = \varphi_\nu(z) + \mathrm{i}\psi_\nu(z), \nu = 1,2,\cdots$$

则 $k(z,\zeta)$ 由

$$k(z,\zeta) = \sum_{\nu=1}^{\infty}(\varphi_\nu(z)\varphi_\nu(\zeta) + \psi_\nu(z)\psi_\nu(\zeta)) + \sum_{\nu,\mu=1}^{p-1} C_{\nu\mu}\omega_\nu(z)\omega_\mu(\zeta) \qquad ㉙$$

给出. 现在我们有

$$\varphi_\nu(z)\varphi_\nu(\zeta)+\psi_\nu(z)\psi_\nu(\zeta)=\frac{1}{2}\Big(\int^z g_\nu(t)\mathrm{d}t\cdot\overline{\int^\zeta g_\nu(t)\mathrm{d}t}+\overline{\int^z g_\nu(t)\mathrm{d}t}\cdot\int^\zeta g_\nu(t)\mathrm{d}t\Big),\nu=1,2,\cdots$$

因此我们可将基本恒等式⑱写为形式

$$\frac{1}{2\pi}(N(z,\zeta)-G(z,\zeta))=\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\Big(\int^z g_\nu(t)\mathrm{d}t\cdot\overline{\int^\zeta g_\nu(t)\mathrm{d}t}+\overline{\int^z g_\nu(t)\mathrm{d}t}\cdot\int^\zeta g_\nu(t)\mathrm{d}t\Big)+\sum_{\nu,\mu=1}^{p-1}C_{\nu\mu}\omega_\nu(z)\omega_\mu(z) \qquad ㉚$$

分别对 $z,\bar{z}$ 及 ζ 微分㉚,我们可以得到恒等式.回忆运算子$\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial \zeta}$的定义,按柯西－黎曼方程,我们有

$$\frac{1}{2\pi}\Big(\frac{\partial^2 N}{\partial z\partial\zeta}-\frac{\partial^2 G}{\partial z\partial\zeta}\Big)=\frac{\partial^2 k(z,\zeta)}{\partial z\partial\zeta}=$$

$$\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\Big(g_\nu(z)\frac{\partial}{\partial\zeta}\overline{\int^\zeta g_\nu(t)\mathrm{d}t}+g_\nu(\zeta)\frac{\partial}{\partial z}\overline{\int^z g_\nu(t)\mathrm{d}t}\Big)+$$

$$\sum_{\nu,\mu=1}^{p-1}C_{\nu\mu}\frac{\partial\omega_\nu(z)}{\partial z}\cdot\frac{\partial\omega_\mu(\zeta)}{\partial\zeta}=\frac{1}{4}\sum_{\nu,\mu=1}^{p-1}C_{\nu\mu}F'_\nu(z)F'_\mu(z) \qquad ㉛$$

这样,上面给出的格林函数与奈依曼函数的二级微商仅仅相差一个由第一类函数的微商 $F'_1,\cdots,F'_{p-1}$ 做成的二次形式.同样,按 $\widetilde{K}(z,\bar{\zeta})$ 的定义,我们求得

$$\frac{1}{2\pi}\Big(\frac{\partial^2 N}{\partial z\partial\bar{\zeta}}-\frac{\partial^2 G}{\partial z\partial\bar{\zeta}}\Big)=\frac{\partial^2 k(z,\zeta)}{\partial z\partial\bar{\zeta}}=$$

$$\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{\infty}g_\nu(z)\overline{g_\nu(\zeta)}+\frac{1}{4}\sum_{\nu,\mu=1}^{p-1}C_{\nu\mu}F'_\nu(z)\overline{F'_\mu(\zeta)}=$$

$$\frac{1}{2}\widetilde{K}(z,\bar{\zeta})+\frac{1}{4}\sum_{\nu,\mu=1}^{p-1}C_{\nu\mu}F'_\nu(z)\overline{F'_\mu(\zeta)} \qquad ㉜$$

这样我们看到,核函数 $\widetilde{K}$ 和 k 是紧密地关联着的;我们将在下面对 K 导出一个类似的关系式.

我们曾在前面指出,附加函数 $F'_1,\cdots,F'_{p-1}$ 于族 $l^2(B)$ 的结果得出族 $\pounds^2(B)$.设 $g(z)$ 为 $l^2(B)$ 内任一函数,且置

$$\int^z g(z)\mathrm{d}z=\varphi(z)+\mathrm{i}\psi(z)$$

那么

$$J(g,\overline{F'_\nu})=\iint_B\Big(\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial x}\Big)\frac{\partial\omega_\nu}{\partial x}+\mathrm{i}\Big(\frac{\partial\psi}{\partial y}-\mathrm{i}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big)\frac{\partial\omega_\nu}{\partial y}\Big)\mathrm{d}\omega=$$

$$\iint_B\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\omega_\nu}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\omega_\nu}{\partial y}\Big)\mathrm{d}\omega+\mathrm{i}\iint_B\Big(\frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\omega_\nu}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\omega_\nu}{\partial y}\Big)\mathrm{d}\omega=$$

$$D\{\varphi,\omega_\nu\}+\mathrm{i}D\{\psi,\omega_\nu\} \tag{33}$$

又我们有

$$D\{\varphi,\omega_\nu\}=D\{\psi,\omega_\nu\}=0$$

因而 $\qquad J(g,\overline{F'}_\nu)=0, g\in l^2(B), \nu=1,\cdots,p-1$

这样,为了获得族 $\mathcal{L}^2(B)$ 的一个封闭直交系,我们仅需直交化 $F'_1,\cdots,F'_{p-1}$ 而将其结果附加到函数系 $\{g_\nu(z)\}$.

按照在 ㉝ 中应用的手续,我们得到

$$J(F'_\nu,\overline{F'}_\mu)=D\{\omega_\nu,\omega_\mu\}+\mathrm{i}D\{\overline{\omega}_\nu,\omega_\mu\}$$

依格林定理和柯西-黎曼方程

$$D\{\overline{\omega}_\nu,\omega_\mu\}=-\int_b\omega_\mu\frac{\partial\overline{\omega}_\nu}{\partial n}\mathrm{d}s=\int_b\omega_\mu\frac{\partial\omega_\nu}{\partial s}\mathrm{d}s$$

因为 ω_ν 在 b 的每一组成部分上为常数,故后一表达式为零.所以

$$J(F'_\nu,\overline{F'}_\mu)=D\{\omega_\nu,\omega_\mu\}$$

因此,应用格莱姆-施密特手续于函数 $F'_\nu(z)$ 而得到的直交化常数与相对于迪利克雷积分我们将调和测度 $\omega_1,\cdots,\omega_{p-1}$ 直交化所得到的常数相同.规范直交化的调和测度的核等于

$$\sum_{\nu,\mu=1}^{p-1}C_{\nu\mu}\omega_\nu(z)\omega_\mu(\zeta)$$

因而规范直交化的函数 $F'_\nu(z)$ 的核是

$$\sum_{\nu,\mu=1}^{p-1}C_{\nu\mu}F'_\nu(z)\overline{F'_\mu(\zeta)}$$

由此推出,核函数 $K(z,\overline{\zeta})$ 和 $\widetilde{K}(z,\overline{\zeta})$ 以恒等式

$$K(z,\overline{\zeta})=\widetilde{K}(z,\overline{\zeta})+\sum_{\nu,\mu=1}^{p-1}C_{\nu\mu}F'_\nu(z)\overline{F'_\mu(\zeta)} \tag{34}$$

关联着.结合 ㉜ 及 ㉞,我们得到

$$\frac{\partial^2k(z,\zeta)}{\partial z\partial\overline{\zeta}}=\frac{1}{2}K(z,\overline{\zeta})-\frac{1}{4}\sum_{\nu,\mu=1}^{p-1}C_{\nu\mu}F'_\nu(z)\overline{F'_\mu(\zeta)} \tag{35}$$

在结束这一回时我们愿意指出,除了产生族 $\Lambda^2(B)$ 的规范化以外,引进其他的规范化也可能是有益的,它们在有些情形之下使得我们的结果能够比较容易地表述出来.

设 ζ_0 为 B 之一点.我们引进满足条件

$$D\{\varphi,\varphi\}<\infty$$
$$\varphi(\zeta_0)=0$$

的调和函数族 $\Lambda_0^2(B)$.读者可以没有困难地验证,族 $\Lambda_0^2(B)$ 的核函数 $k_0(z,\zeta)$

以恒等式

$$k_0(z,\zeta) = k(z,\zeta) - k(\zeta,\zeta_0) = k(\zeta,z) - k(\zeta,\zeta_0) \quad ㊱$$

与族 $\Lambda^2(B)$ 的核函数 $k(z,\zeta)$ 联系着. 我们注意, 与 $k(z,\zeta)$ 相反, 核函数 $k_0(z,\zeta)$ 在共形映照下是不变的.

将格林定理通过微分算子

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right), \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

表述出来是有用的. 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 是实变数 x 与 $y(z = x + \mathrm{i}y)$ 的复函数, 它们都在 $B + b$ 上连续且在 B 内具有一级连续偏微商, 则

$$\iint_B f\frac{\partial g}{\partial z}\mathrm{d}\omega = -\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_b fg\,\mathrm{d}\bar{z} = -\iint_B g\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}\omega \quad ㊲_1$$

$$\iint_B f\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\mathrm{i}}\int_b fg\,\mathrm{d}z - \iint_B g\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\mathrm{d}\omega \quad ㊲_2$$

因为这两个公式是等价的, 我们可以仅限于证明 ㊲$_1$.

取 $u = f\cdot g$, ㊲$_1$ 可以写为

$$\iint_B \frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}\omega = -\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_b u\,\mathrm{d}\bar{z}$$

我们来计算上式的左边. 按格林定理

$$\iint_B \frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2}\iint_B\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2}\int_b(u\,\mathrm{d}y + \mathrm{i}u\,\mathrm{d}x) =$$

$$-\frac{1}{2\mathrm{i}}\int u(\mathrm{d}x - \mathrm{i}\mathrm{d}y) = -\frac{1}{2\mathrm{i}}\int u\,\mathrm{d}\bar{z}$$

我们现在将建立 B 的核函数与格林函数之间的关系式

$$K(z,\bar{\zeta}) = -\frac{2}{\pi}\frac{\partial^2 G(z,\zeta)}{\partial z\partial\zeta} \quad ㊳$$

因为在 B 经过共形映照之后, ㊳ 的右边服从与核函数相同的变换规律, 我们只须就解析曲线围成的区域来证明 ㊳. 因为任一单叶有限连通区域可以映照于另一由解析曲线围成的单叶区域. 事实上, 若 $b_1,\cdots,b_p$ 为 b 的组成部分, 我们首先映照 B 的外边界(不妨设为 b_1) 的内部于一圆周的外部. 这个映照将曲线 $b_2,\cdots,b_p$ 映照为曲线 $b'_2,\cdots,b'_p$. 我们现在映照 b'_2 的外部于一圆周的内部. 区域 B 在这两次映照之下的像的边界至少有两个解析的组成部分, 它们就是相应于 b_1 和 b_2 的那两部分. 继续这个步骤, 结果我们得到 B 的一个共形映照, 其像域由解析曲线围成. 因此在证明 ㊳ 时, 不失普遍性. 我们可以假定 B 由解析曲线围成.

考虑积分

$$I(z) = \iint_B \frac{\partial^2 G(z,\zeta)}{\partial z \partial \bar{\zeta}} f(\zeta) \mathrm{d}\omega$$

这里 $f(\zeta)$ 为 $\mathcal{L}^2(B)$ 中任一具有连续边值的函数. 在算子 $\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{\zeta}}$ 作用下,函数 $G(z,\zeta)$ 的奇点消失,因而 $I(z)$ 有意义. 以 B_ε 记从 B 除去小圆 $|\zeta - z| < \varepsilon$ 后所得的区域,而以 b_ε 记其边界. 由 ㊲$_2$,我们有

$$I(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{B_\varepsilon} \frac{\partial^2 G(z,\zeta)}{\partial z \partial \bar{\zeta}} f(\zeta) \mathrm{d}\omega =$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{1}{2\mathrm{i}} \int_{B_\varepsilon} \frac{\partial G(z,\zeta)}{\partial z} f(\zeta) \mathrm{d}\zeta - \iint_{B_\varepsilon} \frac{\partial G(z,\zeta)}{\partial z} \cdot \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \mathrm{d}\omega \right)$$

因为 B 的边界 b 系由解析曲线组成,且 $G(z,\zeta)$ 在 b 上为零, $G(z,\zeta)$ 在 b 上调和,因而在该处具有各级微商. 因此,在计算 $I(z)$ 时应用 ㊲$_2$ 是合法的. 因为 $\frac{\partial f(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}}$ 按柯西 - 黎曼方程等于零. 我们求得

$$I(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{1}{2\mathrm{i}} \int_b \frac{\partial G(z,\zeta)}{\partial z} f(\zeta) \mathrm{d}\zeta - \right.$$

$$\left. \frac{1}{2\mathrm{i}} \int_{|\zeta - z| = \varepsilon} f(\zeta) \left(\frac{1}{2(\zeta - z)} + H(z,\zeta) \right) \mathrm{d}\zeta \right)$$

这里 $H(z,\zeta)$ 为一有界函数. 因为

$$G(z,\zeta) = 0, \zeta \in b, z \in B$$

我们有

$$\frac{\partial G(z,\zeta)}{\partial z} = 0, \zeta \in b$$

因此

$$\int_b \frac{\partial G(z,\zeta)}{\partial z} f(\zeta) \mathrm{d}\zeta$$

等于零. 这样

$$I(z) = \iint_B \frac{\partial^2 G(z,\zeta)}{\partial z \partial \bar{\zeta}} f(\zeta) \mathrm{d}\omega = -\frac{\pi}{2} f(z)$$

这指明了

$$-\frac{2}{\pi} \frac{\partial^2 G(z,\zeta)}{\partial z \partial \bar{\zeta}}$$

相对于函数 $f(z) \in \mathcal{L}^2(B)$ 具有核函数的再生性质. 现在可得出恒等式 ㊳. 因为 ㉟ $f(\zeta) = K(\zeta, \bar{t})$ 在 b 上连续,而我们有

$$\iint_B \left(-\frac{2}{\pi} \frac{\partial^2 G(\zeta, z)}{\partial \zeta \partial \bar{z}} \right) K(\zeta, \bar{t}) \mathrm{d}\omega = K(z, \bar{t})$$

另一方面,由 $K(z, \bar{t})$ 的再生性质

$$\iint_B K(t,\tilde{\zeta})\left(-\frac{2}{\pi}\overline{\frac{\partial^2 G(\zeta,z)}{\partial\zeta\partial\overline{z}}}\right)d\omega = -\frac{2}{\pi}\frac{\partial^2 G(t,z)}{\partial t\partial\overline{z}}$$

但显然

$$\iint_B \left(-\frac{2}{\pi}\overline{\frac{\partial^2 G(z,\zeta)}{\partial z\partial\overline{\zeta}}}\right)\overline{K(\zeta,\overline{t})}d\omega = \iint_B K(t,\overline{\zeta})\left(-\frac{2}{\pi}\frac{\partial^2 G(\xi,z)}{\partial\xi\partial\overline{z}}\right)d\omega$$

因而
$$k(z,\overline{t}) = -\frac{2}{\pi}\overline{\frac{\partial^2 G(t,z)}{\partial t\partial\overline{z}}} = -\frac{2}{\pi}\frac{\partial^2 G(z,t)}{\partial z\partial\overline{t}}$$

对于族 $l^2(B)$ 的核函数可获得一类似的公式.事实上,将 ㊳ 代入 ㉟,我们有

$$\frac{\partial^2 k(z,\zeta)}{\partial z\partial\overline{\zeta}} = -\frac{1}{\pi}\frac{\partial^2 G(z,\zeta)}{\partial z\partial\overline{\zeta}} - \frac{1}{4}\sum_{\nu,\mu=1}^{g-1} C_{\nu\mu}F'_\nu(z)\overline{F'_\mu(\zeta)}$$

与 ⑱ 相结合,给出

$$\frac{2}{\pi}\frac{\partial^2 G(z,\zeta)}{\partial z\partial\overline{\zeta}} + \frac{2}{\pi}\frac{\partial^2 N(z,\zeta)}{\partial z\partial\overline{\zeta}} + \sum_{\mu,\nu=1}^{g-1} C_{\nu\mu}F'_\nu(z)\overline{F'_\mu(\zeta)} = 0 \qquad ㊴$$

再一次应用 ㊳ 及 ㉞,我们最后得到

$$\widetilde{K}(z,\overline{\zeta}) = \frac{2}{\pi}\frac{\partial^2 N(z,\zeta)}{\partial z\partial\overline{\zeta}} \qquad ㊵$$

作为 ㊳ 的一个应用,我们来证明公式

$$F'_\nu(z) = \mathrm{i}\int_{b_\nu} K(z,\overline{\zeta})d\overline{\zeta} \qquad ㊶$$

由 ⑦,我们有

$$\omega_\nu(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{b_\nu}\frac{\partial G(z,\zeta)}{\partial n_\zeta}ds_\zeta$$

由于在 ㉘ 的推导中用过的一个变换,我们亦可写成

$$\omega_\nu(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{b_\nu}\frac{\partial G(z,\zeta)}{\partial\overline{\zeta}}d\overline{\zeta}$$

施行运算$\frac{\partial}{\partial z}$,我们获得 ㊶.

为了参考的方便,我们将本回的主要结果汇集如下:

在 B 的各种区域函数中,我们有公式

$$k_B(z,\zeta) = (2\pi)^{-1}(N(z,\zeta) - G(z,\zeta)) \qquad ⑱$$

$$K_B(z,\overline{\zeta}) = -\frac{2}{\pi}\frac{\partial^2 G(z,\zeta)}{\partial z\partial\overline{\zeta}} \qquad ㊳$$

$$\widetilde{K}_B(z,\overline{\zeta}) = \frac{2}{\pi}\frac{\partial^2 N(z,\zeta)}{\partial z\partial\overline{\zeta}} \qquad ㊵$$

$$F'_\nu(z) = \mathrm{i}\int_{b_\nu} K_B(z,\overline{\zeta})d\overline{\zeta} \qquad ㊶$$

$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{\partial^2 N(z,\zeta)}{\partial z \partial \zeta} - \frac{\partial^2 G(z,\zeta)}{\partial z \partial \zeta}\right) = \sum_{\mu,\nu=1}^{p-1} C_{\nu\mu} F'_\nu(z) F'_\mu(\zeta) \quad (31)$$

$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{\partial^2 N(z,\zeta)}{\partial z \partial \bar{\zeta}} + \frac{\partial^2 G(z,\zeta)}{\partial z \partial \bar{\zeta}}\right) = -\sum_{\mu,\nu=1}^{p-1} C_{\nu\mu} F'_\nu(z) \overline{F'_\mu(\zeta)} \quad (39)$$

第五十七回　陆慕镇　携手怀斯写专著①
涉猎广　半单李群韦尔房

设 G 为一紧拓扑群，具有双不变的哈尔测度 σ，使 $\sigma(G)=1$. 由彼得－外尔定理，有以下正交分解

$$L^2(G)=\oplus\sum_{\lambda\in\Lambda}W_\lambda$$

其中 W_λ 为 $L^2(G)$ 的最小非平凡双不变子空间，以及 Λ 为 G 的不可约酉表示的等价类. $L^2(G)$ 在 W_λ 上的投影 P_λ 由

$$P_\lambda(f)=d_\lambda\cdot(\chi_\lambda * f)$$

所决定，其中 d_λ 和 χ_λ 分别是 λ 类中表示的维数和特征，以及

$$(\chi_\lambda * f)(x)=\int_G\chi_\lambda(y^{-1}x)f(y)\mathrm{d}\sigma(y)$$

于是，我们有傅里叶展开

$$f=\sum_{\lambda\in\Lambda}P_\lambda f=\sum_{\lambda\in\Lambda}\lambda\cdot(\chi_\lambda * f),f\in L^2(G)\qquad ①$$

其中级数在 $L^2(G)$ 中收敛. 由于 χ_λ 为有界，故我们可对任一可积函数 f 构造这样的级数.

为研究这样的级数的收敛和求和，我们首先必须确定如何对级数中的项进行编序，其次是计算维数和特征，为了做这项工作，需要 G 的更多的构造. 从现在起，我们假设 G 为一紧连通的李群，为此，先简单地考虑一下阿贝尔情形，即此时 G 为环群 T^n. 特征为

$$\chi_m(x)=\exp(2\pi i m\cdot x),x\in T^n,m\in Z^n$$

博赫纳（Bochner, Salomen, 1899—1982），德国－美国数学家. 生于克拉科夫附近的波德戈尔齐，卒于美国休斯敦.

现在，对于一切同平移可交换的 $L^2(G)$ 上的线性算子，彼得－外尔分解便是 $L^2(G)$ 的同时特征空间分解，一个很特殊的这类算子就是拉普拉斯算子 Δ，而特征 x_m 构成了特征值问题 $\Delta u=-cu$ 的解的完全系. 特征函数 x_m 的特征值为 $4\pi^2|m|^2$. 还有，用博赫纳的话来说，"根据拉普拉斯特征值的大小，将级数 $\sum_m(x_m * f)$ 写成 $\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{|m|^2=j}(x_m * f)$ 的形式符合给级数的项编序的最自然的原理."

紧连通李群的结构理论可使我们将同一自然原理运用于较一般的情形. 此外，结构理论的完成、Weyl 特征，以及维数公式能使分析学家得到特征和维数

① 本回引自文献[129].

的估计.

设 G 为一 n 维紧连通半单李群,T 为 G 的一固定极大环群,$\dim T = \operatorname{rank} G = k$. 记 W 为 G 的 Weyl 群,即 $W = N/T$,其中 N 为 T 在 G 中的正规化子,W 通过共轭作用在 T 上,G 之特征对 T 的限制恰是 T 的 W 不变特征. 因此,在等价意义下 G 的表示由其特征对 T 的限制所决定. 用 $\operatorname{Irr}(G,T)$ 来记 G 的不可约特征对 T 的限制的集合. 作为集合,$\operatorname{Irr}(G,T)$ 恒同于 Λ.

记 g 和 t 分别是 G 和 T 的李代数. G 在 $GL(g)$ 上的伴随表示 Ad 描述了 G 中共轭的无穷小结构,并且它对 T 的限制在人们研究 T 上 W 不变函数时起关键的角色,基灵形式加一负号为 g 上 Ad 不变内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 的典型选择,这样可使 Ad 对 g 的复化的扩充是酉的. Ad 的非平凡权称为 G 的整体根. 这就是说,$\theta: T \to U(1)$,$\theta \neq 1$,为一整体根,如果集合

$$\{X \in g \mid Ad(t) \cdot X = \theta(t) \cdot X, \forall t \in T\}$$

为非平凡的,用 R 来记 G 的所有的根. 这是所有如下 $\alpha \in t^* \setminus \{0\}$ 的集合,对这样的 α,$2\pi i\alpha: t \to u(l)$ 为 Ad 的一无穷小权,此即为 G 的一整体根的微分. 因此,$\alpha \in t^* \setminus \{0\}$ 为一 G 的根是指集合

$$\{X \in g \mid [H, X] = 2\pi i\alpha(H) \cdot X, \forall H \in t\}$$

为非平凡的,我们利用自然同构

$$t^* \to t, \lambda \to H_\lambda, \text{其中 } \lambda(H) = \langle H_\lambda, H\rangle, H \in t$$

来将 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 转移到 t^* 上

$$\langle\lambda, \tau\rangle = \langle H_\lambda, H_\tau\rangle, \lambda, \tau \in t^*$$

基灵(Killing, Wilhelm Karl Joseph, 1847—1923),德国数学家. 明斯特的大学教授.

W 作用在 T 上自然诱导 W 在 t 上的作用,并且内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 对 t 的限制是 W 不变的,W 可理解为 $O(t)$ 的子群,后者是由关于超平面 $\operatorname{Ker}\alpha\ (\alpha \in \mathbf{R})$ 的对称性产生的. 这些超平面将 t 分成有限多个凸域,通称为 Weyl 房. 给定一 Weyl 房 t^+,并定义相应的正根为

$$\mathbf{R}_+ = \{\alpha \in \mathbf{R} \mid \alpha(H) > 0, \forall H \in t^+\}$$

指数映射($\exp: t \to T$) 的核称为整格,由 I 标记,且

$$I^* = \{\alpha \in t^* \mid \alpha(I) \subset \mathbf{Z}\}$$

为整形式的格,于是,有 $R \subset I^*$. 正根的半和由 ρ 标记,它在 Weyl 公式中起重要的作用. 对 $\lambda \in t^*$,定义 λ 的交错和 $A(\lambda): t \to C$ 为

$$A(\lambda)(H) = \sum_{w \in W} \det(w) \cdot \exp(2\pi i\lambda(\omega \cdot H)), H \in t$$

其中 $\det(w)$ 为 w 作为 $O(t)$ 之元素的行列式,故 $\det(w) = 1$ 或 -1.

Weyl 分母为函数 $D(t \to C)$

$$D(H) = \prod_{\alpha \in R_+} (\exp(\pi i\alpha(H)) - \exp(-\pi i\alpha(H))) =$$

$$\prod_{\alpha \in R_+} 2\mathrm{i}\sin \pi\alpha(H), H \in t$$

D 为 ρ 的交错和，即 $D = A(\rho)$. 由 $|D|^2 = E \circ \exp$ 所定义的函数 $E(T \to C)$ 出现在 Weyl 积分公式中

$$\int_G f(x)\mathrm{d}\sigma(x) = (\mathrm{card}\ W)^{-1}\int_T f(t) \cdot E(t)\mathrm{d}w(t)$$

后者对 G 的中心函数 f 成立. 这里，w 为 T 上的规范哈尔(Haar)测度.

如果 $\lambda \in I^* \subset t^*$，则函数 $c(\lambda + \rho) = \dfrac{A(\lambda + \rho)}{D}$(首先当 $D(H) \neq 0$ 时有定义)对整个 t 有唯一的连续扩充；以

$$c(\lambda + \rho) = C(\lambda + \rho) \circ \exp$$

所确定的函数 $c(\lambda + \rho)(T \to C)$ 是有定义的. 如果 $\lambda \in I^* \cap \overline{t^+}$，也即若 $\langle \lambda, \alpha \rangle \geqslant 0$，则 $c(\lambda + \rho) \in \mathrm{Irr}(G, T)$，也即 λ 为 G 的一不可约特征 x_λ 对 T 的限制. 所对应的表示的维数是

$$d_\lambda = \prod_{\alpha \in R_+} \frac{\langle \alpha, \lambda + \rho \rangle}{\langle \alpha, \rho \rangle}$$

映射 $\lambda \to c(\lambda + \rho)$ 为 $I^* \cap \overline{t^+}$ 与 $\mathrm{Irr}(G, T)$ 之间的一双射对应. 作为集合，可以将 $I^* \cap \overline{t^+}$ 恒同于 Λ.

现在，我们在 G 上将 Λ 同拉普拉斯算子联系起来，记 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为 g 关于所取的 Ad 不变内积的一正交基. 我们构成二阶左不变微分算子

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

它也是右不变的. Δ 不依赖于基 $\{X_i\}$ 的选择，我们称 Δ 为 G 上的拉普拉斯算子(对于由 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 诱导的 G 上的黎曼结构，Δ 为拉普拉斯 - 贝尔特拉米算子). 如果 x_λ 是对应于 $\lambda \in I^* \cap \overline{t^+}$ 的不可约表示的特征，则它为 Δ 的一特征函数

$$\Delta x_\lambda = -(\langle \lambda + \rho, \lambda + \rho \rangle - \langle \rho, \rho \rangle) \cdot x_\lambda = -\mu_\lambda \cdot x_\lambda$$

由于 $I^* \cap \overline{t^+}$ 为一有限维格的一部分，故值 $\mu_\lambda(\lambda \in I^* \cap \overline{t^+})$ 构成 R^+ 中一离散集. 因此，以 μ_λ 的增值来给级数 ① 的项编序后，就满足了依拉普拉斯算子特征值大小来编序的自然原理.

第五十八回　限制严　实际问题难满足
欲放宽　广义迪氏问题代

在应用中，边界值 $u(\zeta)$ 是连续的这个条件，是限制过严了，所以需要考虑广义迪利克雷问题：

设已经在区域 D 的边界 C 上给出了一个函数 $u(\zeta)$，它除了在有限多个点 $\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n$ 处有第一类间断点外，是处处连续的，要求找出一个在区域 D 内的有界调和函数 $u(z)$，使它在函数 $u(\zeta)$ 的所有连续点处都取值 $u(\zeta)$. ①

广义迪利克雷问题的解的唯一性定理可表为：

定理 1　在给定的区域 D 内，当边界函数 $u(\zeta)$ 已知时，只能有广义迪利克雷问题的一个解存在.

广义迪利克雷问题的解可以用一种方法来化成通常的迪利克雷问题的解. 为了简单起见，我们只限于讨论单连通区域的情形. 当 ζ 沿着 D 的边界 C 按正方向与按负方向趋于点 ζ_k 时，边界函数 $u(\zeta)$ 的极限值，我们分别记作 $u^-(\zeta_k)$ 与 $u^+(\zeta_k)$. 用

$$h_k = u^+(\zeta_k) - u^-(\zeta_k)$$

来表示 $u(\zeta)$ 在点 ζ_k 处的跃距. 为了一致起见，我们假设 ζ_k 是周线 C 的角点. 并用 φ_k^- 与 φ_k^+ 来表示路线 C 在点 ζ_k 处的左切线与右切线同 x 轴之间所成的角度（图 1）. 再设

$$\alpha_k = \varphi_k^+ - \varphi_k^-$$

（如果 ζ_k 不是一个角点，则 $\alpha_k = -\pi$）. 我们来考虑函数

$$u_k(z) = \frac{h_k}{\alpha_k}\arg(z-\zeta_k)$$

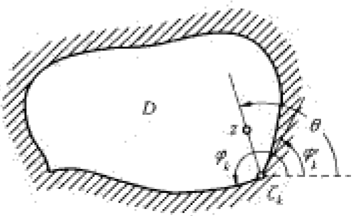


图 1

其中的 arg 表示辐角的一个适当选择出来的分支. 显然，这函数是在 D 内的调和函数，并且在 $\overline{D}$ 内除了点 $\zeta=\zeta_k$ 处以外是处处连续的. 如果 z 沿着一条其在点 ζ_k 处的切线同 x 轴形成角 θ（θ 的值包含在 φ_k^- 与 φ_k^+ 之间）的路线趋于 ζ_k，那以这个函数 $u_k(z)$ 便趋于极限 $\frac{h_k}{\alpha_k}\theta$. 因此，当 ζ 沿着曲线

---

① 如果所给的函数 $u(\zeta)$ 是连续的，那么广义迪利克雷问题便同通常的迪利克雷问题相符合，因为，函数 $u(z)$ 是有界的这个条件，可以由 $u(z)$ 在 $\overline{D}$ 内是连续的这条件自动得出.

C 按正方向经过点 ζ_k 时，函数 $u_k(\zeta)$ 便经历一个跃距 $\frac{h_k}{\alpha_k}\varphi_k^+ - \frac{h_k}{\alpha_k}\varphi_k^- = h_k$.

现在设 $u(z)$ 是广义迪利克雷问题当边界值 $u(\zeta)$ 已知时的一个解. 我们来考虑函数

$$U(z) = u(z) - \sum_{k=1}^{n} \frac{h_k}{\alpha_k}\arg(z - \zeta_k) \qquad ②$$

它在区域 D 内是个调和函数，并且在 $\overline{D}$ 内是连续的. 事实上，$u(z)$ 和所有函数

$$u_k(z) = \frac{h_k}{\alpha_k}\arg(z - \zeta_k)$$

在 D 内都是调和函数. 从而，当 $z \to \zeta \neq \zeta_k$ 时，$U(z)$ 的极限值等于

$$U(\zeta) = u(\zeta) - \sum_{k=1}^{n} u_k(\zeta) \qquad ③$$

而且函数 $U(\zeta)$ 当经过每一个点 ζ_k 时也仍旧是连续的，因为在构成 $U(\zeta)$ 时，我们已经从在点 ζ_k 处有跃距 h_k 的那个函数 $u(\zeta)$ 中，减去了在这个点处有同一跃距的一个函数 $u_k(\zeta)$，而 ③ 的和式中其余的那些项在这个点处都是连续的.

因此，在实际上，广义迪利克雷问题的解 $u(z)$，可以表示成一个具有连续边界值 $U(\zeta) = u(\zeta) - \sum_{k=1}^{n} u_k(\zeta)$ 的迪利克雷问题的解 $U(z)$ 与函数 $\sum_{k=1}^{n} u_k(z)$ 的和，即

$$u(z) = U(z) + \sum_{k=1}^{n} \frac{h_k}{\alpha_k}\arg(z - \zeta_k) \qquad ④$$

根据定理 1，所求得的解是唯一的.

由式 ④ 可以得出下面这个说明广义迪利克雷问题的解在点 ζ_k 的邻域内性状的定理.

定理 2 当 z 沿着各种不同的路线趋近边界函数 $u(\zeta)$ 的间断点 ζ_k 时，广义迪利克雷问题的解 $u(z)$ 可以趋于在 $u^-(\zeta_k)$ 与 $u^+(\zeta_k)$ 之间的任何一个极限.

实际上，设 z 沿着一条路线趋于 ζ_k，而这条路线在点 ζ_k 处的切线同 x 轴形成角 θ，由公式 ④ 可以得出，这时 $u(z)$ 趋于极限

$$u_0(\zeta_k) = \widetilde{u}(\zeta_k) + \frac{h_k}{\alpha_k}\theta \qquad ⑤$$

其中 $\widetilde{u}(\zeta_k)$ 是当 $v \neq k$ 时所有函数 $u_v(z)$ 与 $U(z)$ 的和的极限值，这极限值同 z 趋于点 ζ_k 的方式无关. 特别是，当 z 沿着曲线 C 按负方向趋于点 ζ_k 时，我们有

$$u^+(\zeta_k) = \widetilde{u}(\zeta_k) + \frac{h_k}{\alpha_k}\varphi_k^+$$

所以式 ⑤ 可以改写成

$$u_0(\zeta_k) = u'(\zeta_k) + \frac{h_k}{\alpha_k}(\theta - \varphi'_k)$$

的形状.由此便得出定理 2 的结论.

我们转到对于任意一个单连区域 D 的迪利克雷问题的求解上.首先我们来考虑 D 是单位圆 $|z| < 1$ 时的情形.在这种情况下问题的求解要以下面的引理为基础.

引理 设有实函数 $U(z,\zeta)$,其中

$$z = re^{i\varphi}, \zeta = e^{it}, 0 \leqslant r < 1, 0 \leqslant \varphi, t < 2\pi$$

这实函数 $U(z,\zeta)$

(1) 是非负连续函数;

(2) 对于任何一个 z 都有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(z,\zeta)\mathrm{d}t = 1 \quad ⑥$$

(3) 当 $z \to \zeta_0 = e^{it_0}$(ζ_0 是单位圆周上的任意一个点)而且 $\zeta \neq \zeta_0$ 时,函数 $U(z,\zeta)$ 趋于 0,并且关于 ζ 是一致的.①

那么对于任何一个具有第一类间断点的逐段连续的实函数 $u(\zeta)$,在它的每一个连续点 ζ_0 处,都存在极限

$$\lim_{z\to\zeta_0} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\zeta)U(z,\zeta)\mathrm{d}t = u(\zeta_0) \quad ⑦$$

要证明这个引理,我们首先利用条件(2),把式 ⑦ 左端中的积分同它的假定的极限之间的差表示成

$$\Delta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(u(\zeta) - u(\zeta_0))U(z,\zeta)\mathrm{d}t$$

给定任意一个正数 $\varepsilon > 0$,利用 $u(\zeta)$ 在点 ζ_0 处的连续性,总可以选取一个 $\delta > 0$,使得当 $|t - t_0| < 2\delta$ 时,都有

$$|u(\zeta) - u(\zeta_0)| < \varepsilon$$

(图 2).于是我们有

$$\Delta = \frac{1}{2\pi}\int_{|t-t_0|<2\delta} + \frac{1}{2\pi}\int_{|t-t_0|\geqslant 2\delta}$$

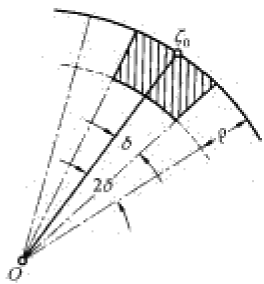


图 2

式中的那两个积分是沿着单位圆周上的两段弧来取的,在这两段弧上的点的辐角,分别满足其所相应的不等式.

---

① 条件(3)的确切意义如下:对于任何一个 $\varepsilon > 0$,我们总可以找到两个数 $\rho < 1$ 及 $\delta > 0$,使得在 $r > 1 - \rho$ 和 $|\varphi - t_0| < \delta$ 时,对于一切满足不等式 $|t - t_0| > 2\delta$ 的 t 来说,不等式

$$0 \leqslant U(z,\zeta) < \varepsilon$$

都必定成立.

对于其中的第一个积分，应用数学分析中所熟知的中值定理，然后再利用条件(1)与(2)，我们便得出

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{|t-t_0|<2\delta}(u(\zeta)-u(\zeta_0))U(z,\zeta)\mathrm{d}t\right|<\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{|t-t_0|<2\delta}U(z,\zeta)\mathrm{d}t<$$

$$\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}U(z,\zeta)\mathrm{d}t=\varepsilon \qquad ⑧$$

现在设 $|\varphi-t_0|<\delta$，于是对于区间 $|t-t_0|>2\delta$ 中所有的 t 值，我们有 $|\varphi-t|>\delta$，并且根据条件(3)，总可以找到一个正数 $\rho<1$，使得对所有这样的 t 以及 $r>1-\rho$ 来说，不等式 $U(z,\zeta)<\varepsilon$ 都成立．因此，对于在图 2 中用斜线标出的那个区域（即 $|\varphi-t_0|<\delta, r>1-\rho$）内所有的 z 来说，都将有

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{|t-t_0|>2\delta}(u(\zeta)-u(\zeta_0))U(z,\zeta)\mathrm{d}t\right|<\frac{\varepsilon}{2\pi}\cdot 2M(2\pi-2\delta)<2\varepsilon M \qquad ⑨$$

其中的 M 是 $|u(\zeta)|$ 在圆周上的最大值．把所得的这两个不等式⑧与⑨联合起来，我们便得出：对于图 2 中用斜线标出的那个区域内所有的 z 来说，都有 $|\Delta|\leqslant(1+2M)\varepsilon$，所以引理便已经证明了．

我们转到对于圆的迪利克雷问题的可解性上来，为此，我们注意，引理中的那个函数 $U(z,\zeta)$，可以由几何方法得到——将它看成是把圆 $|z|<1$ 映到右半平面 $\mathrm{Re}\, w>0$ 上去的共形映射的实数部分

$$U(z,\zeta)=\mathrm{Re}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}=\frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2}=\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\varphi)+r^2} \qquad ⑩$$

事实上，对于这个函数来说，引理中的性质(1)与(3)显然成立，而性质(2)则可以由区分出等式

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\zeta|=1}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\cdot\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}=1$$

的实数部分而得到，这等式很容易根据留数定理来证明（函数 $\frac{\zeta+z}{(\zeta-z)\zeta}$ 当 $z\neq 0$ 时在单位圆内有两个极点：具有留数 -1 的 $\zeta=0$ 与具有留数 2 的 $\zeta=z$；当 $z=0$ 时等式自然得出）．

现在已经不难证明：泊松给出了对于单位圆的广义迪利克雷问题的解

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\cdot\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\varphi)+r^2}\mathrm{d}t, z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \qquad ⑪$$

事实上，由积分⑪所定出的那个函数 $u(z)$，是函数

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\mathrm{d}t+\mathrm{i}C \quad ,\zeta=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \qquad ⑫$$

的实数部分．则函数 $f(z)$ 在单位圆内是解析的，所以，$u(z)$ 在单位圆内是个调和函数．它是有界的，因为，由式⑪可以得出

$$|u(z)| \leqslant \frac{M}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\varphi)+r^2}\mathrm{d}t = M$$

其中 M 是 $|u(\zeta)|$ 在单位圆周上的最大值(我们利用了函数 ⑩ 的性质(2)). 最后,根据上面的引理,当 z 趋于 $u(\zeta)$ 的任何一个连续点 ζ 时,函数 $u(z)$ 趋于 $u(\zeta)$. 这便是我们所需要证明的.

现在不难证明,对于任意的单连通区域,广义迪利克雷问题也是可以解的.

定理 3 对于任何一个单连通区域 D,与任何一个具有第一类间断点的逐段连续的边界函数 $u(\zeta)$,广义迪利克雷问题的解都存在.

事实上,必定有一个把区域 D 映到单位圆 $|w|<1$ 上去的共形映射 $w = w(z)$ 存在. 在 D 的边界上给出逐段连续的那些值 $u(\zeta)$,在这映射下被变换成在单位圆周上逐段连续的值

$$u(z(\omega)) = U(\omega)$$

其中函数 $z = z(w)$ 是 $w = w(z)$ 的反函数. 依据这些边界值,可以借助泊松积分 ⑪ 来构成一个在圆 $|w|<1$ 内的调和函数 $U(w)$. 于是,函数

$$u(z) = U(w(z)) \tag{13}$$

是一个在区域 D 内的调和函数. 它同 $U(w)$ 一样是有界的,并且,当 z 趋于所给函数 $u(\zeta)$ 的一个连续点 ζ 时,它趋于值 $u(\zeta) = U(w(\zeta))$,因为这时点 $w = w(z)$ 趋于函数 $U(\omega)$ 的连续点 $\omega = w(\zeta)$. 因此,函数 ⑬ 给出了对于区域 D 的广义迪利克雷问题的解答. 定理 3 已经证明了.

如果区域 D 的边界 C 没有无穷远分支,并且还具有连续的曲率的话,那么广义迪利克雷问题的解,便可以用一个独自的公式来表达. 为了要得出这个公式,我们固定区域 D 内的任意一个点 z_0,并且用

$$w = f(z;z_0),\ f(z_0;z_0) = 0 \tag{14}$$

来表示把 D 映射到单位圆 $|w|<1$ 上去的那个函数. 同在证明定理 3 时一样,当变换到 w 平面上来之后,我们便可以利用泊松积分来表达出迪利克雷问题的解. 就特例来讲,仍旧沿用那个证明中所引入的那些记号,在圆心 $w=0$ 处我们得到

$$U(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\omega)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{|\omega|=1} U(\omega)\mathrm{d}\sigma \tag{15}$$

其中 $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}$,又 $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}\tau$ 是圆周 $|\omega| = 1$ 的弧长单元.

在我们的这些条件之下,函数 ⑭ 在边界上具有连续导数,因此

$$\mathrm{d}\sigma = |f'(\zeta;z_0)|\mathrm{d}s$$

其中 $\mathrm{d}s$ 是 C 的对应于 $\mathrm{d}\sigma$ 的弧长单元. 我们用 $\mathrm{d}n$ 来表示 C 的内法线的长度单元,用 $-\mathrm{d}\rho$ 来表示圆周 $|\omega| = 1$ 的半径的对应于 $\mathrm{d}n$ 的长度单元,于是有

$$|f'(\zeta;z_0)|\mathrm{d}n = -\mathrm{d}\rho$$

因为在 C 上 $\rho = |f(\zeta;z_0)| = 1$，所以可以写成 $\mathrm{d}\rho = \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = \mathrm{d}\ln\rho$ 和

$$|f'(\zeta;z_0)| = -\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\boldsymbol{n}} = -\frac{\mathrm{d}\ln\rho}{\mathrm{d}\boldsymbol{n}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\ln\frac{1}{\rho}$$

其中 $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}$ 表示按照 C 的内法线方向所取的导数. 把这式子代入前面所得到的 $\mathrm{d}\sigma$ 的表达式中去，我们便得出

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\ln\frac{1}{|f(\zeta;z_0)|}\mathrm{d}s \tag{⑯}$$

现在就剩下要在式 ⑮ 中返回到变量 z 上去了. 考虑到式 ⑭ 的规定，对应于点 $w = 0$ 的是点 z_0，再利用关系式 ⑯，我们便得到

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_C u(\zeta)\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\ln\frac{1}{|f(\zeta;z_0)|}\mathrm{d}s \tag{⑰}$$

函数

$$g(z;z_0) = \ln\frac{1}{|f(z;z_0)|} \tag{⑱}$$

称做对于区域 D 的格林函数，显然，这函数在 D 内除掉点 z_0 处以外是处处调和的，在点 z_0 处它有一个极点. 把这个函数引入式 ⑰，并且把 z_0 换成 z，我们便得出了所要找的广义迪利克雷问题的解的公式

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_C u(\zeta)\frac{\partial g(\zeta;z)}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s \tag{⑲}$$

（$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}$ 是沿着内法线方向所取的导数）.

格林公式把对某一个区域 D 的迪利克雷问题的解，通过把 D 共形映射到单位圆上去的一个函数的对数来表达，也就是说，它把解迪利克雷问题化成共形映射的问题. 反过来也可以证明：如果已经知道了对某一个区域 D 的迪利克雷问题的解，便可以构造一个把这区域映到单位圆上去的共形映射.

事实上，根据基本定理，这样的一个映射 $w = f(z;z_0)$，$f(z_0;z_0) = 0$ 必定存在. 先姑且假定我们已知道了这个映射，而考虑函数

$$F(z) = \frac{f(z;z_0)}{z - z_0}, F(z_0) = \lim_{z\to z_0}\frac{f(z;z_0)}{z - z_0} = f'(z_0;z_0)$$

显然，这函数在区域 D 内是解析的，并且处处都不等于0（函数 $f(z;z_0)$ 只有 $z = z_0$ 时方等于 0，但由于映射是共形的，$f'(z_0;z_0) \neq 0$）. 所以，函数 $U(z) = \ln|F(z)|$ 在 D 内是个调和函数，它在区域 D 的边界 C 上的值

$$U(\zeta) = \ln\left|\frac{f(\zeta;z_0)}{\zeta - z_0}\right| = \ln\frac{1}{|\zeta - z_0|}$$

与函数 $f(z;z_0)$ 的形状无关，因为在 C 上 $|f(\zeta;z_0)| = 1$.

现在假设，函数 $f(z;z_0)$ 是未知的. 根据已给出的调和函数的边界值 $U(\zeta)$，我们可以唯一地重新恢复 $U(z)$ 在 D 内部的值(迪利克雷问题). 然后，我们再借助积分法来建立其共轭的调和函数 $V(z)$，求出它可以精确到相差一个常数项 α. 这样，我们便求得函数

$$\ln G(z) = U(z) + \mathrm{i}V(z) + \mathrm{i}\alpha$$

随后可以得出所求的共形映射

$$f(z;z_0) = (z - z_0)\mathrm{e}^{G(z)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(z - z_0)\mathrm{e}^{U(z)+\mathrm{i}V(z)} \qquad ②$$

这个映射的确定可以精确到作一次任意旋转，这正与所取的规定条件相等.

因此，把一个区域映到单位圆上去的共形映射的问题，与对这同一区域的迪利克雷问题是等价的；它们可以借助简单的微分和积分运算彼此转化.

把一个区域 D 映到带形 $0 < v < 1$ 上去的映射

$$w = f(z), f(z_1) = -\infty, f(z_2) = 0, f(z_3) = \infty$$

的问题，还可以更简单地化成广义迪利克雷问题. 我们先按照下述边值条件来求出一个调和函数 $v(z)$：在 D 的边界 C 的弧 $z_1z_2z_3$ 上 $v(\zeta) = 0$，而在 C 的其他部分上 $v(\zeta) = 1$. 然后求出一个与它共轭的调和函数 $u(z)$，使其满足条件 $u(z_2) = 0$. 函数

$$f(z) = u(z) + \mathrm{i}v(z)$$

便是所求的那个映射.

几何篇

第十章

第五十九回　多角度　不同形式难易殊[①]
球坐标　特殊函数应用广

从图 1 即知球坐标(γ,θ,φ)与直角坐标(x,y,z)的关系为

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, y = r\sin\theta\sin\varphi, z = r\cos\theta \qquad ①$$

为了对

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad ②$$

作变换 ①，可以把 ① 看做是变换

$$x = \rho\cos\tau, y = \rho\sin\tau, z = t \qquad ③$$

及变换

$$t = r\cos\theta, \rho = r\sin\theta, \tau = \varphi \qquad ④$$

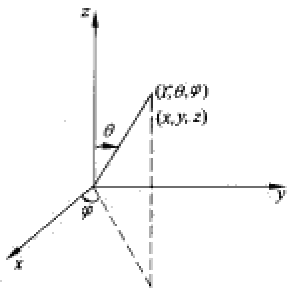


图 1

复合而成. 变换 ③ 把(x,y,z)变为(ρ,τ,t)，这时 z 变为 t 是一个恒等变换，而(x,y)变为(ρ,τ)是平面上的极坐标变换. 从 ③ 知

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{\partial u \partial x}{\partial x \partial \rho} + \frac{\partial u \partial y}{\partial y \partial \rho} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\tau + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\tau$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial \tau} = \rho\left(-\frac{\partial u}{\partial x}\sin\tau + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\tau\right)$$

① 本回引自文献[20].

从此求得

$$\cos\tau\frac{\partial u}{\partial\rho}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos^2\tau+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\tau\cos\tau$$

$$\frac{\sin\tau}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial\tau}=-\frac{\partial u}{\partial x}\sin^2\tau+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\tau\sin\tau$$

二者相减可得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=(\cos\tau\frac{\partial}{\partial\rho}-\frac{\sin\tau}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial\tau})u \qquad ⑤$$

完全类似地可以求得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=(\sin\tau\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{\cos\tau}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial\tau})u \qquad ⑥$$

利用 ⑤,⑥ 可以求得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=(\cos\tau\frac{\partial}{\partial\rho}-\frac{\sin\tau}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial\tau})(\cos\tau\frac{\partial}{\partial\rho}-\frac{\sin\tau}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial\tau})u=$$
$$\cos^2\tau\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\cos\tau\sin\tau\frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial\tau}-\frac{\sin\tau}{\rho}\cos\tau\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\tau}+$$
$$\frac{\sin^2\tau}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial\rho}-\frac{\sin\tau\cos\tau}{\rho}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\tau}+\frac{\sin\tau\cos\tau}{\rho^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial\tau}+$$
$$\frac{\sin^2\tau}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(\sin\tau\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{\cos\tau}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial\tau})(\sin\tau\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{\cos\tau}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial\tau})u=$$
$$\sin^2\tau\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}-\frac{\sin\tau\cos\tau}{\rho^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial\tau}+\frac{\sin\tau\cos\tau}{\rho}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\tau}+$$
$$\frac{\cos^2\tau}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{\cos\tau\sin\tau}{\rho}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\tau}+\frac{\cos^2\tau}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}-\frac{\cos\tau\sin\tau}{\rho^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial\tau}$$

于是

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial\rho} \qquad ⑦$$

因此在变换 ③ 下,方程 ② 变为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial\rho}=0 \qquad ⑧$$

变换 ④ 把(t,ρ,τ)变为(r,θ,φ),这时 τ 变为 φ 是一恒等变换,而(t,ρ)变为(r,θ)是平面上的极坐标变换,从 ⑦ 即知

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}$$

再从 ⑥ 知

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \sin\theta\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

于是在变换 ④ 下,⑧ 化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cot\theta\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$$

即

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \cot\theta\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \qquad ⑨$$

这就是在变换 ① 下 ② 的新形式.通常把 ⑨ 写成

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \qquad ⑩$$

⑨ 或 ⑩ 称为拉普拉斯方程的球坐标形式.

第六十回　分析学　绘制矿藏之全貌
几何学　寻找美丽的矿石

当 n 维流形 M 有黎曼度量时，则有一个算子 $*$，它把一个 k 次形式 α 变成一个 $(n-k)$ 次形式 $*\alpha$，这相当于对切空间的线性子空间取正交补. 由算子 $*$ 和微分 d，我们引进余微分(Codifferential)

$$\delta = (-1)^{nk+n+1} * \mathrm{d} * \qquad ①$$

和拉普拉斯算子

$$\Delta = \mathrm{d}\delta + \delta\mathrm{d} \qquad ②$$

算子 δ 把一个 k 次形式变成一个 $(k-1)$ 次形式，Δ 把一个 k 次形式变成一个 k 次形式，如果一个形式 α 满足

$$\Delta\alpha = 0 \qquad ③$$

它就称为调和的. 零次调和形式就是通常的调和函数.

公式 ③ 是一个二阶椭圆型偏微分方程. 如果 M 是闭的，公式 ③ 的全部解构成一个有限维向量空间，根据霍奇的一个经典定理，解空间的维数恰好是第 k 个贝蒂数 b_k，在一般情况下，同调群 $H_r(p)$（这里 p 是某一剖分）具有形式

$$H_r(p) = Z + Z + \cdots + Z + k$$

这时 k 是有限群，直和中 Z 的个数称为 r 维贝蒂(Betti)数（这一术语由庞加莱引进，为纪念意大利数学家贝蒂的卓越发现），则欧拉示性数可写成

$$x(M) = d_e - d_o \qquad ④$$

这里 d_e 和 d_o 分别是偶次和奇次调和形式空间的维数. 外微分 d 本身是一个椭圆算子，公式 ④ 可看做是用椭圆算子的指数来表示 $x(M)$. 对于任何线性椭圆算子来说，它的指数等于解空间的维数减去伴随算子的解空间的维数.

在用局部不变量的积分表示椭圆算子的指数这一方面，阿蒂亚－辛格指数定理（设 X 为 n 维紧元边缘 C^∞ 微分流形，对于 X 上的任何椭圆微分算子 d 存在解析指数 $ind_a(d)$ 以及拓扑指数 $ind_t(d)$，Atiyan-Singer 指数定理是说 $ind_a(d) = ind_t(d)$）达到了顶峰. 许多著名的定理，例如霍奇指标定理，希策布鲁赫指标定理和关于复流形的黎曼－罗赫定理，都是它的特殊情形. 这项研究的一个主要副产品是确认了考虑流形上伪微分算子的必要性，它是一个比微分算子更一般的算子.

椭圆型微分方程和方程组是与几何十分紧密地纠缠着的. 一个或多个复变元的柯西－黎曼方程是复几何的基础，极小流形是求极小化面积的变分法问题

中欧拉 - 拉格朗日方程的解,这些方程是拟线性的."最"非线性的方程也许是蒙日 - 安培方程,它在好几个几何问题中都是重要的.近年来在这些领域里取得了很大的进展.由于分析这样深地侵入几何,引起了几何学家的不安,美国大数学家 G.D.伯克霍夫说:"几何学可能最后只不过是分析学的一件华丽的直观外衣."然而陈省身指出,分析学是绘制矿藏的全貌,而几何学是寻找美丽的矿石.几何学建筑在这样的原则上:并非所有的结构都是相等的,并非所有的方程都是相等的.

第六十一回　外微分　拉氏算子一般式①
协变性　脱离坐标最普适

一、正交曲面坐标系中的拉普拉斯算符

下面，通过外微分法介绍正交曲线坐标系中拉普拉斯算符的一般形式．这种方法的优点在于它的协变性，即可以脱离开坐标系的具体定义，而得到最普遍的表达式．作为一个最初步的介绍，我们略去数学上的严格定义，只给出有关运算的规则．

外微分法则　这里要介绍外微分算符、算符及楔积运算，以及微分形式的概念．

首先定义外微分算符 d，它作用在（标量）函数 f 上，即

$$d : f \quad \mapsto df = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \tag{①}$$

得到的 df 称为一次微分形式（简称一次形式）．

对于柱坐标系

$$du = \frac{\partial u}{\partial r} dr + \frac{\partial u}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial u}{\partial z} dz \tag{②}$$

对于球坐标系

$$du = \frac{\partial u}{\partial r} dr + \frac{\partial u}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial u}{\partial \phi} d\phi \tag{③}$$

运算法则 1　外微分算符 d 在不同坐标系中的表达式

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i = \sum_i \frac{\partial f}{\partial y^i} dy^i \tag{④}$$

我们看到，一次微分形式 df 给出的正是梯度 $\mathrm{grad}\, f = \nabla f$ 的协变微分形式，$\{dx^i, i = 1,2,3\}$ 构成一组正交基．

外微分算符 d 还可以作用在 p 次微分形式 $\alpha = \sum a_I dx^I$ 上，得到 $(p+1)$ 次微分形式

$$d\alpha = d\left(\sum_I a_I dx^I\right) = \sum_i \sum_I \frac{\partial a_I}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^I \tag{⑤}$$

其中

① 本回引自文献[15]．

$$\mathrm{d}x^I = \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \mathrm{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_p} \qquad ⑥$$

运算 ∧ 称为非标准用语.

运算法则 2 $$\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j = -\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i \qquad ⑦$$

因此

$$\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^i = 0$$

运算法则 3 设 α 为 p 次微分形式,β,γ 是 q 次微分形式

$$\mathrm{d}(\beta + \gamma) = \mathrm{d}\beta + \mathrm{d}\gamma \qquad ⑧$$

$$\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = (\mathrm{d}\alpha) \wedge \beta + (-1)1^p\alpha \wedge (\mathrm{d}\beta) \qquad ⑨$$

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\alpha) = 0 \qquad ⑩$$

“ * ”算符是一个线性变换,它把 p 次微分形式变换为相应的 $n-p$ 次微分形式

$$^*\mathrm{d}x^i = \frac{\sqrt{\det \boldsymbol{G}}}{g_{ii}}\mathrm{d}x^I, \ ^*\mathrm{d}x^I = \frac{g_{ii}}{\sqrt{\det \boldsymbol{G}}}\mathrm{d}x^i \qquad ⑪$$

其中,(i, I) 构成(1,2,3) 的偶排列,det $\boldsymbol{G}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{G}$ 的行列式值.

运算法则 4 $$^*1 = \sqrt{\det \boldsymbol{G}}\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 \qquad ⑫$$

$$^*(\sqrt{\det \boldsymbol{G}}\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3) = 1 \qquad ⑬$$

注意 $\sqrt{\det \boldsymbol{G}}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3$ 正好是通常的三维空间的体积元.

对于柱坐标系

$$\det \boldsymbol{G} = r^2$$

$$^*\mathrm{d}u = r\frac{\partial u}{\partial r}\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}z + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial \theta}\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}r + r\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}r\theta \qquad ⑭$$

对于球坐标系

$$\det \boldsymbol{G} = r^4\sin^2\theta$$

$$^*\mathrm{d}u = r^2\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\phi + \sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}r + \frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial u}{\partial \phi}\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta \qquad ⑮$$

$^*\mathrm{d}$ 是旋度 curl 的协变微分形式,这可以从它作用在一次微分形式 $a_1\mathrm{d}x^1 + a_2\mathrm{d}x^2 + a_3\mathrm{d}x^3$ 的结果

$$^*\mathrm{d}(a_1\mathrm{d}x^1 + a_2\mathrm{d}x^2 + a_3\mathrm{d}x^3) =$$

$$\left(\frac{\partial a_3}{\partial x^2} - \frac{\partial a_2}{\partial x^3}\right)\frac{g_{11}}{\sqrt{\det \boldsymbol{G}}}\mathrm{d}x^1 + \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x^1}\right)\frac{g_{22}}{\sqrt{\det \boldsymbol{G}}}\mathrm{d}x^2 +$$

$$\left(\frac{\partial a_2}{\partial x^1} - \frac{\partial a_1}{\partial x^2}\right)\frac{g_{33}}{\sqrt{\det \boldsymbol{G}}}\mathrm{d}x^3 \qquad ⑯$$

看出.

$^*\mathrm{d}*$ 是散度 div 的协变微分形式.

$$^*\mathrm{d}^*(a_1\mathrm{d}x^1 + a_2\mathrm{d}x^2 + a_3\mathrm{d}x^3) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\det \boldsymbol{G}}} \cdot \frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{\sqrt{\det \boldsymbol{G}}}{g_{11}} a_1\right) + \frac{1}{\sqrt{\det \boldsymbol{G}}} \cdot \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{\sqrt{\det \boldsymbol{G}}}{g_{22}} a_2\right) + \frac{1}{\sqrt{\det \boldsymbol{G}}} \cdot \frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{\sqrt{\det \boldsymbol{G}}}{g_{33}} a_3\right) \quad ⑰$$

正交曲线坐标系中的拉普拉斯算符　$^*\mathrm{d}^*\mathrm{d}$ 是拉普拉斯算符 $\nabla^2 \equiv \nabla \cdot \nabla = \text{div grad}$ 的协变微分形式.

柱坐标系

$$\mathrm{d}^*\mathrm{d}u = \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}z + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}r + r\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta$$

$$^*\mathrm{d}^*\mathrm{d}u = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

这就是说,拉普拉斯算符在柱坐标系下的表达式是

$$\nabla^2 \equiv \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad ⑱$$

球坐标系

$$\mathrm{d}^*\mathrm{d}u = \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)\sin\theta\,\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\phi + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}r + \frac{1}{\sin\theta} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}\mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta$$

$$^*\mathrm{d}^*\mathrm{d}u = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}$$

所以,拉普拉斯算符在球坐标系下的表达式是

$$\nabla^2 \equiv \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad ⑲$$

二、拉普拉斯算符的平移、转动和反射不变性

上面,介绍了正交曲面坐标系的概念,以及几种特殊的正交曲面坐标系中拉普拉斯算符的具体表达式.我们可以根据问题的需要,选择合适的坐标系.

选定了坐标系以后,在求解定解问题时,往往还需要考虑两个问题.一是坐标系如何放置,包括坐标原点位置和坐标轴特殊取向的选择,以最大限度地利用问题中的对称性,使求解过程得到充分的简化.第二个问题是讨论定解问题的对称性与解的对称性之间的必然联系.这两个问题实际上并不是可以截然分开的.这里将着重考虑第一个问题.对于第二个问题(是群论的任务)有时也会有所涉及,但主要是用来分析定解问题的结果,用来检验解的正确性.

坐标系的不同放置,在数学上,就表现为不同坐标系之间的线性变换,在这

些线性变换下，拉普拉斯算符的形式如何变化，前面已经做出了原则的回答：拉普拉斯算符的形式具有不变性.这里，讨论一些具体的变换，具体证明拉普拉斯算符在这些变换下的不变性.为了确定起见，下面的讨论在直角坐标系中进行.

首先，关于坐标原点的不同放置，涉及的是平移变换

$$x' = x - a, y' = y - b, z' = z - c \tag{⑳}$$

容易看出

$$\frac{\partial^2}{\partial x'^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y'^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial z'^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{㉑}$$

因此，拉普拉斯算符在平移变换下是不变的，即

$$\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{㉒}$$

关于坐标轴的取向问题，涉及坐标系之间的正交变换.设空间一点在变换前后的坐标分别是$\{x,y,z\}$和$\{x',y',z'\}$，它们之间的关系是

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \tag{㉓}$$

所谓正交变换，指的是变换矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{㉔}$$

应该满足正交关系

$$\sum_{k=1,2,3} a_{ik}a_{jk} = \sum_{k=1,2,3} a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij} \tag{㉕}$$

在正交变换之下，拉普拉斯算符的形式是不变的.这只要证明变换后的度规矩阵仍为单位矩阵即可.

为了书写的方便，下面把变换前后的坐标改写为$\{x^1,x^2,x^3\}$和$\{x^{1'},x^{2'},x^{3'}\}$，这样，根据式㉓，就有

$$\mathrm{d}x^i = \sum_{k=1,2,3} a_{ki}\mathrm{d}x^{k'} \tag{㉖}$$

容易得到

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = \sum_{ij}\delta_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j = \sum_{ij}\sum_{kl}\delta_{ij}a_{ki}a_{lj}\mathrm{d}x^{k'}\mathrm{d}x^{l'} = \\ \sum_{kl}\Big(\sum_i a_{ki}a_{li}\Big)\mathrm{d}x^{k'}\mathrm{d}x^{l'} = \sum_{kl}\delta_{kl}\mathrm{d}x^{k'}\mathrm{d}x^{l'} \end{aligned} \tag{㉗}$$

这说明变换前后的度规矩阵都是单位矩阵，所以变换后的拉普拉斯算符仍为

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \tag{㉘}$$

在变换矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中，有 3^2 个元素．由于正交关系含有 $3\times 4/2$ 个限制条件，因此只有3个矩阵元是独立的，或者说只可能有3个自由参数．这样描写的正是坐标系绕通过原点的某一固定轴的转动，它可以用标志刚体取向的3个欧拉角描写．

绕固定轴的转动的最简单情形，就是绕某一坐标轴（例如，z 轴）的转动．设转动角 α，则

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha,\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha,\ z' = z \qquad ㉙$$

即变换矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad ㉚$$

直接计算就可以验证

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \sin\alpha\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y'} = -\sin\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \cos\alpha\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z}$$

于是

$$\frac{\partial^2}{\partial x'^2} = \cos^2\alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\cos\alpha\sin\alpha\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + \sin^2\alpha\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y'^2} = \sin^2\alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\cos\alpha\sin\alpha\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + \cos^2\alpha\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z'^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

因此，拉普拉斯算符在绕 z 轴的转动下是不变的．当然，坐标架绕 y 轴或 z 轴转动时，拉普拉斯算符也是不变的．

更进一步，对于绕过原点的任意固定轴的转动，可以用三个欧拉角 α、β 和 γ（图1）描写，其转动矩阵的矩阵元是

$$a_{11} = \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma \qquad ㉛_1$$

$$a_{12} = \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma \qquad ㉛_2$$

$$a_{13} = -\sin\beta\cos\gamma \qquad ㉛_3$$

$$a_{21} = -\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma - \sin\alpha\cos\gamma \qquad ㉛_4$$

$$a_{22} = -\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma \qquad ㉛_5$$

$$a_{23} = \sin\beta\sin\gamma \qquad ㉛_6$$

$$a_{31} = \cos\alpha\sin\beta \qquad ㉛_7$$

$$a_{32} = \sin\alpha\sin\beta \quad ㉛_8$$

$$a_{33} = \cos\beta \quad ㉛_9$$

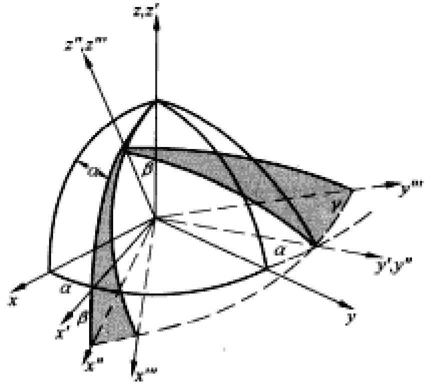


图1　欧拉角

通过直接计算可以证明

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ㉜$$

这就是说，以欧拉角 α,β 和 γ 表征的转动㉛可以分解为连续的三个绕坐标轴的转动：首先将坐标系 $\{x,y,z\}$ 绕 z 轴转 α 角而变为 $\{x',y',z'\}$，然后绕 y' 轴转 β 角而变为 $\{x'',y'',z''\}$，最后再绕 z'' 轴转 γ 角. 在这三个转动下拉普拉斯算符都是不变的. 所以，对于绕通过坐标原点的任意固定轴的转动，拉普拉斯算符也是不变的.

最后，容易看出，在空间反射

$$x' = -x,\ y' = -y,\ z' = -z \quad ㉝$$

下，拉普拉斯算符也是不变的.

讨论拉普拉斯算符在这些特殊变换之下的不变性，其目的当然还是在于希望能对于有关定解问题的解有更多的认识，希望能对有关定解问题的求解有所裨益. 以后我们将在有关部分中再作具体的讨论.

三、圆形区域

现在讨论另一种区域，圆形区域中的稳定问题. 定解问题为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ x^2 + y^2 < a^2 \quad ㉞_1$$

$$u|_{x^2+y^2=a^2} = f \qquad ㉞_2$$

方程 ㉞$_1$ 在直角坐标系下当然是可以分离变量的.但是,边界条件 ㉞$_2$ 显然不能分离变量.由于边界的形状是圆形,很自然地,我们想到应该采用平面极坐标系.

在平面极坐标系中,定解问题 ㉞ 应该可以写为

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}=0,0<r<a \qquad ㉟_1$$

$$u|_{r=a}=f(\phi) \qquad ㉟_2$$

令 $u(r,\phi)=R(r)\Phi(\phi)$,代入方程 ㉟$_1$,有

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)\Phi+\frac{R}{r^2}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}=0$$

$$\frac{r}{R}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)=-\frac{1}{\Phi}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}=\lambda$$

因此,可以分离变量

$$r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)-\lambda R=0 \qquad ㊱_1$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}+\lambda\Phi=0 \qquad ㊲_1$$

但是,代入边界条件 ㉟$_2$ 得

$$R(a)\Phi(\phi)=f(\phi)$$

仍然不能分离变量,因为边界条件是非齐次的.这样,我们尽管能够将齐次方程 ㉟$_1$ 分离变量,得到两个含有待定参数的齐次常微分方程,但是并没有相应的齐次边界条件与之配合而构成一个本征值问题.这样,在平面极坐标系下应用分离变量法时,我们又遇到了特殊的困难.

但是,深入分析一下,就会发现上面出现的困难是完全可以克服的,这些困难完全是由于演绎中的疏漏造成的:在圆形区域的条件下,当我们由平面直角坐标系变换到平面极坐标系时,得到的 ㉟ 并不完全等价于原来的定解问题 ㉞;或者说,㉟ 并不构成一个完整的定解问题.第一,在数学上,自变量 ϕ 的变化范围是$[0,2\pi]$,严格地说,方程在区间的端点 $\phi=0$ 和 $\phi=2\pi$ 并不成立,因为 $u(r,\phi)$ 在端点 $\phi=0$ 和 $\phi=2\pi$ 处的偏导数没有定义,充其量最多也只能定义 $u(r,\phi)$ 在两个端点处的单侧偏导数.而且,这两个端点纯粹是由于采用平面极坐标系描写圆形而出现的,并非真正的几何边界,当然在原始的定解问题中,就谈不上要指定相应的边界条件.这样就导致在 ㉟ 中也没有给出 $u(r,\phi)$ 在 $\phi=0$ 和 $\phi=2\pi$ 处所应当满足的边界条件.考虑到平面极坐标系的特点,$(r,\phi=0)$ 和$(r,\phi=2\pi)$代表的是平面上的同一点,所以,作为完整的定解问题,还应当补充上周期条件

$$u(r,\phi)|_{\phi=0} = u(r,\phi)|_{\phi=2\pi}$$

和

$$\left.\frac{\partial u(r,\phi)}{\partial \phi}\right|_{\phi=0} = \left.\frac{\partial u(r,\phi)}{\partial \phi}\right|_{\phi=2\pi}$$

这样，上面提到的由于把拉普拉斯方程从直角坐标系转换到极坐标系时而发生的损失，可以通过补充上周期条件而得到补偿. 第二，原来的方程 ㉞$_1$ 在圆内是处处成立的，包括在坐标原点 $(x,y)=(0,0)$ 也是成立的. 但是，方程 ㉟$_1$ 在点 $r=0$ 并不成立. 这是因为 $u(r,\phi)$ 在点 $r=0$ 的偏导数也并没有定义，充其量也只能定义 $u(r,\phi)$ 在点 $r=0$ 的单侧偏导数. 点 $r=0$ 作为自变量 r 的一个端点，也纯粹是由采用极坐标系而出现的，它并不是圆形区域的几何边界. 这样也还需要补充上 $u(r,\phi)$ 在点 $r=0$ 所应当满足的边界条件. 考虑到方程 ㉞$_1$ 也是齐次的，在圆内（包括坐标原点）是无源的，因此，$u(r,\phi)$ 在坐标原点应当是有界的①，应当补充上有界条件

$$u(r,\phi)|_{r=0}\ 有界$$

这样，总结上面的讨论，我们看到，在转换到平面极坐标系后，定解问题 ㉞ 就应该变为

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}=0, 0<\phi<2\pi, 0<r<a \qquad ㊳_1$$

$$u(r,\phi)|_{\phi=0} = u(r,\phi)|_{\phi=2\pi}, 0<r<a \qquad ㊳_2$$

$$\left.\frac{\partial u(r,\phi)}{\partial \phi}\right|_{\phi=0} = \left.\frac{\partial u(r,\phi)}{\partial \phi}\right|_{\phi=2\pi}, 0<r<a \qquad ㊳_3$$

$$u(r,\phi)|_{r=0}\ 有界, 0<\phi<2\pi \qquad ㊳_4$$

$$u|_{r=a}=f(\phi), 0<\phi<2\pi \qquad ㊳_5$$

现在，再来重复分离变量的步骤，就可以看到，除了得到齐次常微分方程 ㊱$_1$ 和 ㊲$_1$ 之外，由周期条件 ㊳$_2$ 和 ㊳$_3$ 还可以得到

$$\Phi(0)=\Phi(2\pi) \qquad ㊲_2$$

$$\Phi'(0)=\Phi'(2\pi) \qquad ㊲_3$$

这样，由带有待定参数的齐次常微分方程 ㊲$_1$ 和齐次的周期边界条件 ㊲$_2$、㊲$_3$ 又构成了一个本征值问题. 容易证明

$$\lambda\int_0^{2\pi}\Phi(\phi)\Phi^*(\phi)\mathrm{d}\phi = -\int_0^{2\pi}\Phi''(\phi)\Phi^*(\phi)\mathrm{d}\phi =$$

$$-\Phi'(\phi)\Phi^*(\phi)\Big|_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}\Phi'(\phi)\Phi'^*(\phi)\mathrm{d}\phi$$

尽管分部积分出来的项在单独代入上下限时并不为 0，但是数值相等，因而总

① 不妨用大家熟悉的静电场的知识来理解这个问题. 三维空间中，只有在点电荷和线电荷所在处电势分别以 $1/r$ 和 $\ln r$ 的形式发散，除此之外，电势是处处有界的. 二维平面上的点电荷，就是三维空间中的均匀线电荷.

的结果仍然为 0. 所以,如果本征值问题 ㊲ 有解的话,一定满足

$$\lambda = \frac{\int_0^{2\pi} \Phi'(\phi)\Phi'^*(\phi)\mathrm{d}\phi}{\int_0^{2\pi} \Phi(\phi)\Phi^*(\phi)\mathrm{d}\phi} \geqslant 0 \qquad ㊴$$

这时之所以允许 $\lambda = 0$,是因为 $\Phi(\phi)$ = 常数(不妨取为 1) 也是本征值问题的解. 换句话说,本征值问题 ㊲ 有一组解

$$\text{本征值 } \lambda_0 = 0 \qquad ㊵_1$$

$$\text{本征函数 } \Phi_0(0) = 1 \qquad ㊵_2$$

当 $\lambda > 0$ 时,方程 $㊲_1$ 的通解为

$$\Phi(\phi) = A\sin\sqrt{\lambda}\phi + B\cos\sqrt{\lambda}\phi$$

代入周期条件 $㊲_2$ 和 $㊲_3$,就得到

$$B = A\sin\sqrt{\lambda}2\pi + B\cos\sqrt{\lambda}2\pi$$

$$A = A\cos\sqrt{\lambda}2\pi - B\sin\sqrt{\lambda}2\pi$$

这是关于系数 A 和 B 的线性齐次代数方程组,有非零解的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} \sin\sqrt{\lambda}2\pi & \cos\sqrt{\lambda}2\pi - 1 \\ \cos\sqrt{\lambda}2\pi - 1 & \sin\sqrt{\lambda}2\pi \end{vmatrix} = 0$$

即 $2(\cos\sqrt{\lambda}2\pi - 1) = 0$. 这样又可以求得本征值

$$\lambda_m = m^2, m = 1,2,3,\cdots \qquad ㊶_1$$

相应的非零解是 A 任意,B 任意,这就是说,对应于一个本征值 λ_m,有两个本征函数

$$\Phi_{m1}(\phi) = \sin m\phi \qquad ㊶_2$$

$$\Phi_{m2}(\phi) = \cos m\phi \qquad ㊶_3$$

当然,也还可以将 $\lambda_0 = 0$ 的结果 ㊵ 和 ㊶ 合并起来,统一写成 ㊶ 的形式,而将 m 的取值相应地改为 $0,1,2,3,\cdots$

现在,按照分离变量法的标准步骤,应该再去求出常微分方程 ㊱ 的解. 注意这个常微分方程是一个特殊的变系数方程,经过自变量的变换

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}$$

即
$$t = \ln r$$

后,就可以变为常系数的常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}t^2} - \lambda R = 0 \qquad ㊱_2$$

所以,当 $\lambda_0 = 0$ 时,通解为

$$R_0(r) = C_0 + D_0t = C_0 + D_0\ln r \qquad ㊷$$

当 $\lambda_m = m^2, m \neq 0$ 时,通解为

$$R_m(r) = C_m e^{mt} + D_m e^{-mt} = C_m r^m + D_m r^{-m} \quad ㊸$$

现在,我们就求得了满足齐次方程㊳$_1$和齐次边界条件㊳$_2$,㊳$_3$的全部特解

$$u_0(r,\phi) = C_0 + D_0 \ln r \quad ㊹_1$$

$$u_{m1}(r,\phi) = (C_{m1} r^m + D_{m1} r^{-m}) \sin m\phi \quad ㊹_2$$

$$u_{m2}(r,\phi) = (C_{m2} r^m + D_{m2} r^{-m}) \cos m\phi \quad ㊹_3$$

把它们叠加起来,就得到定解问题 ㊳ 的一般解

$$u(r,\phi) = C_0 + D_0 \ln r + \sum_{m=1}^{\infty} (C_{m1} r^m + D_{m1} r^{-m}) \sin m\phi + \sum_{m=1}^{\infty} (C_{m2} r^m + D_{m2} r^{-m}) \cos m\phi \quad ㊺$$

考虑到有界条件㊳$_4$,由于 $\ln r$ 和 r^{-m} 在点 $r = 0$ 都是无界的,所以它们的系数都必须为 0

$$D_0 = 0, D_{m1} = 0, D_{m2} = 0 \quad ㊻$$

再代入边界条件 ㊳$_5$,就得到

$$u(r,\phi)\big|_{r=a} = C_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a^m (C_{m1} \sin m\phi + C_{m2} \cos m\phi) = f(\phi)$$

下面的问题便是如何定出叠加系数 C_0, C_{m1} 和 C_{m2}. 尽管现在也可以根据傅里叶展开的公式定出系数 C_0, C_{m1} 和 C_{m2},但我们还是采用分离变量法的标准做法,利用本征函数的正交性确定叠加系数.

容易证明,对于本征值问题 ㊲,对应不同本征值的本征函数是正交的. 首先,本征函数 1(对应于本征值 $\lambda_0 = 0$) 和本征函数 $\sin m\phi$ 或 $\cos m\phi$(对应于本征值 $\lambda_m = m^2, m \neq 0$) 是正交的

$$\int_0^{2\pi} \sin m\phi \, d\phi = 0 \quad ㊼_1$$

$$\int_0^{2\pi} \cos m\phi \, d\phi = 0 \quad ㊼_2$$

对应于本征值 $\lambda_m = m^2$ 的本征函数 $\sin m\phi, \cos m\phi$ 和对应于本征值 $\lambda_n = n^2$, $n \neq m$ 的本征函数 $\sin n\phi, \cos n\phi$ 是两两正交的

$$\int_0^{2\pi} \sin n\phi \sin m\phi \, d\phi = 0 \quad ㊼_3$$

$$\int_0^{2\pi} \sin n\phi \cos m\phi \, d\phi = 0 \quad ㊼_4$$

$$\int_0^{2\pi} \cos n\phi \cos m\phi \, d\phi = 0 \quad ㊼_5$$

而且,对应于同一个本征值 $\lambda_m = m^2$ 的两个本征函数 $\sin m\phi$ 和 $\cos m\phi$ 也是正交

的

$$\int_0^{2\pi} \sin m\phi \cos m\phi \mathrm{d}\phi = 0 \qquad ⑰_6$$

因此，利用本征函数的正交性以及

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 m\phi \mathrm{d}\phi = \pi, \int_0^{2\pi} \cos^2 m\phi \mathrm{d}\phi = \pi$$

就可求得

$$C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\mathrm{d}\phi \qquad ㊽_1$$

$$C_{m1} = \frac{1}{a^m\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\sin m\phi \mathrm{d}\phi \qquad ㊽_2$$

$$C_{m2} = \frac{1}{a^m\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\cos m\phi \mathrm{d}\phi \qquad ㊽_3$$

这样我们就完全给出了定解问题 ㊳ 的解.

现在再对上面求解过程中的某些问题作一些补充讨论.

第一，在求解本征值问题 ㊲ 时，对应于一个本征值有两个(线性无关的)本征函数. 我们把对应一个本征值有不止一个(线性无关的)本征函数的现象，称为简并(或退化). 如果对应一个本征值有 n 个本征函数，则称本征值问题是 n 重简并的，或者说简并度为 n. 对于二阶常微分方程的本征值问题，最多只能是二重简并的. 我们还将证明，在二阶常微分方程的本征值问题中，如果边界条件是一、二、三类，则对应一个本征值，只能有一个本征函数，或者说，本征值问题一定是非简并的. 而当边界条件是周期条件时，本征值问题才是简并的.

第二，对于简并的本征值问题，本征函数的选取并不唯一. 对应同一个本征值的本征函数也不一定正交，但是一定可以通过适当的重新组合而使它们正交化. 就本题而言，就可以将对应于 $\lambda_m = m^2, m = 1,2,3,\cdots$ 的本征函数取为

$$e^{im\phi} \text{ 和 } e^{-im\phi} \qquad ㊾$$

或者简单地将本征值问题 ㊲ 的全部本征值(包括 $\lambda_0 = 0$)和本征函数统一写成

$$\lambda_m = m^2, m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots \qquad ㊿_1$$

$$\Phi_m(\phi) = e^{im\phi} \qquad ㊿_2$$

这时，对应不同本征值的本征函数仍然是正交的

$$\int_0^{2\pi} e^{in\phi}(e^{im\phi})^* \mathrm{d}\phi = 0; n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots; n \neq m \qquad (51)_1$$

而且，对应于同一个本征值 $\lambda_m = m^2, m \neq 0$ 的两个本征函数 $e^{\pm im\phi}$ 也是正交的

$$\int_0^{2\pi} e^{im\phi}(e^{-im\phi})^* \mathrm{d}\phi = 0 \qquad (51)_2$$

注意现在的本征函数是复函数，在上面的正交关系中需要将其中的一个本征函

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2} = 0$$

数取复共轭.

最后,关于定解问题 ㊳ 的特解,它们是

$$1, \ln r,\ r^m \sin m\phi, r^m \cos m\phi, r^{-m} \sin m\phi, r^{-m} \cos m\phi$$

注意这里的偏微分方程是(二维)拉普拉斯方程.回忆一下在复变函数部分中,我们曾经证明,解析函数的实部或虚部一定是拉普拉斯方程的解.把 $re^{i\phi}$ 看成是复变数 $z = x + iy$,就可以看出,上面的这些特解正是解析函数

$$z^0, \ln z, z^m, z^{-m}$$

的实部或者虚部.而有界条件 ㊳$_4$ 正是使我们摈弃掉在圆内 $|z| < a$ 并不处处解析的函数 $\ln z$ 和 z^{-m} 的原因.更进一步,把上面求得的系数 ㊻ 和 ㊽ 代入到式 ㊺ 中,还可以得到

$$\begin{aligned} u(r,\phi) = {} & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi')\mathrm{d}\phi' + \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^m \sin m\phi \int_0^{2\pi} f(\phi')\sin m\phi' \mathrm{d}\phi' + \\ & \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^m \cos m\phi \int_0^{2\pi} f(\phi')\cos m\phi' \mathrm{d}\phi' = \\ & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi')\left(1 + 2\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^m \cos m(\phi - \phi')\right)\mathrm{d}\phi' \end{aligned}$$

显然,当 $r < a$ 时级数收敛.将余弦函数改写为复指数函数,利用等比级数的求和公式就可以求出级数的和,最后就得到

$$u(r,\phi) = \frac{a^2 - r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(\phi')}{r^2 + a^2 - 2ar\cos(\phi - \phi')}\mathrm{d}\phi' \qquad (52)$$

这个结果称为泊松积分公式,它把拉普拉斯方程在圆内的第一类边值问题的解表示为边值 $f(\phi)$ 的积分.事实上,由解析函数的柯西积分公式,也可以推出这个结果,而 $u(r,\phi)$ 正好是解析函数的实部或虚部.这里只不过再一次看到解析函数的实部或虚部和二维拉普拉斯方程的解之间的关系.

四、亥姆霍兹方程在柱坐标系下的分离变量

在讨论二阶偏微分方程的分离变量时,亥姆霍兹(Helmhdtz)方程

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \qquad (53)$$

具有一定的典型性.这是因为无论波动方程或热传导方程,在将时间部分分离变量或作傅里叶变换后,都会得到亥姆霍兹方程.又如拉普拉斯方程,也可以看成亥姆霍兹方程的特殊情形.

在柱坐标系中,亥姆霍兹方程的具体形式是

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0 \qquad (54)$$

这里涉及的是三个自变量的函数.要将它分离变量,通常采取逐次分离的办法:首先先分离一个自变量,然后再将其余的两个自变量分离.为此,令 $u(r,\theta,z) =$

$v(r,\theta)Z(z)$，代入方程，即得

$$Z\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}+k^2 v\right)+v\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2}=0$$

所以

$$\frac{1}{v}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}+k^2 v\right)=-\frac{1}{Z}\cdot\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2}$$

等式的左端是 r 和 θ 的函数，与 z 无关；右端是 z 的函数，与 r 及 θ 均无关. 所以它们必须等于既与 r,θ 无关又与 z 无关的常数. 把这个常数记为 λ，就得到

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}+(k^2-\lambda)v=0 \qquad ㊺$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2}+\lambda Z=0 \qquad ㊻$$

这样就完成了自变量 z 的分离. 接着再令 $v(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$，代入方程 ㊺，又得到

$$\Theta(\theta)\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+(k^2-\lambda)R\right)+\frac{R(r)}{r^2}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\theta^2}=0$$

两端再乘以 $r^2/R(r)\Theta(\theta)$，并移项，又能得到

$$\frac{r^2}{R(r)}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+(k^2-\lambda)R\right)=-\frac{1}{\Theta(\theta)}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\theta^2}$$

现在，再次看到，等式的左端只是 r 的函数，与 θ 无关；右端只是 θ 的函数，与 r 无关，所以它们必须等于既与 r 无关又与 θ 无关的常数，记为 μ. 于是又得到

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left(k^2-\lambda-\frac{\mu}{r^2}\right)R=0 \qquad ㊼$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\theta^2}+\mu\Theta=0 \qquad ㊽$$

这样，就又可以完成对于自变量 r 和 θ 的分离变量，也就完成了亥姆霍兹方程的分离变量.

在柱坐标系中将亥姆霍兹方程分离变量时，得到了三个常微分方程，即 ㊻，㊼ 和 ㊽. 其中 ㊻ 和 ㊽ 两个常系数常微分方程，是大家都很熟悉的，不难解. 方程 ㊼ 是变系数常微分方程，称做贝塞尔方程.

贝塞尔（Bessel, Friedrich Wilhelm, 1784—1846），德国天文学家、大地测量学家、数学家，生于德国明登，卒于柯尼斯堡.

五、亥姆霍兹方程在球坐标系下的分离变量

在球坐标系中，亥姆霍兹方程的具体形式是

$$\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}+k^2 u=0 \qquad ㊾$$

第六十二回　听鼓声　判断鼓面和形状①
谱几何　黎曼流形谱研究

黎曼流形的谱又称为谱几何，是大范围分析领域中整体微分几何的一个重要分支。它集泛函、拓扑、复变、偏微分方程、代数等内容于一体.

自1972年10月国际几何大师陈省身教授来北京讲学，提出"以鼓声判断鼓面和形状"来开展谱几何研究工作，南京大学马传渔教授在黄正中教授指点下，系统地学习了法国M. Berger教授1970年出版的《Lespectre d'une variété riemannienne》一书，并于1982～1984年赴法国巴黎第七大学数学研究所进一步学习，回国后写成专著《黎曼流形的谱》.

正如法国高等研究所(I.H.E.S)所长Berger所说：黎曼流形的谱除其几何上的特性与美感外，它的一个优越性源于物理学.事实上，被称为"半古典"的大量特征值的探讨工作倾倒了物理学家，因为与经典力学相比，这可能是检测量子力学的最简便的一种方式.

一、算子 δ

1. 向量场的散度和算子 δ

设 (M,g) 为黎曼流形，其上有一线性映射，它把 $\mathscr{H}(M)$ 映到 $C^\infty(M)$，则称映射为散度.

定义1　流形 M 上向量场 ξ 的散度是函数 $\operatorname{div}\xi$，局部地用 $\mathrm{d}(\xi\lrcorner\omega)=\operatorname{div}\xi\cdot\omega$ 给出，这里的 ω 表示对应于局部定向的体积形式.

在定义中，$\xi\lrcorner\omega$ 表示向量场 ξ 与 n 次形式 ω 的缩并(n 是流形 M 的维数).换言之，$\xi\lrcorner\omega$ 是 $n-1$ 次形式，定义为

$$(\xi\lrcorner\omega)(X_1,\cdots,X_{n-1})=\omega(\xi,X_1,\cdots,X_{n-1})$$
$$\forall X_1,\cdots,X_n\in\mathscr{H}(M) \qquad ①$$

可以直接验证，$\operatorname{div}\xi$ 不依赖于所选取的局部形式 ω.因此，散度在 (M,g) 上是大范围有定义的.容易验证下述命题.

命题1　散度满足等式

$$\operatorname{div}(f\cdot\xi)=f\cdot\operatorname{div}\xi+\mathrm{d}f(\xi) \qquad ②$$
$$\forall f\in C^\infty(M) \text{ 和 } \forall\xi\in\mathscr{H}(M)$$

---

① 本回引自文献[140].

根据对偶性,从散度出发,在一次形式所构成的空间 $A^1(M)$ 中可得到一算子 δ.

定义 2 算子 δ 把 $A^1(M)$ 映射到 $C^\infty(M)$ 内.用下式定义之

$$\delta\alpha = -\operatorname{div}(\alpha^\#),\ \forall\, \alpha \in A^1(M) \qquad ③$$

今后,p 次形式所构成的空间表作 $A^p(M)$,代替以前的 $\Gamma(A^pT^*M)$.同样,这里以 $A^1(M)$ 代替 $\Gamma(T^*M)$,以 $A^0(M)$ 代替 $C^\infty(M)$.

如果 M 是紧致的,则可以利用欧几里得空间 $\Gamma(A^pT^*M)_p$ 中的数积 $(\cdot|\cdot)$ 和 (M,g) 上典型测度 V_g 来定义空间 $A^p(M)$ 上的拟希尔伯特结构.这个大范围数积用 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示,于是,如果 α 和 β 是 M 上两个形式,则

$$\langle\alpha,\beta\rangle = \int_M(\alpha \mid \beta)\cdot V_g \qquad ④$$

关于 $A^0(M)$ 和 $A^1(M)$ 的拟希尔伯特结构,我们打算证明算子 d 和 δ 互有伴随关系,即有

命题 2 $\langle \mathrm{d}f,\alpha\rangle = \langle f,\delta\alpha\rangle,\ \forall\, \alpha \in A^1(M),\ \forall\, f \in A^0(M)$.

证明 此式可写作

$$\int_M(df \mid \alpha)\cdot V_g = \int_M f\cdot\delta\alpha\cdot V_g$$

为了证明此式成立,只要证明

$$\int_M(\mathrm{d}f \mid \alpha)\cdot\omega = \int_M f\delta\alpha\cdot\omega$$

成立就够了,此外 ω 是流形上任意一点邻域内局部定义的 n 次体积形式.置

$$I = \int_M(\mathrm{d}f \mid \alpha)\cdot\omega - \int_M(f\delta\alpha)\cdot\omega$$

根据定义 1 和定义 2,可知

$$I = \int_M((\mathrm{d}f \mid \alpha) + f\operatorname{div}\alpha^\#)\omega$$

然而,按命题 1 有

$$f\cdot\operatorname{div}\alpha^\# = \operatorname{div}(f\alpha^\#) - \mathrm{d}f(\alpha^\#)$$

按照定义,$(\mathrm{d}f \mid \alpha) = \mathrm{d}f(\alpha^\#)$.于是

$$I = \int_M\operatorname{div}(f\alpha^\#)\cdot\omega = \int_M \mathrm{d}(f\alpha^\#)\lrcorner\,\omega$$

根据斯托克斯定理可得 $I = 0$,证毕.

注 算子 d 不仅在 $A^0(M)$ 上有定义,而且对于一切 p,算子 d 和 δ 在 $A^p(M)$ 上同样有定义. $A^p \underset{\mathrm{d}}{\overset{\delta}{\rightleftharpoons}} A^{p+1}(M)$,$d$ 和 δ 仍有伴随关系式.

2. 散度和 δ 的显式计算

(1) 局部坐标的计算

设在点 m 处,局部坐标为 (x^i),对此坐标系有一实函数 $\theta = \sqrt{|g_{ij}|}$,使得

体积形式局部地可写成

$$\omega = \theta \cdot \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n \qquad ⑤$$

如果对于坐标(x^i)而言,局部的标架向量场为(X_i),即 $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$,则

$$(\xi \lrcorner \omega)(X_1, \cdots, \hat{X}_i, \cdots, X_n) = \omega(\xi, X_1, \cdots, \hat{X}_i, \cdots, X_n) =$$
$$(-1)^{i-1}\omega(X_1, \cdots, \xi, \cdots, X_n) = (-1)^{i-1}\theta \cdot \xi^i$$

这里的 ξ^i 表示 ξ 的第 i 个分量. 由此可得

$$\xi \lrcorner \omega = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}(\theta \cdot \xi^i)\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^i \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n \qquad ⑥$$

因此

$$\mathrm{d}(\delta \lrcorner \omega) = \sum_i (-1)^{i+1}\frac{\partial(\theta \cdot \xi^i)}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \hat{\mathrm{d}x} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n =$$
$$\sum_i \frac{\partial(\theta \cdot \xi^i)}{\partial x^i}\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \hat{\mathrm{d}x^i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$$

故

$$\mathrm{d}(\xi \lrcorner \omega) = \theta^{-i}\sum_i\left(\frac{\partial(\theta \cdot \xi^i)}{\partial x^i}\right) \cdot \omega \qquad ⑦$$

$$\mathrm{div}\ \xi = \theta^{-1}\sum_i \frac{\partial(\theta \cdot \xi^i)}{\partial x^i} \qquad ⑧$$

在同一坐标系内,一次形式 α 可写成$\alpha = \sum_i a_i \mathrm{d}x^i$,于是

$$\alpha^{\#} = \sum_{i,j}(g^{ij}a_j)X_i$$

其中 g^{ij} 是(g_{ij})的逆矩阵中的元素. 根据定义 2 可得

$$\delta\alpha = -\theta^{-1}\left(\sum_{i,j}\frac{\partial(\theta g^{ij}a_j)}{\partial x^i}\right) \qquad ⑨$$

(2) 几何说明

一次形式 α 的共变导数是二次形式 D_α. 用 trace D_α 表示 D_α 的迹,则

$$\mathrm{trace}\ D_\alpha = \sum_i D_\alpha(X_i, X_i) \qquad ⑩$$

其中$\{X_i\}$是法正交标架向量场. 因为有等式

$$(D_{X_i}\alpha^{\#} \mid X_i) = D_\alpha(X_i, X_i) \qquad ⑪$$

由此可见 D_α 的迹等于自同构 $X \to D_{X}\alpha^{\#}$ 的迹.

命题 3 设 α 是黎曼流形(M, g)上的任意一个一次形式,则

$$\delta\alpha = -\mathrm{trace}\ D_\alpha$$

证明 首先,如果 ω 是任意的 p 次形式,ξ 是 M 上的向量场,则有等式 $D_X(\xi \lrcorner \omega) = D_X\xi \lrcorner \omega + \xi \lrcorner D_X\omega$,对任意的 $X \in \mathscr{X}(M)$ 成立. 因为体积形式 ω

是平行移动的不变量,所以 ω 的共变导数 $D\omega = 0$. 于是

$$D_X(\xi \lrcorner \omega) = D_X\xi \lrcorner \omega, \forall X, \xi \in \mathscr{H}(M) \quad ⑫$$

另一方面,如果 ω 是 M 上 p 次反对称形式,则外微分 $d\omega$ 关于它的共变导数是反对称的,即

$$d\omega(X_0, X_1, \cdots, X_p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i D_{X_i}\omega(X_0, \cdots, \hat{X}_i, \cdots, X_p) \quad ⑬$$

现在,假设点 $m \in M$, $\{X_i\}_{i=1,\cdots,n}$ 是点 m 的领域 U 上的法正交标架向量场,设 ξ 是向量场, ω 是 U 上的体积形式. 对于 $n-1$ 次形式 $\xi \lrcorner \omega$,我们有

$$\begin{aligned} d(\xi \lrcorner \omega)(X_1, \cdots, X_n) = & \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} D_{X_i}(\xi \lrcorner \omega)(X_1, \cdots, \hat{X}_i, \cdots, X_n) = \\ & \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} (D_{X_i}\xi \lrcorner \omega)(X_1, \cdots, \hat{X}_i, \cdots, X_n) = \\ & \sum_{i=1}^{n} \omega(X_1, \cdots, D_{X_i}\xi, \cdots, X_n) \end{aligned}$$

因为 $\{X_i\}$ 是法正交标架,所以 $D_x\xi = \sum_i (D_X\xi \mid X_i) X_i$,为此

$$\begin{aligned} d(\xi \lrcorner \omega)(X_1, \cdots, X_n) = & \sum_i (D_{X_i}\xi \mid X_i) \cdot \omega(X_1, \cdots, X_n) = \\ & \sum_i (D_{X_i}\xi \mid X_i) \end{aligned}$$

根据散度的定义,最后有

$$\operatorname{div} \xi = \sum_i (D_{X_i}\xi \mid X_i)$$

所以 $\delta\alpha = -\operatorname{trace} D_\alpha$,证毕.

二、拉普拉斯算子 Δ

1. 定义和局部坐标表达式

定义 3 拉普拉斯算子用 Δ 表示之. 它是从 $A^0(M)$ 到 $A^0(M)$ 内的一个映射,对任意的 $f \in A^0(M)$,规定

$$\Delta f = \delta df \quad ⑭$$

考虑局部坐标的表达式. 在 ⑪ 中,如果用 df 代替 α,即用 $\frac{\partial f}{\partial x^j}$ 代替 α_j,则

$$\Delta f = -\theta^{-1} \sum_{i,j} \frac{\partial\left(\theta \times g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}\right)}{\partial x^i} \quad ⑮$$

拉普拉斯算子是二阶微分算子,它的二阶齐次部分为

$$\sigma = -\sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \quad ⑯$$

它形式上像一个二次形式，与范数的平方符号相反．它是非退化的，故可说拉普拉斯算子是二阶椭圆型微分算子．

现在，在点 m 的邻域内，考虑法坐标邻域，把 g 提升到 T_mM 上，它的有限展开式不含有 g 的一阶导数，即在点 m 处，g 的一阶导数为 0. 此外，点 m 的法正交标架为 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$. 所以，在点 m 处 $g^{ii}=1$；当 $i\neq j$ 时，$g^{ij}=0$. 故在法坐标领域内，点 m 处的拉普拉斯算子很简单，可写成

$$\Delta f=-\sum_i\frac{\partial^2 f}{\partial {x^i}^2} \tag{17}$$

研究两个实函数 f 和 g 的乘积 $f\cdot g$，对于流形 M 上任意一点 m，仍选取上述的法坐标邻域，则

$$\Delta(f\cdot g)=-\sum_i\frac{\partial^2(f\cdot g)}{\partial {x^i}^2}$$

$$\Delta(f\cdot g)=-f\sum_i\frac{\partial^2 g}{\partial {x^i}^2}-2\sum_i\frac{\partial f}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial g}{\partial x^i}-g\sum_i\frac{\partial^2 f}{\partial {x^i}^2}=$$

$$f\Delta g-2(\mathrm{d}f\mid \mathrm{d}g)+g\Delta f$$

故对任意的 $f,g\in A^0(M)$ 及在任意一点 m 处，都有

命题 4 $\Delta(f\cdot g)=f\cdot\Delta g-2(\mathrm{d}f\mid\mathrm{d}g)+g\cdot\Delta f$.

注 在$(\mathbf{R}^n,g_0)$上，g_{ij} 是常数，⑮ 可写成

$$\Delta f=-\sum_i\frac{\partial^2 f}{\partial {x^i}^2}$$

这与通常意义下所采用的拉普拉斯符号相反，今推广 R^n 中熟知的调和函数的概念．

定义 4 如果黎曼流形上实函数 f 满足

$$\Delta f=0 \tag{18}$$

则称 f 是调和函数．

2. 拉普拉斯算子的几何说明

如果在命题 3 中，令 $\alpha=\mathrm{d}f$，则

$$\Delta f=-\operatorname{trace}(D\mathrm{d}f) \tag{19}$$

即

$$\Delta f=-\operatorname{trace}(\operatorname{Hess} f) \tag{20}$$

这里 Hess f 是前面定义过的海赛函数．

如果$\{x_i\}$是点 m 邻域内的法正交标架向量场，则

$$\Delta f=-\sum_i\operatorname{Hess}f(x_i,x_i) \tag{21}$$

利用此表达式，就可以说明拉普拉斯的几何意义．

今在点 m 处，设法正交标架为 $\{x_i\}$，对于每一向量 x_i，可以定义一条测地线 r_i，因此

$$\Delta f = -\sum_i \frac{d^2(f \circ r_i)}{dt^2} \tag{22}$$

关于拉普拉斯表达式 ㉒ 以后是经常用到的.

根据拉普拉斯算子的定义，只牵涉到一些黎曼不变量. 而拉普拉斯算子本身就是黎曼不变量. 说清楚些，如果给出对角图形（图 1），这里的 φ 是流形 (M,g) 到流形 (N,h) 上的等距映射，则

$$\Delta^M(f \circ \varphi) = \Delta^N f \circ \varphi \tag{23}$$

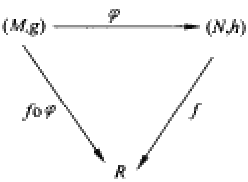


图 1

命题 5 假设 p 是流形 (M,g) 到流形 (N,h) 的全测地纤维的黎曼淹没，f 是定义在 N 上的任一函数，则

$$\Delta^M(f \circ p) = \Delta^N f \circ p \tag{24}$$

证明 因为 (M,g) 中每一点 m 处的切空间 T_mM 可以典型地分解为两个相互正交的子空间. 不妨称第二个为水平的，它可以等距投影到 $T_{p(m)}N$ 上.

假设 $\{X_i, Y_j\}_{i,j}$ 是 T_mM 的底，这里 $\{X_i\}$ 表示水平子空间的底，对应的测地线用 r_i 表示，$\{Y_j\}$ 表示垂直子空间的底，对应的测地线用 r_j^* 表示. 根据 ㉒ 就有

$$\Delta^M(f \circ p) = -\sum_i \frac{d}{dt^2}(f \circ p \circ r_i) - \sum_j \frac{d^2}{dt^2}(f \circ p \circ r_j^*) \tag{25}$$

因为 p 是黎曼淹没，所以 r_i 的投影是落在与 X_i 投影相切的测地线上. ㉕ 中右边第一项应等于 $\Delta^N f \circ p$，而右边第二项应等于 0. 这是因为 r_j^* 是已知的，它落在点 m 处 p 的纤维内，$f \circ p \circ r_j^*$ 是常数，从而证明了 ㉔.

注 在命题 5 中，所假设的条件带有很大的限制性. 研究一个重要的特殊情况，该假设能够得到满足. 即考虑两个黎曼流形 (M,g) 和 (N,h) 的乘积流形 $(M \times N, g \times h)$.

考虑图 2，这里的 p 和 q 是两个黎曼淹没. a 和 b 分别为定义在 M 和 N 上的实值函数. 现在，我们要借助于命题 5，来计算定义在 $M \times N$ 上的函数 $(a \circ p)(b \circ q)$ 的拉普拉斯. 根据命题 4 有

$$\begin{aligned}\Delta^{M\times N}((a \circ p) \times (b \circ q)) = {} & (b \circ q) \times \Delta^{M\times N}(a \circ p) - \\ & 2(d(a \circ p) \mid d(b \circ q)) + \\ & (a \circ p) \times \Delta^{M\times N}(b \circ q)\end{aligned}$$

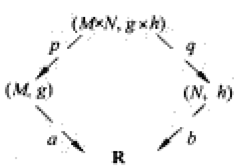


图 2

因为两个正交形式的数积为 0，所以等二项等于 0. 根据 ㉓，第一项等于 $(b \circ q) \times (\Delta^M(a) \circ p)$，而第三项等于 $(a \circ p) \times (\Delta^N(b) \circ q)$，最后可得

$$\Delta^{M\times N}((a\circ p)\times(b\circ q)) = (b\circ q)(\times\Delta^{M}(a)\circ p)+ (a\circ p)\times(\Delta^{N}(b\circ q)) \qquad ㉖$$

如果 a 是对应于特征值λ 的 Δ^M 特征函数，b 是对应于特征值μ 的 Δ^N 的特征函数，则

$$\Delta^{M\times N}((a\circ p)\times(b\circ q)) = (\lambda+\mu)((a\circ p)\times(b\circ q)) \qquad ㉗$$

换言之，$(a\circ p)\times(b\circ q)$ 是对应于特征值 $\lambda+\mu$ 的 Δ^{M+N} 的特征函数，以后我们可以看到，利用此法能够得到$(M\times N, g\times h)$的一切特征值和特征函数.

3. 紧致流形的拉普拉斯算子

因为在紧致的黎曼流形上算子 d 和 δ 是相互伴随的，故

$$\langle\Delta f, g\rangle = \langle f, \Delta g\rangle \qquad ㉘$$

$$\langle\Delta f, f\rangle = \|df\|^2, \forall f, g\in A^{\circ}(M) \qquad ㉙$$

由此得出下面命题.

命题 6 紧致黎曼流形(M,g)上的拉普拉斯算子是自伴随的、正定的算子.

注 从 ㉙ 可以推出：黎曼流形(M,g)上的调和函数局部都是一常数. 这就是说，在 M 的每一连通分支上是常数. 这对非紧致流形而言是不成立的.

命题 7 对于一切 $\alpha\in A^1(M)$ 和任意的 $X, Y\in\mathscr{X}(M)$，都有

$$D_XD_Y\alpha - D_YD_X\alpha - D_{[X,Y]}\alpha = (R(X,Y)\alpha^{\#})^{b}$$

博赫纳(Bochner, Salomen, 1899—1982)，德国 - 美国数学家. 生于克拉科夫附近的波德戈尔齐，卒于美国休斯敦.

定理 1 （博赫纳 - 利什内罗维奇公式）

假设 ρ 是黎曼流形(M,g)的 Ricci 曲率，则对于任意的 $f\in A^0(M)$，恒有

$$-\frac{1}{2}\Delta(|df|^2) = |\mathrm{Hess}\, f|^2 - (d\Delta f\mid df) + \rho(df^{\#}, df^{\#})$$

证明 设点 $m\in M$，在 T_mM 内选取法正交底$\{x_i\}$. 设 r_i 是从点m 出发，并与 x_i 相切的法测地线，则从点 m 出发将法正交标架$\{x_i\}$ 沿着 r_i 作平行移动所得到的法正标架场为$\{X_i\}$.

这样就有

$$D_{X_i}X_j(m) = 0, \forall i, j \qquad ㉚$$

利什内罗维奇(Lichnérowicz, André, 1915—)，法国数学家.

在点 m

$$\Delta(|df|)^2 = -\sum_i D_{X_i}D_{X_i}(|df|)^2 = -2\sum_i D_{X_i}(D_{X_i}df\mid df|) = -2\sum_i(D_{X_i}D_{X_i}df\mid df) - 2\sum_i(D_{X_i}df\mid D_{X_i}df|)$$

两端除以 -2，第二项不是别的，恰是 Hess f 范数的平方，而第一项为 $\sum_i(D_{X_i}D_{X_i}df\mid df)$. 考虑和式中的项$(D_{X_i}D_{X_i}df\mid df)$. 因为$\{X_i\}$ 是法正交底，所以

$$(D_{X_i}D_{X_i}\mathrm{d}f \mid \mathrm{d}f) = \sum_j [D_{X_i}D_{X_i}\mathrm{d}f](X_j)\times \mathrm{d}f(X_j)$$

因为 $D_{X_i}X_j(m)=0$. 所以

$$D_{X_i}D_{X_i}\mathrm{d}f(X_j) = X_i[D_{X_i}\mathrm{d}f(X_j)] - (D_{X_i}\mathrm{d}f)(D_{X_i}X_j) = X_i[\mathrm{Hess}(X_i,X_j)]$$

因为 $\mathrm{Hess}(X_i,X_j)=\mathrm{Hess}(X_j,X_i)$. 故

$$[D_{X_i}D_{X_i}\mathrm{d}f](x_j) = [D_{X_i}D_{X_j}\mathrm{d}f](X_i) \qquad ㉛$$

从而

$$(D_{X_i}D_{X_i}\mathrm{d}f \mid \mathrm{d}f) = \sum_j [D_{X_i}D_{X_j}\mathrm{d}f](X_i)\times \mathrm{d}f(X_j)$$

根据命题7,它又等于

$$\begin{aligned}(D_{X_i}D_{X_i}\mathrm{d}f \mid \mathrm{d}f) = &\sum_j [D_{X_j}D_{X_i}\mathrm{d}f](X_i)\times \mathrm{d}f(X_j) + \\ &\sum_j (R(X_j,X_i)\mathrm{d}f^\# \mid X_i)\times \mathrm{d}f(X_j) + \\ &\sum_j D_{[X_i,X_j]}\mathrm{d}f(X_i)\times \mathrm{d}f(X_j)\end{aligned}$$

因为 $[X_i,X_j] = D_{X_i}X_j - D_{X_j}X_i = 0$,上式最后一项为0.故有

$$\begin{aligned}\sum_i (D_{X_i}D_{X_i}\mathrm{d}f \mid \mathrm{d}f) = &\sum_{i,j} (D_{X_j}D_{X_i}\mathrm{d}f)(X_i)\times \mathrm{d}f(X_j) + \\ &\sum_{i,j} (R(X_j,X_i)\mathrm{d}f^\# \mid X_i)\times \mathrm{d}f(X_j) \qquad ㉜\end{aligned}$$

根据 ㉛,这个和式中第一项可写成

$$\begin{aligned}\sum_{i,j} D_{X_j}(D_{X_i}\mathrm{d}f(X_i))\times \mathrm{d}f(X_j) = &\sum_j D_{X_j}(\sum_i \mathrm{Hess}\, f(X_i,X_i))\times \mathrm{d}f(X_j) = \\ &-\sum_j D_{X_j}(\Delta f)\times \mathrm{d}f(X_j) = \\ &-(\mathrm{d}(\Delta f) \mid \mathrm{d}f) = -(\Delta f \mid \delta\cdot \mathrm{d}f) = \\ &-(\Delta f \mid \Delta f) = -|\Delta f|^2\end{aligned}$$

因为 $\{X_i\}$ 是法正交底,故

$$\mathrm{d}f^\# = \sum_j \mathrm{d}f(X_j)X_j$$

从而 ㉜ 中的第二项为

$$\sum_i (R(\mathrm{d}f^\#,X_i)\mathrm{d}f^\# \mid X_i) = \rho(\mathrm{d}f^\#,\mathrm{d}f^\#)$$

证毕.

4. 极坐标中的拉普拉斯算子

假设 f 是定义在以 m 为中心,以 ε 为半径的球 $B(m,\varepsilon)$ 内的函数,且在 $B(m,\varepsilon)$ 内指数映射是微分同胚映射.此外,f 仅与点 m 的距离有关.说得更准确些,f 是由到点 m 的距离和函数 φ 复合而成的,而 φ 是定义在 $[0,\varepsilon)$ 的实值函数.即

$$f = \varphi \circ d(m, \cdot) \quad ㉝$$

按通常的方法,用下式给出函数 θ

$$V_{\exp^* g} = \theta \times V_{\text{Lebesgue}} \quad ㉞$$

此处 V_{Lebesgue} 表示勒贝格测度. θ 如同我们在 ⑤ 中所见到的, $\theta = \sqrt{|g_{ij}|}$.

若 $r = d(m, n)$, θ 关于 r 的偏导数在点 n 处的值记作 $\theta' = \frac{\partial \theta}{\partial r}$. 则根据上述的假定,可得

定理 2 $\Delta f = -\frac{d^2\varphi}{dr^2} - \frac{d\varphi}{dr}(\frac{\theta'}{\theta} + \frac{n-1}{r})$, 对于 $B(m, \varepsilon)$ 内一切点成立. 不过应除去点 m, 因为在点 m 处, Δf 是没有定义的.

证明 取点 $n \in B(m, \varepsilon)$, 按 $B(m, \varepsilon)$ 的定义,存在连接点 m 和点 n 的唯一的一条测地线 $r = r_1(s)$, s 表示弧长,假设 y_1 表示 r_1 在点 n 处的切向量,根据 r_1 的定义,就有

$$\begin{cases} n = r_1(r) \\ y_1 = \dfrac{dr}{ds}(r) \end{cases} \quad ㉟$$

在 T_nM 内,设 y_1 的正交补为 $y_2, y_3, \cdots, y_n$ 并使得 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 构成法正交底. 从点 n 出发由 $y_2, \cdots, y_n$ 所决定的 $n-1$ 条测地线分别记作 $r_2, \cdots, r_n$. 它们以弧长 α 作为参数. 根据 ㉒, 就有

$$\Delta f(n) = -\frac{d^2}{ds^2}(f \circ r_1)(r) - \sum_{i=2}^{n} \frac{d^2}{d\alpha^2}(f \circ r_i)(0) \quad ㊱$$

在 ㊱ 中,右边第一项为 $-\frac{d^2\varphi}{ds^2}(r)$. 余下来就是要计算 $\frac{d^2}{d\alpha^2}(f \circ r_i)(0)$.

因为 y_i 在点 n 处与 r_1 正交. 于是,我们能把它作为自点 m 出发的一族测地线 $\{C_\alpha\}$ 的横截向量,这里 $C_0 = r_1$, 记 C_α 的长度为 long C_α, 则

$$(f \circ r_i)(\alpha) = \varphi[\text{long } C_\alpha] \quad ㊲$$

由此可得

$$\frac{d^2}{d\alpha^2}(f \circ r_i)(0) = \frac{d^2\varphi}{ds^2}(r) \times (\frac{d}{d\alpha}[\text{long } C_\alpha](0))^2 + \frac{d\varphi}{ds}(r)\frac{d^2}{d\alpha^2}[\text{long } C_\alpha](0) \quad ㊳$$

因为 y_i 与 r 正交,所以 $\frac{d}{d\alpha}[\text{long } C_\alpha](0) = 0$. 至于 $\frac{d^2}{d\alpha^2}[\text{long } C_\alpha](0)$, 利用第二变分公式可得

$$\frac{d^2}{d\alpha^2}[\text{long } C_\alpha](0) = (Y_i(r) \mid Y'_i(r)) \quad ㊴$$

这里 Y_i 是由 C_α 决定的沿着 r_1 的雅可比场. 换言之,在它的两端有 $Y_i(0) = 0$,

$Y_i(r) = y_i$，这里 Y'_i 表示 Y_i 关于 $\dot{r}_1$ 的共变导数. 最后有

$$\Delta f(n) = -\frac{d^2\varphi}{ds^2}(r) - \frac{d\varphi}{ds}(r) \times \sum_{i=2}^{n}(Y_i(r) \mid Y'_i(r)) \quad ⑩$$

现在，要用函数 θ 和 θ 的导数来计算 $\sum_{i=2}^{n}(Y_i(r) \mid Y'_i(r))$. 因为 θ 是指数映射行列式在点 m 处的值，故 θ^{-1} 是 $(\exp_m)^{-1}$ 行列式在点 n 的值，于是有

$$\theta^{-1}(n) = |T^{-1}(\exp_m)_n(y_1) \wedge \cdots \wedge T^{-1}(\exp_m)_n(y_n)| \quad ⑪$$

因为极坐标算起来比较方便，且指数映射是等距的，故

$$\theta^{-1}(n) = |T^{-1}(\exp_m)_n(y_2) \wedge \cdots \wedge T^{-1}(\exp_m)_n(y_n)| \quad ⑫$$

令 $p = r_1(s)$. 则

$$\theta^{-1}(p) = \frac{|T^{-1}(\exp_m)_p(Y_2(s)) \wedge \cdots \wedge T^{-1}(\exp_m)_p(Y_n(s))|}{|Y_2(s) \wedge \cdots \wedge Y_n(s)|} \quad ⑬$$

（y_1 定义的雅可比场等于 $\dot{r}$，并且不改变上述的外积）. 在 T_mM 内，向量场 $T^{-1}(\exp_m)_p(Y_i(s))$ 是作为一族测地线 $\{T^{-1}(\exp_m)(C_a)\}$ 的横截向量而实现的，这族测地线不是别的，恰为 T_mM 由连接点 O_m 和点 $r \cdot \dot{r}_1(0) + \frac{a}{|T^{-1}(\exp_m)_n(y_i)|} \cdot T^{-1}(\exp_m)_n(y_i)$ 的线段，故有等式

$$\begin{cases} T^{-1}(\exp_m)_p(Y_i(s)) = \frac{s}{r} \cdot T^{-1}(\exp_m)_n(y_i) \\ \theta^{-1}(p) = \frac{s^{n-1}}{r^{n-1}} \frac{|T^{-1}(\exp_m)_n(y_2) \wedge \cdots \wedge T^{-1}(\exp_m)_n(y_n)|}{|Y_2(s) \wedge \cdots \wedge Y_n(s)|} \end{cases} \quad ⑭$$

最后有

$$\theta(p) = \frac{r^{n-1}}{s^{n-1}} |Y_2(s) \wedge \cdots \wedge Y_n(s)| \times \theta(n) \quad ⑮$$

行列式 $|Y_2(s) \wedge \cdots \wedge Y_n(s)|$ 关于 s 求导数，其值为 $\sum_{i=2}^{n}(Y_i(s) \mid Y'_i(s))$. 故

$$\frac{d\theta}{ds}(p) = -(n-1)\frac{r^{n-1}}{s^n}|Y_2(s) \wedge \cdots \wedge Y_n(s)| \times \theta(n) + \frac{r^{n-1}}{s^{n-1}} \times \left(\sum_{i=2}^{n}(Y_i(s) \mid Y'_i(s))\right) \times \theta(n) \quad ⑯$$

在点 n，就有

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{ds}(n) = -\frac{n-1}{r} \times \theta(n) + \left(\sum_{i=2}^{n}(Y_i(r) \mid Y'_i(r))\right)\theta(n) \\ \frac{\theta'}{\theta}(n) = \sum_{i=2}^{n}(Y_i(r) \mid Y'_i(r)) - \frac{n-1}{r} \end{cases} \quad ⑰$$

把 ⑩ 改写为

雅可比（Jacobi, Carl Custav Jacob, 1804—1851），德国数学家，生于波茨坦，卒于柏林.

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2} = 0$$

$$\Delta f(n) = -\frac{d^2\varphi}{ds^2}(r) - \frac{d\varphi}{ds}(r) \times \left(\frac{\theta'}{\theta}(n) + \frac{n-1}{r}\right)$$

即
$$\Delta f = -\frac{d^2\varphi}{dr^2} - \frac{d\varphi}{dr} \times \left(\frac{\theta'}{\theta} + \frac{n-1}{r}\right)$$

证毕.

在 $\mathbf{R}^n$ 上热方程的基本解.

我们回想一下,热算子可以写作

$$L = \Delta + \frac{\partial}{\partial t} \qquad (48)$$

算子 L 把 $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+^*$ 映射到 $\mathbf{R}$,拉普拉斯是对于第二个变数而言的.

所谓映射 F 是 L 的基本解,意即:

(i) F 是 $\mathbf{C}^2$ 的.

(ii) $\Delta F(m,.,t) + \frac{\partial F}{\partial t}(m,.,t) = 0, \forall m \in M$ 和 $\forall t > 0$.

(iii) $\lim_{t \to 0^+} \int_{\mathbf{R}^n} F(m,n,t) f(n) V_{\mathbf{R}^n} = f(m)$,这里 f 是具有紧支集从 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}$ 内的任一映射.换言之,当 $t \to 0^+$ 时,$F(m,.,t) \to$ Dirac 测度 $\delta(m)$.

借助于定理 2 容易验证 $F = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{d^2(m,n)}{4t}}$ 是热方程的基本解.

球面上的拉普拉斯算子.

假设球面 (S^n, g_0) 淹没在 $(\mathbf{R}^{n+1}, g_0)$ 内,比较 S^n 到 R 的两个映射. $\Delta^{S^n}(f \mid S^n)$ 和 $(\Delta^{\mathbf{R}^{n+1}} f) \mid S^n$,这里 f 是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 到 $\mathbf{R}$ 的 $\mathbf{C}^\infty$ 映射.则有

命题 8 对于一切从 $\mathbf{R}^{n+1}$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射,恒有

$$(\Delta^{\mathbf{R}^{n+1}} f) \mid_{S^n} = \Delta^{S^n}(f \mid_{S^n}) - \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \mid_{S^n} - n \frac{\partial f}{\partial r} \mid_{S^n}$$

证明 我们先约定:在下面的证明中,凡属空间 $\mathbf{R}^{n+1}$ 与其中各点同 $\mathbf{R}^{n+1}$ 相切的空间的对象,只要典型同构将其一个变为另一个,便用同一字母表示,并把它们等同起来.不仅如此,对 S^n 上一点的切空间与 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中相应的子空间也作同样处理.

设点 $n \in S^n$,它决定 $\mathbf{R}^{n+1}$ 内一个向量 x,$\mathbf{R}^{n+1}$ 内的正交补为 $x_i, i = 2, \cdots, n+1$,则 $\{x, x_i\}_{i=2,\cdots,n+1}$ 为 $\mathbf{R}^{n+1}$ 的一组法正交底,而 $\{x_i\}_{i=2,\cdots,n+1}$ 是 $T_n S^n$ 的法正交底.

在 (S^n, g_0) 上,用 x_i 确定的测地线 r_i 可写成

$$r_i: \alpha \to \cos\alpha \cdot x + \sin\alpha \cdot x_i, i = 2, \cdots, n+1$$

这里把 x 和 x_i 作为 $\mathbf{R}^{n+1}$ 内的点,$r_i(\alpha)$ 作为 S^n 的点.对应于 $\mathbf{R}^{n+1}$ 的法正交底 $\{x = x_1, x_i\}_{i=2,\cdots,n+1}$,映射 f 具有偏导数 $(\frac{\partial f}{\partial x^i})_{i=2,\cdots,n+1}$. $f \circ r_i$ 在点 $r_i(\alpha)$ 处,关

于 α 的一阶导数为 $-\sin\alpha\dfrac{\partial f}{\partial x^1}+\cos\alpha\dfrac{\partial f}{\partial x^i}$，而且在点 $n=r_i(0)$ 处，二阶导数为

$$\frac{\mathrm{d}^2(f\circ r_i)}{\mathrm{d}\alpha^2}(0)=-\frac{\partial f}{\partial x^1}(n)+\frac{\partial^2 f}{\partial {x^i}^2}(n)$$

根据㉒，就有

$$\Delta^{S^n}(f|_{S^n})(n)=-\sum_{i=2}^{n+1}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\alpha^2}(f\circ r_i)(0)=$$
$$-\sum_{i=2}^{n+1}\frac{\partial^2 f}{\partial {x^i}^2}(n)+n\frac{\partial f}{\partial x^1}(n)$$

再根据命题 4 的注，可得

$$(\Delta^{\mathbf{R}^{n+1}}f)(n)=-\sum_{i=1}^{n+1}\frac{\partial^2 f}{\partial {x^i}^2}(n)=-\sum_{i=2}^{n+1}\frac{\partial^2 f}{\partial {x^i}^2}(n)-\frac{\partial^2 f}{\partial {x^1}^2}(n)$$

于是 $$(\Delta^{\mathbf{R}^{n+1}}f)|_{S^n}(n)=\Delta^{S^n}(f|_{S^n})(n)-\frac{\partial^2 f}{\partial {x^1}^2}(n)-n\frac{\partial f}{\partial x^1}(n)$$

证毕.

假设在 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中，给出 $\mathbf{C}^2$ 可微函数 $r^{2\alpha}$，这里 r 表示动点到原点的距离. 如果函数 r 限制在球面 S^n 上，则 r 为常数，且拉普拉斯为 0. 对于函数 $r^{2\alpha}$，我们有

$$(\Delta^{\mathbf{R}^{n+1}}r^{2\alpha})|_{S^n}=-2\alpha(2\alpha-1)-n\cdot 2\alpha=-2\alpha(2\alpha+n-1)\qquad ㊾$$

因为 2α 齐次多项式在 $\mathbf{R}^{n+1}$ 上的拉普拉斯是 $\alpha(\alpha-1)$ 次齐次多项式，故

$$\Delta^{\mathbf{R}^{n+1}}(r^{2\alpha})=-2\alpha(2\alpha+n-1)r^{\alpha(\alpha-1)}\qquad ㊿$$

设 P 是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 上 k 次调和的齐次多项式，根据命题 8，就有

$$0=\Delta^{S^n}(P|_{S^n})-k(k-1)P|_{S^n}-n\cdot k\cdot P|_{S^n}$$

即

$$\Delta^{S^n}(P|_{S^n})=k(k+n-1)P|_{S^n}\qquad 51$$

换言之，$P|_{S^n}$ 是以 $k(k+n-1)$ 为特征值的球面上拉普拉斯算子的特征函数.

三、拉普拉斯 - 贝尔特拉米算子

霍奇（Hodge, William Vallance Douglas, 1903—1975），英国数学家，生于爱丁堡.

1. 霍奇星算子

设 (M,g) 是 n 维定向黎曼流形，黎曼结构张量为 g. 点 $m\in M$，且点 m 处的坐标图为 (U,Φ)，局部坐标为 $x^1,\cdots,x^n$. 则 $g=g_{ij}\mathrm{d}x^i\otimes\mathrm{d}x^j$，$g_{ij}=g\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i},\dfrac{\partial}{\partial x^j}\right)$，以下若无特殊声明，指标中取值范围总是 $1,\cdots,n$. 记 $g=\det(g_{ij})$，则体积元 $\eta=\sqrt{g}\,\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n$.

定义 5

$$\epsilon^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r} = \det\begin{pmatrix} \delta^{i1}_{j1} & \delta^{i1}_{j2} & \cdots & \delta^{i1}_{jr} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta^{ir}_{j1} & \delta^{ir}_{j2} & \cdots & \delta^{ir}_{jr} \end{pmatrix}$$

称为克罗内克符号.

克罗内克(Kronecker, Leopold, 1823—1891),德国数学家,生于利格尼茨,卒于柏林.

易见,当 $r = 1$ 时,这就是通常的 Kronecker delta 符号 δ^i_j. $\epsilon^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r}$ 具有下述性质.

性质 1 $\epsilon^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r}$ 关于指标$(i_1,\cdots,i_r)$或$(j_1,\cdots,j_r)$是反对称的.

性质 2 若 $i_1 < \cdots < i_r$ 和 $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$,则

$$\epsilon^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r} = \delta^{i_1}_{j_1}\delta^{i_2}_{j_2}\cdots\delta^{i_r}_{j_r}$$

性质 3

$$\epsilon^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r} = \begin{cases} 0,\text{若}(j_1,\cdots,j_r)\text{不是}(i_1,\cdots,i_r)\text{的置换} \\ 1,\text{若}(j_1,\cdots,j_r)\text{是}(i_1,\cdots,i_r)\text{的偶置换} \\ -1,\text{若}(j_1,\cdots,j_r)\text{是}(i_1,\cdots,i_r)\text{的奇置换} \end{cases}$$

若采用一般的标准形,则 $\eta = \sqrt{g}\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n$,其中 $\theta^i = a^i_j \mathrm{d}x^j$. 此形式的一般分量为

$$\eta^{12\cdots n} = \sqrt{g}, \eta_{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n} = \epsilon^{12\cdots n}_{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n}\eta_{12\cdots n}$$

若标准形是正交法化的,则

$$g = 1, \eta_{12\cdots n} = 1, \eta = \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \cdots \wedge \theta^n, \eta_{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n} = \epsilon^{12\cdots n}_{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n}$$

易见

$$\eta_{\lambda_1\cdots\lambda_p\lambda_{p+1}\cdots\lambda_n}\eta^{\lambda_1\cdots\lambda_p\mu_{p+1}\cdots\mu_n} = p!\,\epsilon^{\mu_{p+1}\cdots\mu_n}_{\lambda_{p+1}\cdots\lambda_n}$$

$$\epsilon^{\lambda_1\cdots\lambda_q}_{\mu_1\cdots\mu_q}\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_q\nu_1'\cdots\nu_q'}_{\sigma_1\cdots\sigma_{q+q'}} = q!\,\epsilon^{\lambda_1\cdots\lambda_q\nu_1'\cdots\nu_q'}_{\sigma_1\cdots\sigma_{q+q'}}$$

$$\epsilon^{\lambda_1\cdots\lambda_q\rho_1'\cdots\rho_q'}_{\mu_1\cdots\mu_q\rho_1'\cdots\rho_q'} = q'!\,\epsilon^{\lambda_1\cdots\lambda_q}_{\mu_1\cdots\mu_q}$$

由 $D\eta_{\lambda_1\cdots\lambda_n} = 0$ 这一事实,可得

命题 9 对于黎曼联络,体积元素的共变微分为 0.

定义 6 线性算子 $*: A^p(M) \to A^{n-p}(M)$. 即若 α 是一个 p 次形式,那么 $*\alpha$ 是一个 $n-p$ 次形式,称为 α 的伴随形式.

$$(*\alpha)_{\lambda_{p+1}\cdots\lambda_n} = \frac{1}{p!}\eta_{\lambda_1\cdots\lambda_p\lambda_{p+1}\cdots\lambda_n}\alpha^{\lambda_1\cdots\lambda_p} = \frac{1}{p!}\eta^{\lambda_1\cdots\lambda_p}{}_{\lambda_{p+1}\cdots\lambda_n}\alpha^{\lambda_1\cdots\lambda_p} \quad ⑫$$

称线性算子 $*$ 是霍奇星算子.

当 $p = n$ 时,$(*\alpha) = \frac{1}{n!}\eta_{\lambda_1\cdots\lambda_n}\alpha^{\lambda_1\cdots\lambda_n} = \eta_{1\cdots n}\alpha^{1\cdots n}$. $(*\alpha)$ 是一数量.

当 $p=0$ 时,α 是一数量函数 φ,而 $(*\varphi)=\varphi\eta$ 是一个 n 次形式.

现在来找 $**\alpha,\alpha\in A^p(M)$.

因为 $\alpha\in A^p(M),(*\alpha)\in A^{n-p}(M),(**\alpha)\in A^{n-(n-p)}(M)$,即

$$(**\alpha)\in A^p(M)$$

$$(**\alpha)_{\mu_1\cdots\mu_p}=(*(*\alpha))_{\mu_1\cdots\mu_p}=\frac{1}{(n-p)!}\eta_{\mu_{p+1}\cdots\mu_n\mu_1\cdots\mu_p}(*\alpha)^{\mu_{p+1}\cdots\mu_n}=$$

$$\frac{1}{(n-p)!p!}\eta_{\mu_{p+1}\cdots\mu_n\mu_1\cdots\mu_p}\eta^{\lambda_1\cdots\lambda_p\mu_{p+1}\cdots\mu_n}\alpha_{\lambda_1\cdots\lambda_p}=$$

$$\frac{(-1)^{p(n-p)}}{(n-p)!p!}\eta_{\mu_1\cdots\mu_p\mu_{p+1}\cdots\mu_n}\eta^{\lambda_1\cdots\lambda_p\mu_{p+1}\cdots\mu_n}\alpha_{\lambda_1\cdots\lambda_p}=$$

$$\frac{(-1)^{p(n-p)}}{p!}\varepsilon^{\lambda_1\cdots\lambda_p}_{\mu_1\cdots\mu_p}\alpha_{\lambda_1\cdots\lambda_p}=$$

$$(-1)^{p(n-p)}\alpha_{\mu_1\cdots\mu_p}$$

命题 10 $**\alpha=(-1)^{p(n-p)}\alpha$. 式中 $p=0,1,\cdots,n$. 根据上述 $(**)$ 算子的表达式,引入算子 $*^{-1}$. 它满足

$$*^{-1}\cdot *=E \tag{53}$$

这里 E 为恒等原子.

(53)两边右乘 $(*)$,得 $*^{-1}\cdot *\cdot *=*$. 由命题 10 知,$(**)=(-1)^{p(n-p)}$. 两边左乘 $*^{-1}$,有

$$*=*^{-1}\cdot *\cdot *=(-1)^{p(n-p)}\cdot *^{-1}$$

于是

$$*^{-1}\cdot *\cdot *=(-1)^{p(n-p)}\cdot *^{-1} \tag{54}$$

由此得到

$$**=(-1)^{p(n-p)}*\cdot *^{-1} \tag{55}$$

即

$$(-1)^{p(n-p)}=(-1)^{p(n-p)}*\cdot *^{-1} \tag{56}$$

根据此式,立得

命题 11 $*\cdot *^{-1}=E,\ *^{-1}=(-1)^{p(n-p)}\cdot *$.

定义 7 p 次形式 α 和 β 的局部内积 (α,β) 定义为

$$(\alpha,\beta)=\frac{1}{p!}\alpha_{\lambda_1\cdots\lambda_p}\beta^{\lambda_1\cdots\lambda_p}=\frac{1}{p!}\alpha^{\lambda_1\cdots\lambda_p}\beta_{\lambda_1\cdots\lambda_p}$$

命题 12 设 $\alpha,\beta\in A^p(M)$,则

$$\alpha\wedge(*\beta)=(\alpha,\beta)\eta$$

证明 假定标准形是法正交化的,因为

$$(*\beta)_{\lambda_{p+1}\cdots\lambda_n}=\frac{1}{p!}\eta_{\lambda_1\cdots\lambda_p\lambda_{p+1}\cdots\lambda_n}\alpha^{\lambda_1\cdots\lambda_n}$$

故

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2}=0$$

$$(\alpha\wedge(*\beta))_{12\cdots n} = \frac{1}{(p!)^2(n-p)!}\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_p\nu_{p+1}\cdots\nu_n}_{12\cdots n}\alpha_{\mu_1\cdots\mu_p}\epsilon^{1\cdots n}_{\lambda_1\cdots\lambda_p\nu_{p+1}\cdots\nu_n}\beta^{\lambda_1\cdots\lambda_p} =$$

$$\frac{1}{(p!)^2}\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_p}\alpha_{\mu_1\cdots\mu_p}\beta^{\lambda_1\cdots\lambda_p} =$$

$$\frac{1}{p!}\alpha_{\lambda_1\cdots\lambda_p}\beta^{\lambda_1\cdots\lambda_p} = (\alpha,\beta)\eta_{12\cdots n}$$

此时 $\eta_{12\cdots n}=\pm 1$. 故

$$\alpha\wedge(*\beta) = (\alpha,\beta)\eta$$

推论 $\alpha\wedge(*\beta)=\beta\wedge(*\alpha)$.

事实上, $\beta\wedge(*\alpha)=(\beta,\alpha)\eta=(\alpha,\beta)\eta=\alpha\wedge(*\beta)$.

定义 8 设 $\alpha\in A^p(M)$, 线性算子 $\delta: A^p(M)\to A^{p-1}(M)$. 即 $\delta\alpha$ 为 $p-1$ 次形式. 称 $\delta\alpha$ 为 α 的余微分, 定义为

$$\delta = (-1)^p *^{-1}\cdot d\cdot *$$

根据 $*$, d, $*^{-1}$ 的定义, 易见 $\delta\in A^{p-1}(M)$.

因为对于数量函数 φ, $(*\varphi)$ 为 n 次形式, 故 $d(*\varphi)=0$. 从而 $\delta\varphi=0$, $\delta\cdot\delta=0$.

事实上

$$\delta\cdot\delta = (-1)^p\cdot *^{-1}\cdot d\cdot *((-1)^p *^{-1}\cdot d\cdot *) =$$

$$(-1)^p\cdot(-1)^p *^{-1}\cdot d\cdot *\cdot *^{-1}\cdot d\cdot * =$$

$$*^{-1}\cdot d\cdot d\cdot * = 0$$

下面用黎曼结构的共变微分来表达 d 和 δ.

$$(d\alpha)_{\lambda_1\cdots\lambda_{p+1}} = \frac{1}{p!}\epsilon^{\nu\mu_1\cdots\mu_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_{p+1}}\partial_\nu\alpha_{\mu_1\cdots\mu_p}$$

这里
$$\partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

但是
$$D_\nu\alpha_{\mu_1\cdots\mu_p} = \partial_\nu\alpha_{\mu_1\cdots\mu_p} - \Gamma^\rho_{\mu_1\nu}\alpha_{\rho\mu_2\cdots\mu_p} - \cdots - \Gamma^\rho_{\mu_p\nu}\alpha_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{p-1}\rho}$$

故
$$\partial_\nu\alpha_{\mu_1\cdots\mu_p} = D_\nu\alpha_{\mu_1\cdots\mu_p} + \Gamma^\rho_{\mu_1\nu}\alpha_{\rho\mu_2\cdots\mu_p} - \cdots - \Gamma^\rho_{\mu_p\nu}\alpha_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{p-1}\rho}$$

因为 $\Gamma^\rho_{\mu_1\nu}$ 关于指标 μ_1, ν 对称, 而 $\epsilon^{\nu\mu_1\cdots\mu_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_{p+1}}$ 关于指标 μ_1, ν 反对称, 所以

$$\epsilon^{\nu\mu_1\cdots\mu_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_{p+1}}\Gamma^\rho_{\mu_1\nu} = \cdots = \epsilon^{\nu\mu_1\cdots\mu_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_{p+1}}\Gamma^\rho_{\mu_p\nu} = 0$$

最后

$$(d\alpha)_{\lambda_1\cdots\lambda_{p+1}} = \frac{1}{p!}\epsilon^{\nu\mu_2\cdots\mu_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_{p+1}}D_\nu\alpha_{\mu_1\cdots\mu_p} \tag{57}$$

要计算 $\delta\alpha$, 先从计算 $d*\alpha$ 入手. 利用命题 9, 可知

$$(d*\alpha)_{\lambda_p\cdots\lambda_n} = \frac{1}{(n-p)!}\epsilon^{\nu\mu_1\cdots\mu_{n-p}}_{\lambda_p\lambda\cdots\lambda_n}D_\nu(*\alpha)_{\mu_1\cdots\mu_{n-p}} =$$

$$\frac{1}{(n-p)!}\varepsilon^{\nu\mu_1\cdots\mu_{n-p}}_{\lambda_p\cdots\lambda_n}D_\nu\left(\frac{1}{p!}\eta^{\lambda_1\cdots\lambda_p}_{\mu_1\cdots\mu_{n-p}}\alpha_{\lambda_1\cdots\lambda_p}\right)=$$

$$\frac{1}{p\cdot(n-p)!}\varepsilon^{\nu\mu_1\cdots\mu_{n-p}}_{\lambda_p\cdots\lambda_n}\eta^{\lambda_1\cdots\lambda_p}_{\mu_1\cdots\mu_{n-p}}D_\nu\alpha_{\lambda_1\cdots\lambda_p}$$

$$\begin{aligned}(\delta\alpha)_{\rho_1\cdots\rho_{p-1}}&=(-1)^p(*^{-1}\cdot d*\alpha)_{\rho_1\cdots\rho_{p-1}}=\\&(-1)^{(p-1)(n-p+1)+p}(*\cdot d*\alpha)_{\rho_1\cdots\rho_{p-1}}=\\&(-1)^{(p-1)(n-p+1)+p}\frac{1}{(n-p+1)!}\eta^{\lambda_p\cdots\lambda_n}_{\rho_1\cdots\rho_{p-1}}\cdot\\&(d*\alpha)_{\lambda_p\cdots\lambda_n}=\\&(-1)^{(p-1)(n-p+1)+p}\frac{1}{(n-p+1)!}\eta^{\lambda_p\cdots\lambda_n}_{\rho_1\cdots\rho_{p-1}}\cdot\\&\frac{1}{p!(n-p)!}\varepsilon^{\nu\mu_1\cdots\mu_{n-p}}_{\lambda_p\cdots\lambda_n}\eta^{\lambda_1\cdots\lambda_p}_{\mu_1\cdots\mu_{n-p}}D_\nu\alpha_{\lambda_1\cdots\lambda_p}=\\&\frac{(-1)^p}{p!(n-p)!}\eta^{\nu\mu_1\cdots\mu_{n-p}}_{\rho_1\cdots\rho_{p-1}}\eta^{\lambda_1\cdots\lambda_p}_{\mu_1\cdots\mu_{n-p}}D_\nu\alpha_{\lambda_1\cdots\lambda_p}\end{aligned}$$

置$\nabla^l := Dg^{lr}$.则

$$\begin{aligned}(\delta\alpha)_{\rho_1\cdots\rho_{p-1}}&=\frac{(-1)^p}{p!}\varepsilon^{\lambda_1\cdots\lambda_p}_{\rho_1\cdots\rho_{p-1}\nu}\nabla^\nu\alpha_{\lambda_1\cdots\lambda_p}=\\&-\frac{1}{p!}\varepsilon^{\lambda_1\cdots\lambda_p}_{\nu\rho_1\cdots\rho_{p-1}}\nabla^\nu\alpha_{\lambda_1\cdots\lambda_p}=-\nabla^\nu\alpha_{\nu\rho_1\cdots\rho_{p-1}}\end{aligned}$$

命题 13 若 $\alpha\in A^p(M)$,则

$$(d\alpha)_{\lambda_1\cdots\lambda_{p+1}}=\frac{1}{p!}\varepsilon^{\nu\mu_1\cdots\mu_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_{p+1}}D_\nu\alpha_{\mu_1\cdots\mu_p}$$

$$(\delta\alpha)_{\rho_1\cdots\rho_{p-1}}=-\nabla^\nu\alpha_{\nu\rho_1\cdots\rho_{p-1}}$$

2. 拉普拉斯 - 贝尔特拉米算子

定义 9 线性映射 $\Delta=\delta d+d\delta:A^p(M)\to A^p(M)$ 称为黎曼流形(M,g)上的拉普拉斯 - 贝尔特拉米算子,或简称 Laplacian,即 $\forall\alpha\in A^p(M)$,$(\delta d+d\delta)\alpha\in A^p(M)$.

满足 $\Delta\alpha=0$ 的微分形式 α 称为调和形式.特别地,当 $f\in C^\infty(M)$,即 $f\in A^0(M)=0$ 时,满足 $\Delta f=0$ 的函数 f 称为调和函数.

斯托克斯(Stokes, George Gabriel, 1819—1903),英国物理学家、数学家,生于爱尔兰的斯莱戈郡,卒于剑桥.

命题 14 设(M,g)为紧致、无边界的定向黎曼流形,$\alpha\in A^p(M)$,则

$$\Delta\alpha=0\Leftrightarrow d\alpha=0,\delta\alpha=0$$

证明 首先,$\forall\beta\in A^{p+1}(M)$,我们有

$$d(\alpha\wedge(*\beta))=d\alpha\wedge(*\beta)+(-1)^p\alpha\wedge d(*\beta)$$

两边积分,应用斯托克斯定理,得

$$(d\alpha,\beta)=(-1)^{p+1}\int_M\alpha\wedge d(*\beta)$$

$$\frac{\partial^2\mathscr{U}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathscr{U}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mathscr{U}}{\partial z^2}=0$$

此外，$*(\delta\beta) = (-1)^{p+1}\mathrm{d}(*\beta)$. 因此

$$(\mathrm{d}\alpha,\beta) = \int_M \alpha * (\delta\beta) = (\alpha,\delta\beta) \tag{58}$$

利用 ⑱，有

$$(\Delta\alpha,\alpha) = (\mathrm{d}\delta\alpha + \delta\mathrm{d}\alpha,\alpha) = (\mathrm{d}\delta\alpha,\alpha) + (\delta\mathrm{d}\alpha,\alpha) = (\delta\alpha,\delta\alpha) + (\mathrm{d}\alpha,\mathrm{d}\alpha)$$

因为右边两项都大于0，故当 $\Delta\alpha = 0$ 时，必须 $\mathrm{d}\alpha = 0, \delta\alpha = 0$. 其逆显然成立，证毕.

推论 设 (M,g) 是紧致、无边界的定向黎曼流形，$\alpha,\beta \in A^p(M), 0 \leqslant p \leqslant n$，则

$$(\Delta\alpha,\beta) = (\alpha,\Delta\beta) \tag{59}$$

根据命题 ⑭ 及其推论，知 Δ 是一个正定的椭圆型的自共轭算子.

利用命题 ⑬，知

$$(\mathrm{d}\alpha)_{j_1\cdots j_{p+1}} = \frac{1}{p!}\varepsilon^{ki_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_{p+1}} D_k\alpha_{i_1\cdots i_p}$$

$$(\delta\alpha)_{i_2\cdots i_p} = -D_l\alpha^l_{i_2\cdots i_p} = -D_l g^{lk}\alpha_{ki\ldots i_p} = -\nabla^k\alpha_{ki_2\cdots i_p}$$

因此

$$(\delta\mathrm{d}\alpha)_{j_1\cdots j_p} = -\frac{1}{p!}\varepsilon^{ki_1\cdots i_p}_{lj_1\cdots j_p}\nabla^l D_k\alpha_{i_1\cdots i_p} \tag{60}$$

当 $l = k$ 时，⑳ 中相应的项为 $-\nabla^k D_k\alpha_{j_1\cdots j_p}$. 当 l 取指标 i 中某一个时，得到项 $\frac{1}{(p-1)!}\varepsilon^{ki_2\cdots i_p}_{j_1\cdots j_p}\nabla^l D_k\alpha_{li_2\cdots i_p}$. 故有

$$(\delta\mathrm{d}\alpha)_{j_1\cdots j_p} = -\nabla^k D_k\alpha_{j_1\cdots j_p} + \frac{1}{(p-1)!}\varepsilon^{ki_2\cdots i_p}_{j_1\cdots j_p} D_l D_k\alpha^l_{i_2\cdots i_p} \tag{61}$$

另一方面

$$(\mathrm{d}\delta\alpha)_{j_1\cdots j_p} = -\frac{1}{(p-1)!}\varepsilon^{ki_2\cdots i_p}_{j_1\cdots j_p} D_k D_l\alpha^l_{i_2\cdots i_p} \tag{62}$$

结合 ㉑ 与 ㉒ 两式，得

$$(\Delta\alpha)_{j_1\cdots j_p} = -\nabla^k D_k\alpha_{j_1\cdots j_p} + \frac{1}{(p-1)!}\varepsilon^{ki_2\cdots i_p}_{j_1\cdots j_p}(D_l D_k\alpha^l_{i_2\cdots i_p} - D_k D_l\alpha^l_{i_2\cdots i_p}) \tag{63}$$

利用 Ricci 恒等式

$$D_l D_k\alpha^l_{i_2\cdots i_p} - D_k D_l\alpha^l_{i_2\cdots i_p} = R^l_{rlk}\alpha^r_{i_2\cdots i_p} - \sum_{s=2}^{p} R^r_{i_s lk}\alpha^l_{i_2\cdots i_{s-1}ri_{s+1}\cdots i_p}$$

用 ρ_{kl} 表示 Ricci 张量，则

$$(\Delta\alpha)_{j_1\cdots j_p} = -\nabla^k D_k\alpha_{j_1\cdots j_p} + \frac{1}{(p-1)!}\varepsilon^{ki_2\cdots i_p}_{j_1\cdots j_p}\rho_{kl}\alpha^l_{i_2\cdots i_p} + T_{j_1\cdots j_p} \tag{64}$$

$$T_{j_1\cdots j_p} = -\frac{1}{(p-1)!}\epsilon_{j_1\cdots j_p}^{ki_2\cdots i_p}\sum_{s=2}^{p} R_{i_s lk}^{r}\alpha_{i_2\cdots i_{s-1} r i_{s+1}\cdots i_p}^{l} =$$

$$-\frac{1}{(p-2)!}\epsilon_{j_1\cdots j_p}^{kmi_3\cdots i_p}R_{nmlk}\alpha_{i_3\cdots i_p}^{ln}$$

利用 Bianchi 恒等式

$$R_{klmn} + R_{kmnl} + R_{knlm} = 0$$

可知
$$T_{j_1\cdots j_p} = -\frac{1}{2(p-2)!}\epsilon_{j_1\cdots j_p}^{kmi_3\cdots i_p}R_{kmln}\alpha_{i_3\cdots i_p}^{ln}$$

由此可写成命题形式

命题 15 设 $\alpha \in A^p(M)$,则

$$(\Delta\alpha)_{j_1\cdots j_p} = -\nabla^k D_k\alpha_{j_1\cdots j_p} + \frac{1}{(p-1)!}\epsilon_{j_1\cdots j_p}^{ki_2\cdots i_p}\rho_{kl}\alpha_{i_2\cdots i_p}^{l} -$$

$$\frac{1}{2(p-2)!}\epsilon_{j_1\cdots j_p}^{kli_3\cdots i_p}R_{klmn}\alpha_{i_3\cdots i_p}^{mn}$$

我们有推广的博赫纳 – 利什内罗维奇公式.

命题 16 $\forall \alpha \in A^p(M)$,有

$$-\frac{1}{2}\Delta(|\alpha|^2) = |D\alpha|^2 - (\alpha \mid \Delta\alpha) + WBL(R,\alpha)$$

上式中 $WBL(R,\alpha)$ 关于 α 是二次的,关于曲率张量 R 是线性的式子.

命题 17 $\forall \alpha \in A^p(M)$,有

$$\delta\cdot\Delta = \Delta\cdot\delta, \mathrm{d}\cdot\Delta = \Delta\cdot\mathrm{d}$$

证明 因为 $\mathrm{d}^2 = 0, \delta^2 = 0$. 故

$$\delta\cdot\Delta\alpha = \delta\cdot(\mathrm{d}\delta + \delta\mathrm{d})\alpha = \delta\cdot\mathrm{d}\cdot\delta\alpha = (\delta\mathrm{d} + \mathrm{d}\delta)\delta\alpha = \Delta\delta\cdot\alpha$$

因此,$\delta\cdot\Delta = \Delta\cdot\delta$.

类似地 $\mathrm{d}\cdot(\Delta\alpha) = \mathrm{d}\cdot(\mathrm{d}\delta + \delta\mathrm{d})\alpha = \mathrm{d}\cdot\delta\cdot\mathrm{d}\alpha = (\mathrm{d}\delta + \delta\mathrm{d})\mathrm{d}\alpha = \Delta\cdot\mathrm{d}\alpha$,故 $\mathrm{d}\cdot\Delta = \Delta\cdot\mathrm{d}$,证毕.

第六十三回　基本场　客观世界有度量[①]
算子众　黎曼流形为舞台

我们已经熟悉了微分流形的基本概念，以及在微分结构的基础上能够定义的一些对象，如光滑函数、光滑切向量场、光滑张量场和外微分式等等．但是，微分流形作为大范围分析的舞台，往往需要在微分流形上指定一个基本的度量张量场．换言之，在实际应用中常常是以黎曼流形作为舞台的．究其原因，首先，客观世界是有度量的，作为欧氏空间的推广应该是黎曼流形，它在每一点的切空间上有欧氏度量．其次，从技术上来讲由于指定了基本度量张量，切向量场可以转化为对偶的一次微分式（余切向量场），张量场的协变指标与反变指标可以互相转换，线性算子可以转换成对偶的线性算子．总之，基本度量张量场可用以建立某些对象与其对偶的对象的联系，为构造流形上的不变量提供了有力的手段．另外，基本度量张量场的存在使人们能够对 M 上的光滑张量场求协变微分，得到协变阶数增加 1 的张量场，从而能对张量场继续求微分，获得张量场的高阶协变微分．若只考虑流形的微分结构，而没有流形上的黎曼结构，这一切是做不到的．

以下我们总是假设 (M,g) 是有向的 m 维黎曼流形，其中 g 是基本度量张量场．本节的目的是介绍黎曼流形上若干重要的微分算子，它们在许多分支学科中扮演重要的角色．

用 D 表示黎曼流形 (M,g) 上的协变微分算子．设 $X\in\mathscr{X}(M)$，则 $\mathrm{D}X$ 是 M 上光滑的 $(1,1)$ 型张量场．将 $\mathrm{D}X$ 作缩并，便得到 M 上的一个光滑函数，记为

$$\mathrm{div}\ X = C_1^1(\mathrm{D}X) \tag{①}$$

其中 C_1^1 表示张量场关于第一个反变指标和第一个协变指标的缩并．

很明显，div 作为从 $\mathscr{X}(M)$ 到 $C^\infty(M)$ 的映射是线性的．

定义 1　线性映射 $\mathrm{div}:\mathscr{X}(M)\to C^\infty(M)$ 称为黎曼流形 (M,g) 上的散度算子．设 $X\in\mathscr{X}(M)$，则称 $\mathrm{div}\ X$ 为切向量场 X 的散度．

我们来求散度算子 div 的局部坐标表达式．设 $(U;x^i)$ 是 M 的一个局部坐标系，令

$$X|_U = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$$

则

$$X^i_{,j} = \frac{\partial X^i}{\partial x^j} + X^k\Gamma^i_{kj}$$

---

① 本回引自文献[140]．

其中 Γ^i_{kj} 是度量张量 $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$ 的克里斯托费尔记号. 因此

$$\operatorname{div} X = X^i_{,i} = \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + X^k \Gamma^i_{ki} \qquad ②$$

对于切向量场 X 的分量而言,散度算子 div 是一阶微分算子.

克里斯托费尔(Christoffel, Elwin Bruno, 1829—1900),德国数学家,生于亚琛附近的蒙茹瓦,卒于斯特拉斯堡.

由克里斯托费尔记号的表达式可知

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{G} \cdot \frac{\partial G}{\partial x^k} = \frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial x^k} \qquad ③$$

其中 $G = \det(g_{ij})$. 注意,函数 G 本身在坐标变换下不是不变量,故它不是在 M 上大范围定义的光滑函数. 这样,式 ② 成为

$$\operatorname{div} X = \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \frac{X^k}{\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial x^k} = \frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{G} X^i) \qquad ④$$

现设 $f \in C^\infty(M)$,则 $\mathrm{d}f$ 是 M 上的 1 次微分式. 利用基本度量张量 g,可以得到与 $\mathrm{d}f$ 对偶的光滑切向量场 ∇f,称为函数 f 的梯度. 将散度算子 div 用于切向量场 ∇f,便得到从 $C^\infty(M)$ 到 $C^\infty(M)$ 的线性映射,记作 $\widetilde{\Delta}: C^\infty(M) \to C^\infty(M)$,即对于任意的 $f \in C^\infty(M)$,有

$$\widetilde{\Delta} f = \operatorname{div}(\nabla f) \qquad ⑤$$

定义 2 线性映射 $\widetilde{\Delta}: C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ 称为黎曼流形 (M, g) 上的贝尔特拉米 – 拉普拉斯算子.

在下面我们还要介绍霍奇 – 拉普拉斯算子,记为 Δ. 这两个算子作用在光滑函数上时只差一个符号. 为了区分这两个算子,所以我们把贝尔特拉米 – 拉普拉斯算子记为 $\widetilde{\Delta}$. 从定义式 ⑤ 可知,贝尔特拉米 – 拉普拉斯算子 $\widetilde{\Delta}$ 是作用在光滑函数 f 上的 2 阶微分算子.

在局部坐标系 $(U; x^i)$ 下,我们有

$$\mathrm{d}f|_U = \frac{\partial f}{\partial x^i} \mathrm{d}x^i$$

所以

$$\nabla f|_U = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad ⑥$$

其中

$$v^i = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \qquad ⑦$$

代入式 ⑥ 得到

$$\widetilde{\Delta} f = \frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{G} v^i) = \frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{G} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}\right) \qquad ⑧$$

贝尔特拉米 - 拉普拉斯算子还有另一个来源. 设 $f \in C^\infty(M)$, 则 $df \in A^1(M) = \mathscr{T}_1^0(M)$. 对 1 阶协变张量场 df 再作一次协变微分得到 2 阶协变张量场, 记为 $H(f) = D(df) \in \mathscr{T}_2^0(M)$.

在局部坐标系 $(U; x^i)$ 下, 设

$$df = f_i dx^i$$

其中 $f_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$, 则

$$f_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x^j} - f_k \Gamma_{ij}^k = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial f}{\partial x^k}\Gamma_{ij}^k \quad ⑨$$

由此可见
$$f_{i,j} = f_{j,i}$$
故 2 阶协变张量 $H(f)$ 是对称的, 其表达式是

$$H(f)\mid_U = f_{i,j} dx^j \otimes dx^i \quad ⑩$$

定义 3 线性映射 $H: C^\infty(M) \to \mathscr{T}_2^0(M)$ 称为黎曼流形 (M, g) 上的 Hessian 算子. 对于任意的 $f \in C^\infty(M)$, $H(f)$ 是 M 上对称的 2 阶协变张量场, 称为 f 的 Hessian.

容易证明

$$\widetilde{\Delta} f = g^{ij} f_{i,j} \quad ⑪$$

即 $\widetilde{\Delta} f$ 是度量张量 g^{ij} 与 f 的 Hessian, $(H(f))_{ij} = f_{i,j}$ 作缩并的结果.

莫尔斯 (Morse, Harold Marston, 1829—1977), 美国数学家, 生于缅因州沃特维尔.

米尔诺 (Milnor, John Willard, 1931—), 美国数学家, 生于新泽西州奥伦治.

顺便提一句, 微分式 df 的零点 (称为光滑函数 f 的临界点) 与对偶切向量场 ∇f 的零点 (称为切向量场 ∇f 的奇点) 是一致的. 若在点 $p \in M$, $df(p) = 0$, 但是 $(H(f))(p) \neq 0$, 则称 p 是 f 的非退化临界点. 此时, $(H(f))_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$ 正好是函数 f 关于局部坐标的 2 次偏微商. 在作适当的坐标变换之后, f 在点 p 附近可以写成标准的形式

$$f = f(p) - (x^1)^2 - \cdots - (x^r)^2 + (x^{r+1})^2 + \cdots + (x^n)^2$$

这里的 r 与坐标系的选取是无关的, 称为 f 在非退化临界点 p 的指标. f 的非退化临界点必定是孤立的. 在紧致的光滑流形上存在只有非退化临界点的光滑函数, 这种函数称为莫尔斯函数. 微分流形上莫尔斯函数的临界点理论是研究微分流形拓扑的一个重要方面, 在非线性分析中也有重要的应用. 根据紧致光滑流形上有孤立奇点的光滑切向量场的霍普夫定理, M 上的莫尔斯函数的临界点的性状与流形本身的拓扑有密切的联系, 这在米尔诺的书中有详细的叙述.

定义 4 设 $f \in C^\infty(M)$, 若函数 f 满足方程

$$\widetilde{\Delta} f = 0 \quad ⑫$$

则称 f 是黎曼流形 (M, g) 上的调和函数. 一般地, 若有常数 λ 使得 f 满足方程

$$\widetilde{\Delta} f = -\lambda f \qquad ⑬$$

则称 λ 是黎曼流形 (M, g) 的一个特征值，函数 f 称为对应于特征值 λ 的特征函数.

当 (M, g) 是紧致黎曼流形时，它的特征值是离散的

$$0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \cdots \to \infty$$

称为黎曼流形 (M, g) 的谱. M 上的调和函数恰好是对应于 $\lambda_1 = 0$ 的特征函数. 黎曼流形 (M, g) 的谱，各个特征值的重数是黎曼流形的重要的不变量. 谱问题及有关的热方程的研究是大范围黎曼几何在当前的研究课题.

在有向的黎曼流形 (M, g) 上有体积元素，这是一个 m 次外微分式 Ω，它在定向相符的局部坐标系 $(U; x^i)$ 下的表达式是

$$\Omega|_U = \sqrt{G}\,\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^m \qquad ⑭$$

其中 $G = \det(g_{ij})$. 上式右端的表达式在保持定向的坐标变换下是不变的. 因此，M 上任意一个有紧支集的光滑函数 f 能够在 M 上积分，它就是 m 次外微分式 $f\Omega$ 在 M 上的积分 $\int_M f\Omega$.

作为斯托克斯定理的推论，我们有

定理 1 设 (M, g) 是 m 维有向的紧致无边黎曼流形，则对于 M 上任意一个光滑的切向量场 X 有

$$\int_M (\operatorname{div} X)\Omega = 0 \qquad ⑮$$

证明 由式 ④ 得到

$$(\operatorname{div} X)\Omega = \frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{G}X^i)\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^m =$$

$$d\Big(\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}\sqrt{G}X^i\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^m\Big) \qquad ⑯$$

令

$$\omega = \sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}\sqrt{G}X^i\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^m \qquad ⑰$$

容易验证 ω 的表达式 ⑰ 与 M 上定向相符的局部坐标系的选取无关，因而 ω 是在 M 上大范围定义的 $m-1$ 次外微分式. 式 ⑯ 成为

$$(\operatorname{div} X)\Omega = \mathrm{d}\omega \qquad ⑱$$

由斯托克斯定理，我们得到

$$\int_M (\operatorname{div} X)\Omega = \int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M}\omega = 0$$

若定理 1 中的黎曼流形是带边流形，则我们能得到更精细的结果.

定理 2 设 (M, g) 是 m 维有向的紧致带边黎曼流形，则对于 M 上任意一

个光滑切向量场 X 有

$$\int_M (\mathrm{div}\ X)\Omega = -\int_{\partial M} g(N, X)\widetilde{\Omega} \qquad ⑲$$

其中 N 是 ∂M 上指向内的单位法向量，∂M 有从 M 诱导的定向，$\widetilde{\Omega}$ 是 ∂M 的体积元素.

证明　如定理 1 的证明所述

$$(\mathrm{div}\ X)\Omega = \mathrm{d}\omega$$

其中 ω 是式 ⑰ 给出的 $m-1$ 次外微分式. 由斯托克斯定理得到

$$\int_M (\mathrm{div}\ X)\Omega = \int_{\partial M} \omega \qquad ⑳$$

其中 ∂M 具有 M 诱导的定向.

为了把 $\omega|_{\partial M}$ 表示出来，取定向相符的局部坐标系 $(U; x^i)$，使得 $U \cap \partial M \neq \varnothing$，即

$$U \cap \partial M = \{p \in U \mid x^m(p) = 0\}$$

且在 U 内有 $x^m \geqslant 0$. 这样，在 $U \cap \partial M$ 上有诱导定向的局部坐标系是由 $(-1)^m \cdot x^1, x^2, \cdots, x^{m-1}$ 给出的，于是在 $U \cap \partial M$ 上诱导的体积元素是

$$\widetilde{\Omega} = (-1)^m \sqrt{\widetilde{G}}\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{m-1} \qquad ㉑$$

其中 $\widetilde{G} = \det(g_{\alpha\beta}), 1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant m-1$. 由 ω 的表达式 ⑰ 得到

$$\omega|_{U \cap \partial M} = (-1)^{m+1}\sqrt{G}X^m \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{m-1} \qquad ㉒$$

现在，$(-1)^m \dfrac{\partial}{\partial x^1}, \dfrac{\partial}{\partial x^2}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial x^{m-1}}$ 构成 $\partial M \cap U$ 上定向相符的标架场. 假设 N 是在 ∂M 上指向内的单位法向量场，故可令

$$N = a^i \frac{\partial}{\partial x^i}, a^m > 0 \qquad ㉓$$

由假设得到

$$\begin{cases} g\left(N, \dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}\right) = a^i g_{i\alpha} = 0 \\ g(N, N) = a^m a^i g_{im} = 1 \end{cases} \qquad ㉔$$

因此

$$a^m a^i = g^{mi}$$

$$a^i = \frac{g^{mi}}{\sqrt{g^{mm}}} \qquad ㉕$$

由 ㉔，㉕ 两式得到

$$g_{\alpha m} = -\frac{a^\gamma}{a^m} g_{\alpha\gamma} = -\frac{g^{\gamma m}}{g^{mm}} g_{\alpha\gamma} \qquad ㉖$$

因此

$$G = \det\begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1m-1} & g_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_{m-11} & \cdots & g_{m-1m-1} & g_{m-1m} \\ g_{m1} & \cdots & g_{mm-1} & g_{mm} \end{pmatrix} =$$

$$\det\begin{pmatrix} g_{\alpha\beta} & 0 \\ * & g_{mn} + \frac{g^{m\gamma}}{g^{mm}g_{m\gamma}} \end{pmatrix} =$$

$$\widetilde{G}\frac{1}{g^{mm}} = \widetilde{G}\frac{1}{(a^m)^2}$$

$$\sqrt{G} = \frac{\sqrt{\widetilde{G}}}{a^m} \quad ㉗$$

另一方面我们有

$$g(N,X) = X^m a^i g_{im} = \frac{X^m}{a^m} \quad ㉘$$

所以

$$\omega|_{U\cap\partial M} = (-1)^{m+1}\sqrt{\widetilde{G}}\frac{X^m}{a^m}\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{m-1} =$$

$$-g(N,X)\cdot\widetilde{\Omega}|_{U\cap\partial M} \quad ㉙$$

将上式代入 ㉒ 便得到所要的结果.

推论 1 设(M,g)是 m 维有向的紧致带边黎曼流形,则对于任意的 $f \in C^\infty(M)$ 有

$$\int_M(\widetilde{\Delta}f)\Omega = -\int_{\partial M}N(f)\widetilde{\Omega} \quad ㉚$$

其中 N 是 ∂M 的指向内的单位法向量,∂M 有从 M 诱导的定向. 特别是,当 $\partial M = \varnothing$ 时

$$\int_M(\widetilde{\Delta}f)\Omega = 0 \quad ㉛$$

证明 这是定理 2 的直接推论. 因为由定义

$$\widetilde{\Delta}f = \mathrm{div}(\nabla f)$$

故只要将定理 2 用于切向量场 ∇f 就可以了. 此时

$$g(N,\nabla f) = g_{ij}a^i(g^{jk}f_k) = a^i\frac{\partial f}{\partial x^i} = N(f) \quad ㉜$$

除了对于光滑函数 f 有如上所定义的贝尔特拉米 - 拉普拉斯算子 $\widetilde{\Delta}$ 之外,对于 M 上的任意的外微分式还能定义霍奇 - 拉普拉斯算子. 我们在这个课程

中只限于简要地介绍它的定义及其初等的性质.

首先,对于黎曼流形(M,g)上两个r次外微分式能够定义它们的内积.设$\varphi,\psi\in A^r(M)$,在局部坐标系$(U;x^i)$下,它们的表达式为

$$\varphi|_U = \frac{1}{r!}\varphi_{i_1\cdots i_r}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}$$

$$\psi|_U = \frac{1}{r!}\psi_{i_1\cdots i_r}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}$$

用g_{ij}记基本度量张量g的分量,$g_{ij}=g\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$,则令

$$\langle\varphi,\psi\rangle = \frac{1}{r!}\varphi^{i_1\cdots i_r}\psi_{i_1\cdots i_r} = \sum_{i_1<\cdots<i_r}\varphi^{i_1\cdots i_r}\psi_{i_1\cdots i_r} \tag{33}$$

其中

$$\varphi^{i_1\cdots i_r} = \varphi_{j_1\cdots j_r}g^{j_1i_1}\cdots g^{j_ri_r}$$

由于φ,ψ都是张量场,所以式㉝的右边与坐标系的选择是无关的,故$\langle\varphi,\psi\rangle$是$M$上大范围定义的光滑函数.特别是,外微分式$\varphi$在每一点的模长平方是

$$|\varphi|^2 = \langle\varphi,\varphi\rangle = \frac{1}{r!}\varphi^{i_1\cdots i_r}\varphi_{i_1\cdots i_r} \geqslant 0 \tag{34}$$

以下假定(M,g)是m维有向的紧致黎曼流形,于是在$A^r(M)$中可以定义内积如下,即

$$(\varphi,\psi) = \int_M\langle\varphi,\psi\rangle\Omega \tag{35}$$

$$\|\varphi\|^2 = \int_M\langle\varphi,\varphi\rangle\Omega \tag{36}$$

我们已经知道外微分d是线性映射$d:A^r(M)\to A^{r+1}(M)$. $A^r(M)$作为内积空间,自然可以定义d的共轭映射$\delta:A^{r+1}(M)\to A^r(M)$,使得

$$(d\varphi,\psi) = (\varphi,\delta\psi) \tag{37}$$

其中$\varphi\in A^r(M)$, $\psi\in A^{r+1}(M)$.我们的目标是求出共轭线性映射δ的表达式.为此,先定义霍奇星算子 $*:A^r(M)\to A^{m-r}(M)$.

设$(U;x^i)$是M的定向相符的局部坐标系;$\omega\in A^r(M)$,设ω的局部坐标表达式是

$$\omega|_U = \frac{1}{r!}\omega_{i_1\cdots i_r}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}$$

令

$$*\omega|_U = \frac{1}{(m-r)!}\frac{\sqrt{G}}{r!}\delta^{1\cdots m}_{i_1\cdots i_m}\omega^{i_1\cdots i_r}dx^{i_{r+1}}\wedge\cdots\wedge dx^{i_m} \tag{38}$$

容易证明,上式的右端在保持定向的坐标变换下是不变的(如对照体积元素Ω的表达式⑭,则上述断言是明显成立的).因此,$*\omega$是在整个M上定义的$m-r$次外微分式.

定义 5 线性映射 $*: A^r(M) \to A^{m-r}(M)$ 称为有向黎曼流形 (M,g) 上的霍奇星算子.

命题 1 设 (M,g) 是有向紧致的 m 维黎曼流形,则霍奇星算子 $*$ 有以下性质.

(1) 对任意的 $\varphi,\psi \in A^r(M)$ 有

$$\varphi \wedge *\psi = \langle \varphi,\psi \rangle \Omega \tag{39}$$

(2) $*\Omega = 1, *1 = \Omega$;

(3) 对任意的 $\varphi \in A^r(M)$ 有

$$* \circ * \varphi = (-1)^{m+r}\varphi$$

即

$$* \circ * = (-1)^{m+r} \cdot \mathrm{id}: A^r(M) \to A^r(M) \tag{40}$$

(4) 对任意的 $\varphi,\psi \in A^r(M)$ 有

$$(*\varphi, *\psi) = (\varphi,\psi) \tag{41}$$

最后的式子表明,霍奇星算子 $*$ 是从内积空间 $A^r(M)$ 到 $A^{m-r}(M)$ 的等距同构.

例 1 霍奇星算子 $*$ 在 $\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_r}$ 上的作用.

外微分式 $\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_r}$ 的标准表达式为

$$\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_r} = \frac{1}{r!}\delta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r}\mathrm{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_r}$$

其分量为 $\delta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r}$. 由式 ㊳ 得到

$$\begin{aligned}
&*\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_r} = \\
&\frac{1}{(m-r)!} \cdot \frac{\sqrt{G}}{r!}\delta^{1\cdots m}_{j_1\cdots j_m} g^{j_1k_1}\cdots g^{j_rk_r}\delta^{i_1\cdots i_r}_{k_1\cdots k_r}\mathrm{d}x^{j_{r+1}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_m} = \\
&\frac{\sqrt{G}}{(m-r)!} \cdot \frac{1}{r!}\delta^{1\cdots m}_{j_1\cdots j_m} \cdot \begin{vmatrix} g^{j_1i_1} & \cdots & g^{j_1i_r} \\ \vdots & & \vdots \\ g^{j_ri_1} & \cdots & g^{j_ri_r} \end{vmatrix} \mathrm{d}x^{j_{r+1}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_m} = \\
&\sqrt{G} \sum_{\substack{j_1<\cdots<j_r \\ j_{r+1}<\cdots<j_m}} \delta^{1\cdots m}_{j_1\cdots j_m} \begin{vmatrix} g^{i_1j_1} & \cdots & g^{i_rj_1} \\ \vdots & & \vdots \\ g^{i_1j_r} & \cdots & g^{i_rj_r} \end{vmatrix} \mathrm{d}x^{j_{r+1}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_m}
\end{aligned}$$

例 2 设 M 是 $\mathbf{R}^3$ 中一张正则曲面,它的第一基本形式为

$$I = g_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^\alpha \wedge \mathrm{d}u^\beta, 1 \leqslant \alpha,\beta \leqslant 2$$

那么由例 1 的公式得到

$$*\mathrm{d}u^1 = \sqrt{G}(g^{11}\mathrm{d}u^2 - g^{12}\mathrm{d}u^1) = \frac{1}{\sqrt{G}}(g_{22}\mathrm{d}u^2 + g_{12}\mathrm{d}u^1)$$

$$*\mathrm{d}u^2 = \sqrt{G}(g^{21}\mathrm{d}u^2 - g^{22}\mathrm{d}u^1) = -\frac{1}{\sqrt{G}}(g_{21}\mathrm{d}u^2 + g_{11}\mathrm{d}u^1)$$

其中 $$G = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$$

另外 $$*1 = \sqrt{G}\mathrm{d}u^1 \wedge \mathrm{d}u^2$$

$$*(\mathrm{d}u^1 \wedge \mathrm{d}u^2) = \frac{1}{\sqrt{G}}$$

例 3 设 $\{\omega^i\}$ 是有向黎曼流形 (M,g) 上定向相符的单位正交余切标架场，则

$$g = \sum_i \omega^i \otimes \omega^i$$

体积元素为 $$\Omega = \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^m$$

并且 $$\{\omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_r} \mid i_1 < \cdots < i_r\}$$

是处处单位正交的. 此时，霍奇星算子的公式比较简单. 我们有

$$*(\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^r) = \omega^{r+1} \wedge \cdots \wedge \omega^m$$

一般地 $$*(\omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_r}) = \delta^{i_1\cdots i_m}_{1\cdots m}\omega^{i_{r+1}} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_m}$$

其中 $i_1 < \cdots i_r$，且 $i_{r+1} < \cdots < i_m$ 是 $i_1, \cdots, i_r$ 在 $1, \cdots, m$ 中的互补指标.

特别是，如果 $m = 2$，则

$$*\omega^1 = \omega^2, *\omega^2 = -\omega^1$$

$$*1 = \omega^1 \wedge \omega^2, *(\omega^1 \wedge \omega^2) = 1$$

定义 6 设 (M,g) 是 m 维有向黎曼流形，线性映射

$$\delta = (-1)^{mr+m+1} * \circ \mathrm{d} \circ * : A^r(M) \to A^{r-1}(M)$$

称为 M 上的余微分算子. 显然，$\delta \circ \delta = 0$.

余微分算子的局部表达式是比较复杂的. 在实际应用中，通常是把余微分算子表示成协变微分算子. 我们把外微分 d 和余微分 δ 用协变微分表示的结果列在下面.

命题 2 设 (M,g) 是有向的 m 维黎曼流形，$(U;x^i)$ 是定向相符的局部坐标系，$\varphi \in A^r(M)$ 的局部坐标表示式是

$$\varphi|_U = \frac{1}{r!}\varphi_{i_1\cdots i_r}\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_r}$$

则

$$\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}x^i \wedge D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\varphi =$$

$$\frac{1}{(r+1)!}\left(\sum_{\alpha=1}^{r+1}(-1)^{\alpha+1}\varphi_{i_1\cdots\hat{i}_\alpha\cdots i_{r+1},i_\alpha}\right)\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_{r+1}} \qquad ⑫$$

$$\delta\varphi = -g^{ij} \cdot i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\left(D_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\varphi\right) = -\frac{1}{(r-1)!}\varphi^{i}_{i_1\cdots i_{r-1},i}\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_{r-1}} \qquad ⑬$$

其中 $i(X): A^r(M) \to A^{r-1}(M)$ 称为对切向量场 X 作内乘，其定义是：对于任意的 $\omega \in A^r(M)$，及 $V_1, \cdots, V_{r-1} \in \mathscr{X}(M)$ 有

$$(i(X)\omega)(V_1,\cdots,V_{r-1}) = \omega(X,V_1,\cdots,V_{r-1})$$

命题 3 设(M,g)是 m 维有向紧致的黎曼流形，则外微分 $d: A^r(M) \to A^{r+1}(M)$ 和余微分 $\delta: A^{r+1}(M) \to A^r(M)$ 是关于内积$(,)$的互为共轭的线性算子.

证明 设 $\varphi \in A^r(M)$，$\psi \in A^{r+1}(M)$，则

$$\begin{aligned} d(\varphi \wedge *\psi) &= d\varphi \wedge *\psi + (-1)^r \varphi \wedge d*\psi = \\ &\quad d\varphi \wedge *\psi + (-1)^{m}\varphi \wedge *(*d*\psi) = \\ &\quad d\varphi \wedge *\psi - \varphi \wedge *\delta\psi \end{aligned} \tag{44}$$

由斯托克斯定理得到

$$\int_M d\varphi \wedge *\psi = \int_M \varphi \wedge *\delta\psi$$

即

$$(d\varphi,\psi) = (\varphi,\delta\psi) \tag{45}$$

在获得式㊹的过程中需要对 δ 的符号规定特别予以关注，这些复杂的规定是要保证式㊹成立，从而保证 d,δ 是互为共轭的线性算子.

定义 7 设(M,g)是 m 维有向黎曼流形，$\Delta = d\delta + \delta d: A^r(M) \to A^r(M)$ 称为霍奇 – 拉普拉斯算子.

我们考察霍奇 – 拉普拉斯算子对于光滑函数 $f \in A^0(M)$ 的作用. 则可知 $\delta f = 0$. 所以

$$\Delta f = \delta(df) = -*d*df$$
$$(\Delta f)\Omega = *\Delta f = -d*df$$

取 M 的定向相符的局部坐标系$(U;x^i)$，则

$$df|_U = \frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i$$

$$\begin{aligned} *df|_U &= \frac{1}{(m-1)!}\sqrt{G}\delta^{1\cdots m}_{i_1\cdots i_m} g^{i_1 j}\frac{\partial f}{\partial x^j}dx^{i_2}\wedge\cdots\wedge dx^{i_m} = \\ &\quad \sqrt{G}\sum_{i=1}^m(-1)^{i+1}\frac{\partial f}{\partial x^j}g^{ij}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^i\wedge\cdots\wedge dx^m \end{aligned}$$

所以 $$d*df|_U = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{G}g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m = (\tilde{\Delta}f)\Omega|_U$$

可见

$$\Delta f = -\tilde{\Delta}f \tag{46}$$

因此，霍奇 – 拉普拉斯算子作用在光滑函数上时与贝尔特拉米 – 拉普拉斯算子只差一个符号.

定义 8 设(M,g)是 m 维有向黎曼流形，若 $\omega \in A^r(M)$ 满足方程

$$\Delta\omega = 0$$

则称 ω 为调和形式.

假定 M 是紧致的,则由霍奇 - 拉普拉斯算子的定义,以及命题 3,我们有

$$(\Delta\omega,\omega)=((\mathrm{d}\delta+\delta\mathrm{d})\omega,\omega)=(\mathrm{d}\delta\omega,\omega)+(\delta\mathrm{d}\omega,\omega)=$$
$$(\delta\omega,\delta\omega)+(\mathrm{d}\omega,\mathrm{d}\omega)$$

由此可见,在有向的紧致黎曼流形上,r 次外微外式 ω 是调和形式的充分必要条件是:$\mathrm{d}\omega=0$,且 $\delta\omega=0$,也就是 ω 是闭微分式,同时也是余闭微分式. 调和形式 ω 作为闭微分式,是它所属于的 de Rham 上同调类的一个代表. 更要紧的是有下面的大范围分析中的著名定理.

霍奇命题 设 (M,g) 是 m 维有向的紧致黎曼流形,则对每一 $r,0\leqslant r\leqslant m$,deRham 上同调群 $H^r(M)$ 是有限维的,并且 $H^r(M)$ 中的每个元素都有 M 上的唯一的一个 r 次调和形式作为它的代表.

如果用更加通俗的语言,霍奇定理的断言是:对于 M 上的每一个闭微分式 ω,必有 M 上唯一的一个调和形式 $\tilde{\omega}$,使得 $\tilde{\omega}-\omega$ 是恰当微分式,即在 M 上存在外微分式 τ,使得

$$\tilde{\omega}-\omega=\mathrm{d}\tau$$

德拉姆(de Rham, Georges-William, 1903—1969),比利时数学家.

如果用 $\mathscr{H}^r(M)$ 表示 M 上全体 r 次调和形式构成的集合

$$\mathscr{H}^r(M)=\{\omega\in A^r(M)\mid\Delta\omega=0\}$$

它自然是一个向量空间. 那么,霍奇定理说 $\mathscr{H}^r(M)$ 与 M 的第 r 个德拉姆上同调群 $H^r(M)$ 是同构的.

霍奇定理的证明要用到微分流形上椭圆微分算子的理论.

复分析篇

第十一章

第六十四回 复分析 单叶函数历史久[①]
多连通 迪氏问题可解出

单连通区域内单叶函数的研究中,Löwner 参数表示法和 Schiffer-Goluzin 的变分法是有力的工具. П. П. Куфарев 及 Н. А. Лбедев 分别把变分方法、参数表示法推广到二连通区域. 杨维奇更进一步把这两种方法扩充到任意有限连通区域. 他还讨论了一类可微泛函的极值问题,拓广了 Г. Shlionsky 的结果. 为了建立变分法和参数表示法的有关定理,规定 z 平面上的 n 连通区域族 $G(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$,满足以下条件:

(1) $0, \infty \notin G(t)$;

(2) $G(t)$ 的边界 $\Gamma(t)$ 是 n 个互不相交的闭若尔当曲线 $z = Q_m(\theta, t)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $m = 1, 2, \cdots, n$;

(3) 函数 $Q_m(\theta, t)$ 对 t 在 $t = t_0$ 关于区间 $[0, 2\pi]$ 一致可微, $t_0 \in [a, b]$ 是定值;

(4) n 个曲线 $\Gamma(t)$ 解析.

定义在 $G(t)$ 上的解析单叶函数族 $\omega = F(z, t)$,假定其像区域族 $B(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ 满足以下条件:

(1) $0, \infty \overline{\in} B(t)$;

(2) $B(t)$ 的边界为 n 个解析若尔当曲线 $\omega = \sigma_m(\theta, t)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $m = 1, 2, \cdots, n$;

① 本回引自文献[128].

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial_x^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial_y^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial_z^2} = 0$$

席费尔(Schiffer, Menahem Max, 1911—),德国数学家,生于柏林.

若尔当(Jordan, Marie Ennemond Camille, 1838—1921),法国数学家,生于里昂,卒于巴黎.

(3) 函数 $\sigma_m(\theta,t)$ 对 t 在 $t=t_0$ 关于区间 $[0,2\pi]$ 一致可微;

(4) $B(t)$ 是一个 n 连通圆界区域 R_w,其 n 个边界圆周的圆心和半径分别为 $a_m, r_m, m=1,2,\cdots,n$.

则有下面定理.

定理 1 若单叶解析函数族 $\omega=F(z,t), a\leqslant t\leqslant b$ 的定义域族 $G(t)$ 和像区域族 $B(t)$ 满足约定条件,则函数 $F(z,t)$ 对 t 在 $t=t_0$ 关于 $G(t_0)$ 内闭一致可微,其逆函数 $z=\Phi(\omega,t)$ 在 $t=t_0$ 关于 $B(t_0)$ 内闭一致可微,且有等式

$$\left.\frac{\partial\Phi(\omega,t)}{\partial t}\right|_{t=t_0}=-\omega\frac{\partial\Phi(\omega,t_0)}{\partial\omega}\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}L_m(\theta)K_m(\omega,\xi_m)\mathrm{d}\theta-C+\mathrm{i}D\right)\quad ①$$

其中,$\xi_m=a_m+r_m\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,$C,D$ 是实常数,C 的值由下二式给出,即

$$C=\sum_{m=1}^{n}\alpha_m\beta_{mj}\quad,1\leqslant j\leqslant n \quad ②$$

$$\alpha_m=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}L_m(\theta)\mathrm{d}\theta,\beta_{mj}=\begin{cases}0 & ,j=m\\ \mathrm{Re}K_m(\zeta_j,\zeta_m) & ,j\neq m\end{cases}$$

$$L_m(\theta)=\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\sigma_m(\theta,t)-\frac{Q_m(\theta,t)}{\xi_m[\partial\Phi(\xi_m,t_0)/\partial\xi_m]}\right)\right\}_{t=t_0}\quad ③$$

而

$$K_j(z,\xi_j)=\pm\frac{\xi_j+z-2a_j}{\xi_j-z}+\sum_{k=1}^{\infty}b_{jk}\left(\frac{\xi_j-z}{\xi_j+z-2a_j}\right)^k\quad ④$$

当 $n=2$ 时,这定理即成为 П. П. Куфарев 与 Н. В. Семухна 的结果.

命 $R_w^{(s)}$ 表示 n 连通圆界区域 R_w 内的一个子区域,其差集 $R_w\setminus R_w^{(s)}$ 是 n 个正圆环 Q_k,每个圆环的两个边界圆周间的距离为 ε.

命 $\varphi_k(w,t), k=1,2,\cdots,n$,表示分别定义于 n 个半闭圆环 Q_k 上的含参数 t 的单叶解析函数,像域的境界曲线记为 $\Gamma_{rk}(t)$ 和 $\Gamma^{(k)}(t)$. 若 n 个圆环的像域彼此无公共点,且 R_w 的 n 个边界圆周所对应的 n 个曲线 $\Gamma_{rk}(t)$ 所围成的 n 连通区域 $G(t)$ 与 $R_w^{(s)}$ 的 n 个边界圆周所对应的 n 个线 $\Gamma^{(k)}(t)$ 围成的 n 连通区域 $G^{(s)}(t)$ 之间恒有 $G^{(s)}(t)\subset G(t)$.

杨维奇建立了以下变分定理.

定理 2 若函数 $f(w)$ 在 R_w 内正则单叶,且函数 $\varphi_k(w,t)$ 当 $T>0$ 充分小,$t\in[0,T]$ 时在 Q_k 内有展开式

$$\varphi_k(w,t)=f(w)+tg_k(w)+o(t), k=1,2,\cdots,n\quad ⑤$$

$g_k(w)$ 在 $\overline{Q}_k$ 上有定义. 次设 $w=F(z,t)$ 单叶保形映射 $G(t)$ 于 $R_w(t)$, $R_w(0)=R_w$,且 $R_w(t)$ 的 n 个边界圆周的圆心和半径 $a_j(t), r_j(t), j=1,2,\cdots,n$,均在 $t=0$ 处可微. 用 $\Phi(w,t)$ 表示 $F(z,t)$ 的反函数,则在 $R_w(t)$ 内有展开式

$$\Phi(w,t)=f(w)+twf'(w)P(w)+o(t) \qquad ⑥$$

其中

$$P(w)=\sum_{j=1}^{n}\lim_{s\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}B_j(\xi_j)K_j(w,\xi)\mathrm{d}\theta-C+\mathrm{i}D \qquad ⑦$$

$$B_j(\xi_j)=\mathrm{Re}\left(\frac{g_j(\xi_j)}{\xi_j f'(\xi_j)}\right)-\left(\frac{\partial}{\partial t}\log|a_j(t)+r_j(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|\right)_{t=0} \qquad ⑧$$

这里的函数 $K_i(w,\zeta_j)$ 仍是④定义的那样，但这里的区域是 $R_w^{(s)}$，而 ξ_j 是 $R_w^{(s)}$ 的第 j 个边界圆周上的变点，$\arg(\xi_j-a_j)=\theta$，C，D 是实常数，由②给出．但那里的 $L_m(\theta)$ 应换以 $B_m(\xi_m)$．

他还建立了 n 连通区域的参数表示定理：

定理 3 对于任意给定的 z 平面上的 n 连通区域 B 及两个复数 z_0 及 w_0，$z_0\in B$，$0,\infty\ \overline{\in}\ B$，$B$ 的边界是 n 组有限条若尔当曲线，*必存在*一个 n 连通圆界区域族 $R_w(t)$，$w_0\in R_w(t)$，$0\leqslant t\leqslant t_0$，其边界圆周的圆心 $a_j(t)$ 和半径 $r_j(t)$，$j=1,2,\cdots,n$ 是参数 t 的 $2n$ 个不全为常数的可微函数，使得在 $R_w(t)$ 内满足方程

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}=w\frac{\partial\Phi}{\partial w}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(K_j(w,\xi_j)-K_j(w_0,\xi_j))\mathrm{d}\psi_j(\theta,t),0\leqslant t\leqslant t_0 \qquad ⑨$$

且使 w_0 对应于 z_0 的单叶保形映射函数 $\Phi(w,t)$ 当 $t\to t_0$ 时的极限函数

$$f(w)=\lim_{t\to t_0}\Phi(w,t) \qquad ⑩$$

实现圆界区域到 B 的单叶保形映射，$f(w_0)=z_0$；其中 $K_j(w,\xi_j)$ 如④所定义，但此处的区域是 $R_w(t)$，且 $\xi_j=a_j(t)+r_j(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，而函数

$$\psi_j(\theta,t)=\lim_{\substack{s\to 0\\ s>0}}\int_0^{\theta}\left(\frac{\partial}{\partial t}\log\left|\frac{F(\Phi(\xi_j,t),T)}{\xi_j}\right|\right)_{T=t}\mathrm{d}\theta \qquad ⑪$$

ξ_j 是区域 $R_w^{(s)}(t)$ 的第 j 个境界圆周上的变点，且 $\arg(\xi_j-a_j(t))=\theta$，$F(z,t)$ 是 $\Phi(w,t)$ 的反函数．

另外他还给出了维拉公式的两个简短的证明，并扩张到 n 连通区域，并建立了多连通区域的泊松公式与迪利克雷问题的解．

维拉（Villat, Henri, René, Pierre, 1879—1972），法国数学家，生于巴黎．

$$\frac{\partial^2\mathscr{U}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathscr{U}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mathscr{U}}{\partial z^2}=0$$

第六十五回 复变数 表积分　迪氏问题有新意[①] 解析函数双周期

解析函数的边值问题是复变函数论中极为重要的分支. 在其中也有所谓迪利克雷边值问题,武汉大学路见可先生是此领域的大家,下面是他对此专题的研究。

为了后面的需要,我们先给出双周期解析函数的一种积分表示式.

已给 S^- 中的一个双周期解析函数 $\Phi^-(z)$,其边值 $\Phi^-(t)\in H(t\in L)$,我们希望 $\Phi^-(z)$ 有下列积分表示式

$$\Phi^-(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{L_0}\mu(t)(\zeta(t-z)+\zeta(z))\mathrm{d}t+A,z\in S^- \tag{①}$$

其中,$\zeta(z)$ 是魏尔斯特拉斯 ζ 函数,$\mu(t)$ 是一实值函数,$\in H(L_0)$,而 A 是某复常数.

假设对某一个这种 $\mu(t)$ 以及某常数 A,表示式 ① 成立. 记 ① 右端的函数当 $z\in S^+$ 时为 $\Phi^+(z)$,则由推广的普勒梅列公式

$$\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=\mu(t),t\in L \tag{②}$$

普勒梅列(Plemelj, J, 1873—1967),南斯拉夫数学家,生于格拉德.

这里 $\mu(t)$ 已在 L 上作双周期延拓. 所以,记 $\Phi^-(t)=\mu(t)+\mathrm{i}v(t)$ 时,我们有

$$\mathrm{Re}(-\mathrm{i}\Phi^+(t))=v(t),t\in L \tag{③}$$

因为 $v(t)=\mathrm{Im}\Phi^-(t)\in H$ 已知,所以,如果限定 $t\in L_0$,则 ③ 是 S_0^+ 内解析函数 $-\mathrm{i}\Phi^+(z)$ 的迪利克雷问题. 不过要当心,现在 $\Phi^+(z)$ 在 S_0^+ 内可能有一单极点 $z=0$. 因此,③ 的一般解为

$$-\mathrm{i}\Phi^+(z)=(Sv)(z)-\mathrm{i}\beta_0+C_1\omega(z)-\overline{C_1}\frac{1}{\omega(z)} \tag{④}$$

其中,β_0 是一任意实常数,C_1 是一任意复常数,$w=\omega(z)$ 是把 S_0^+ 保形映射到单位圆 $|w|<1$ 且使 $\omega(0)=0(\omega'(0)\neq 0)$ 的函数,而 S 是区域 S_0^+ 上的施瓦兹算子

$$(Sv)(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{|L_0|}\frac{\partial M(z,t)}{\partial_n}v(t)\mathrm{d}s,z\in S_0^+ \tag{⑤}$$

S 是 L_0 上 t 处的弧长参数,$M(z,t)$ 是 S_0^+ 的复格林函数,n 是 L_0 在 t_0 处朝向 S_0^+ 的法线方向,$|L_0|$ 是 L_0 的全长. ⑤ 是 S_0^+ 内的全纯函数,具有性质

$$(Sv)^+(t)=(Sv)(t),\mathrm{Re}((Sv)(t))=v(t),t\in L_0 \tag{⑥}$$

亦即,$(Sv)(z)$ 是 S_0^+ 内其实部边值为 $v(t)$ 的解析函数迪利克雷问题的解. 注意

---

① 本回引自文献[30].

$\overline{\omega(t)} = \frac{1}{\omega(t)}$,故 ④ 又可写成

$$\Phi^+(z) = \mathrm{i}(Sv)(z) + \beta_0 + \mathrm{Re}(C\omega(z)) \qquad ⑦$$

其中 C 是另一任意常数.将 ⑦ 代入 ② 中,便得

$$\mu(t) = \mu_0(t) + \beta_0 + \mathrm{Re}(C\omega(t)) \qquad ⑧$$

这里已令

$$\mu_0(t) = \mathrm{i}(Sv)(t) - \Phi^-(t) = -\mathrm{Im}(Sv)(t) - u(t) \qquad ⑨$$

于是,已给 $\Phi^-(z)$,如果表示式 ① 可能,则 $\mu(t)$ 必定是 ⑧ 之形.

现在来证明,由 ⑧ 中给出的 $\mu(t)$ 构成的函数

$$\Psi^-(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\mu(t)(\zeta(t-z)+\zeta(z))\mathrm{d}t, z\in S^- \qquad ⑩$$

等于 $\Phi^-(z) - A$(A 为某一复常数),从而表示式 ① 确实成立,且 A 可以显式表出.注意,在证明时,可限定 ⑩ 中的 $z\in S_0^-$.

首先,我们有

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}(\zeta(t-z)+\zeta(z))\mathrm{d}t = 0, z\in S^- \qquad ⑪$$

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\mathrm{Re}(C\omega(t))(\zeta(t-z)+\zeta(z))\mathrm{d}t = 0, z\in S^- \qquad ⑫$$

⑪ 显然,因为被积式作为 t 的函数在 S_0^+ 内全纯.为要验证 ⑫,令

$$\omega(z) = a_1z + a_2z^2 + \cdots, a_1 \neq 0$$

由留数定理 $$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\mathrm{Re}(C\omega(t))\mathrm{d}t = \frac{C}{4\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\frac{\mathrm{d}t}{\omega(t)} = \frac{C}{2a_1}$$

另一方面,当 $z\in S^-$ 时

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\mathrm{Re}(C\omega(t))\zeta(t-z)\mathrm{d}t = \frac{C}{4\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\frac{\zeta(t-z)}{\omega(t)}\mathrm{d}t = -\frac{\overline{C}}{2a_1}\zeta(z)$$

这就证实了 ⑫.

因此,⑩ 实际上可写成

$$\Psi^-(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\mu_0(t)(\zeta(t-z)+\zeta(z))\mathrm{d}t, z\in S_0^- \qquad ⑬$$

注意到 $(Sv)(t)$ 是 $(Sv)(z)$ 在 S_0^+ 中的边值,故有

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}(Sv)(t)\mathrm{d}t = 0$$

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}(Sv)(t)\zeta(t-z)\mathrm{d}t = 0, z\in S^-$$

因而,由 ⑧ 与 ⑬,得知

$$\Psi^-(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\Phi^-(t)(\zeta(t-z)+\zeta(z))dt, z\in S_0^-$$

记基本胞腔 S_0 的边界为 $\Gamma = \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4$. 因为 $\Phi^-(\tau)$ 作为 τ 的函数在 S^- 中为双周期的,故

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\Phi^-(\tau)d\tau = 0$$

因而易于验证

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\Phi^-(t)dt = 0$$

所以前面的等式可写成

$$\Psi^-(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\Phi^-(t)\zeta(t-z)dt, z\in S_0^- \tag{⑭}$$

再由留数定理,得

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\Phi^-(\tau)\zeta(\tau-z)d\tau - \frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\Phi^-(t)\zeta(t-z)dt, z\in S_0^-$$

所以,⑭ 可进一步改写为

$$\Psi^-(z) = \Phi^-(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\Phi^-(\tau)\zeta(\tau-z)d\tau, z\in S_0^-$$

这样,我们的目的是要验证

$$A = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\Phi^-(\tau)\zeta(\tau-z)d\tau, z\in S_0^-$$

确实为与 z 无关的常数. 将此式中的积分分解为沿各个 γ_j 上的积分,并把沿 γ_3,γ_4 上的积分分别转换到 γ_1,γ_2 上,便知

$$A = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\Phi^-(\tau)(\zeta(\tau-z)-\zeta(\tau-z+2\omega_2))d\tau + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\Phi^-(\tau)(\zeta(\tau-z)-\zeta(\tau-z+2\omega_1))d\tau$$

由 $\zeta(z)$ 的性质,立刻得知

$$A = \frac{\eta_1}{\pi i}\int_{\gamma_2}\Phi^-(\tau)d\tau - \frac{\eta_2}{\pi i}\int_{\gamma_1}\Phi^-(\tau)d\tau \tag{⑮}$$

确为常数. 这样,我们有以下定理.

定理 1 若 $\Phi^-(z)$ 在 S^- 中双周期全纯,且 $\Phi^-(t) = u+iv\in H$ 于 L 上,则它可表示为 ①,其中 A 由 $\Phi^-(z)$ 一意确定,由 ⑮ 给出,实函数 $\mu(t)$ 可由 ⑬, ⑲ 给出,其中 S 是 S_0^+ 中的施瓦兹算子,β_0 是一任意实常数,C 是任意复常数,而 $w = \omega_0(z)$ 是 S_0^- 保形变换到 $|w|<1(\omega(0)=0)$ 的函数:$\mu(t)$ 中含 β_0+

$\text{Re}(C\omega(t))$ 的项对表示式 ② 不起作用.

这样,已给 $\Phi^-(z)$,① 中的函数 $\mu(t)$ 并不唯一,而依赖于三个任意实常数.

积分表示式 ① 可用来解决双周期解析函数的迪利克雷问题,但它也有独立意义.

现在来考虑双周期(解析函数)迪利克雷问题,简记为 DD 问题,即已给 L 上的一个实值双周期连接函数 $f(t)$,要求在 S^- 中的一双周期解析函数 $\Phi^-(z)$,使满足边值条件

$$\text{Re}\,\Phi^-(t) = f(t), t \in L \tag{16}$$

我们恒设 L_0 为一 Lyapunov 曲线,$f(t) \in H$.

如果此问题有解 $\Phi^-(z)$,则它可表示为

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{L_0} \mu(t)(\zeta(t-z) + \zeta(z))\mathrm{d}t + A, z \in S^- \tag{17}$$

这里右端已略去因子 1/2,它已并入 $\mu(t)$,其中 $A = \alpha + i\beta$ 为一常数. 显然,β 可以任意,而 α 则由 $\Phi^-(z)$ 唯一确定. 于是,由推广的普勒梅列公式

$$\Phi^-(t_0) = -\mu(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int_{L_0} \mu(t)(\zeta(t-t_0) + \zeta(t_0))\mathrm{d}t + A, t_0 \in L \tag{18}$$

将其实部代入 ⑯,便得

$$-\mu(t_0) + \text{Re}\left(\frac{1}{\pi i}\int_{L_0} \mu(t)(\zeta(t-t_0) + \zeta(t_0))\mathrm{d}t\right) = f(t_0) - \alpha, t_0 \in L_0$$

将 $\zeta(t-t_0)$ 写成

$$\frac{1}{t-t_0} + \zeta_0(t-t_0)$$

这里 $\zeta_0(t-t_0)$ 已在 L_0 上正则,所以上述方程可写成具有双层位势的积分方程

$$K\mu = \mu(t_0) - \frac{1}{\pi}\int_{L_0} \mu(t)\frac{\cos(r,n)}{r}\mathrm{d}s - \frac{1}{\pi}\int_{L_0} k(t_0,t)\mu(t)\mathrm{d}s =$$
$$-f(t_0) + \alpha, t_0 \in L_0 \tag{19}$$

其中,$r = |t-t_0|$,n 是 L_0 在 t 处的朝向 S_0^+ 的法线,(r,n) 是 n 与向量 $t-t_0$ 间的夹角,而

$$k(t_0,t) = \text{Im}((\zeta_0(t-t_0) + \zeta(t_0))t'(s)) \tag{20}$$

当 $t, t_0 \in L_0$ 时 $\in H$. ⑲ 是一弗雷德霍姆积分方程.

先考虑齐次方程 $K\mu = 0$ 的求解. 设 $\mu_1(t)$ 是其一解. 定义

$$\Phi_1^-(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{L_0} \mu_1(t)(\zeta(t-z) + \zeta(z))\mathrm{d}t, z \in S^- \tag{21}$$

如前所述,立刻知道 $\text{Re}\,\Phi_1^-(t) = 0, t \in L$. 由 S^- 中的最大模原理,得知

$\mathrm{Re}\ \Phi_1^-(z)=0, z\in S^-$,从而 $\Phi_1^-(z)=\mathrm{i}\gamma$ 是一纯虚常数.又因 $(S\gamma)(t)$ 是一实常数,故由 ⑧ 知

$$\mu_1(t)=\beta_1+\mathrm{Re}(C\omega(t))$$

其中,β_1 是一任意实常数,C 是一任意复常数.

定理 2 齐次方程 $K\mu=0$ 有三个(在实系数域中)线性无关的解

$$1, \mathrm{Re}\ \omega(t), \mathrm{Im}\ \omega(t) \tag{22}$$

其中 $\omega(t)$ 如定理 1 中所述.

根据弗雷德霍姆积分方程的一般理论,$K\mu=0$ 的相联方程

$$K'\nu=\nu(t_0)+\frac{1}{\pi}\int_{L_0}\nu(t)\frac{\cos(r,\boldsymbol{n}_0)}{r}\mathrm{d}s-$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{L_0}k(t,t_0)\nu(t)\mathrm{d}s=0 \tag{23}$$

(其中 $\boldsymbol{n}_0$ 中 L_0 在 t_0 处朝向 S_0^+ 的法线)也有三个(实)线性无关的解 $\nu_1(t)$,$\nu_2(t)$,$\nu_3(t)$,且 ⑲ 当且仅当下列条件满足时有解

$$\int_{L_0}\nu_j(t)(f(t)-\alpha)\mathrm{d}s=0, j=1,2,3 \tag{24}$$

注意,特别,当 $f(t)=1,\alpha=0$ 时,方程 ⑲ 无解.因为,设若它有一解 $\mu_1(t)$,则由 ㉑ 定义的 $\Phi_1^-(z)$ 必有 $\mathrm{Re}\ \Phi_1^-(t)=1$,于是 $\Phi_1^-(z)=1+\mathrm{i}r$.另一方面,对于这个 $\Phi_1^-(z)$,如果表示为 ⑰ 之形式,则必

$$\mu(t)=\beta_0+\mathrm{Re}(C\omega(t))$$

且 $A=1+\mathrm{i}\gamma$,这与 ㉑ 矛盾,根据这一事实,从 ㉔ 得知

$$\nu_j^*=\int_{L_0}\nu_j(t)\mathrm{d}s, j=1,2,3$$

必不同时为 0.不妨设 $\nu_3^*\neq 0$.我们可以把 $\nu_1(t)$,$\nu_2(t)$ 分别换作与 $\nu_3(t)$ 的线性组合,仍记为 $\nu_1(t)$,$\nu_2(t)$,使得 $\nu_1^*=\nu_2^*=0$;我们还可把 $\nu_3(t)$ 除以 ν_3^*,仍得一个解,仍记为 $\nu_3(t)$,使得 $\nu_3^*=1$.这样得到的解不妨称为正规化了的.利用它们,可解条件 ㉔ 就成为

$$\int_{L_0}\nu_j(t)f(t)\mathrm{d}s=0, j=1,2 \tag{25}$$

而

$$\alpha=\int_{L_0}\nu_3(t)f(t)\mathrm{d}s \tag{26}$$

这样,原问题 ⑯ 当且仅当 ㉕ 满足时可解,且 α 由 ㉖ 唯一确定.

定理 3 在 S^- 中的 DD 问题 ⑯ 当且仅当 ㉕ 满足时可解,其唯一解由 ⑰ 给出,其中 $\mathrm{Re}\ A=\alpha$ 由 ㉖ 确定,而 $\mu(t)$ 是 ⑲ 的任一特解;在 ㉕,㉖ 中的 $\nu_j(t)$

($j=1,2,3$) 为 ㉖ 的正规解组，满足条件

$$\int_{L_0}\nu_j(t)\mathrm{d}s=0,j=1,2$$

$$\int_{L_0}\nu_3(t)\mathrm{d}s=1$$

以上解决了 DD问题的求解，但我们限定 L_0 为 S_0 中一条封闭曲线. 如果把 L_0 改为 S_0 中一组互相外离的封闭曲线，即 S_0^- 是基本胞腔中挖掉若干洞的区域，则相应的 DD 问题一般无解. 这时我们可讨论所谓的双周期变态迪利克雷问题.

一、双准周期解析函数迪利克雷问题

1. 加法双准周期迪利克雷问题

下面将讨论双准周期(解析函数) 的迪利克雷问题. 本段中先讨论加法双准周期迪利克雷问题，简记为 AQD 问题. 它可表述如下：在 L_0 上已给一实函数 $f(t)\in H$，求一个在 S^- 中的解析函数 $\Phi^-(z)$，具有加法双准周期性(简记为AQ函数)

$$\Phi^-(z+2\omega_j)=\Phi^-(z)+a_j,j=1.2 \qquad ㉗$$

(a_1,a_2 为二复常数) 满足边值条件

$$\mathrm{Re}\,\Phi^-(t)=f(t),t\in L_0 \qquad ㉘$$

加数 a_1,a_2 可以事先指定或否，但必须先说明.

在讨论此问题之前，我们先建立一个有关 DD 问题的引理，它将在后面的讨论中起作用.

引理 1 设 $C\neq 0$ 是一复常数. 则 S^- 中的 DD 问题

$$\mathrm{Re}\,\Phi^-(t)=\mathrm{Re}(Ct),t\in L_0 \qquad ㉙$$

无解.

注意 ㉙ 实际上是说：在 ㉘ 中，对于 $t\in L_0$，有 $f(t)=\mathrm{Re}(Ct)$，而对于 $t\in L$，$f(t)$ 等于其周期延拓而不再是 $\mathrm{Re}(Ct)$.

证明 设若在 S^- 中存在这样的函数 $\Phi^-(z)=u(z)+\mathrm{i}v(z)$，则

$$\Phi^-(t)=\alpha x+\beta y+\mathrm{i}v(t),t=x+\mathrm{i}y\in L_0 \qquad ㉚$$

这里已记 $C=\alpha-\mathrm{i}\beta$(α,β 不同时为零). 由于 L_0 是一 Lyapunov 曲线从而 $u'(t)$ 连续，故由解析函数边界性质的一些结果，可以证明，在 L_0 外侧靠近它的平准线 L_ε(即 L_ε 是圆周 $|w|=1-\varepsilon$ 在映射 F 下的逆像，这里 F 是把 L_0 所围的外域保形变换到 $|w|<1$ 上的映射使 $F(\infty)=0$ 者) 上$\frac{\partial t}{\partial s}$ 可连续延拓到 L_0 上的$\frac{\partial u}{\partial s}$. 于是由柯西 - 黎曼方程与格林公式

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2}=0$$

$$\left(\int_{\Gamma}-\int_{L_\varepsilon}\right)v\frac{\partial u}{\partial s}\mathrm{d}s=-\iint_{S_\varepsilon^-}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中，Γ 是 S_0 的边界，S_ε^- 是 L_ε 与 Γ 间所围的区域. 注意 u,v 是双周期的，令 $\varepsilon\to 0$ 求极限，便得

$$\int_{L_0}v\mathrm{d}u=\iint_{S_0^-}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant 0 \qquad ㉛$$

另一方面，因为

$$\int_{L_0}\Phi^-(t)\mathrm{d}t=\int_{\Gamma}\Phi^-(\tau)\mathrm{d}\tau=0$$

易证 $\displaystyle\int_{L_0}v(t)\mathrm{d}t=-\alpha\int_{L_0}x\mathrm{d}y+\beta\mathrm{i}\int_{L_0}y\mathrm{d}x=-(\alpha+\mathrm{i}\beta)\mid S_0^+\mid$

其中 $\mid S_0^+\mid$ 是 S_0^+ 的面积. 所以

$$\int_{L_0}v(t)\mathrm{d}x=-\alpha\mid S_0^+\mid,\int_{L_0}v(t)\mathrm{d}y=-\beta\mid S_0^+\mid$$

因此 $\displaystyle\int_{L_0}v\mathrm{d}u=\alpha\int_{L_0}v\mathrm{d}x+\beta\int_{L_0}v\mathrm{d}y=(-\alpha^2+\beta^2)\mid S_0^+\mid<0$

此与 ㉛ 矛盾.

在讨论 AQD 问题 ㉘ 时，首先注意，在适当选择(复) 常数 A,B 后，令

$$\Psi^-(z)=\Phi^-(z)-\mathrm{Re}(A\zeta(z)+Bz),z\in S^- \qquad ㉜$$

使 $\Psi^-(z)$ 成为 S^- 中的一个双周期解析函数(注意，$\zeta(z)$ 虽在 $z=0$ 处有奇点，但它不在 S_0^- 中)，其中 A,B 与 a_1,a_2 有下列关系式，即

$$A=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}(\omega_2a_1-\omega_1a_2),B=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}(a_2\eta_1-a_1\eta_2) \qquad ㉝_1$$

或者，完全一样

$$a_j=2(\eta_jA+\omega_jB),j=1,2 \qquad ㉝_2$$

这样，S^- 中 $\Phi^-(z)$ 的 AQD 问题 ㉘ 就可转化为 S^- 中 $\Psi^-(z)$ 的 DD 问题

$$\mathrm{Re}\Psi^-(t)=f(t)-\mathrm{Re}(A\zeta(t)+Bt),t\in L_0 \qquad ㉞$$

现在来求解 AQD 问题 ㉘ 或 DD 问题 ㉞. 分几种情况讨论.

(1) 设 a_1,a_2 未事先指定，从而常数 A,B 也未指定. 如果对 DD 问题 ㉞ 求出了解 $\Psi^-(z)$，则由 ㉜，问题 ㉘ 的解由下式给出

$$\Phi^-(z)=\Psi^-(z)+A\zeta(z)+Bz \qquad ㉟$$

由定理 3，㉞ 的可解条件(参照式 ㉛) 为

$$\mathrm{Re}\int_{L_0}(A\zeta(t)+Bt)\nu_j(t)\mathrm{d}s=\int_{L_0}f(t)\nu_j(t)\mathrm{d}s,j=1,2 \qquad ㊱$$

记

$$\begin{cases}\int_{L_0}\zeta(t)\nu_j(t)\mathrm{d}s = c_{j1}\\ \int_{L_0}t\nu_j(t)\mathrm{d}s = c_{j2} \quad ,j = 1,2\\ \int_{L_0}f(t)\nu_j(t)\mathrm{d}s = \gamma_j\end{cases} \quad ㊲$$

于是，$c_{jk}(j,k = 1,2)$ 是与 $f(t)$ 无关的复常数，而 γ_j 是由 $f(t)$ 唯一确定的实常数. 为要确定 A,B，就要求解线性方程组

$$c_{j1}A + c_{j2}B = \gamma_j + \mathrm{i}\delta_j, j = 1,2 \quad ㊳_1$$

其中 δ_1,δ_2 是两个待定实常数，应把它们适当选取使得 $㊳_1$ 可以对 A,B 求解. 一旦求得 A,B，则由定理 3，㉞ 的唯一解由下式给出，即

$$\Psi^-(z) = \frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\mu(t)(\zeta(t-z)+\zeta(z))\mathrm{d}t + \alpha + \mathrm{i}\beta$$

其中 $\mu(t)$ 是方程

$$K\mu = -f(t) + \mathrm{Re}(A\zeta(t) + Bt) + \alpha$$

的任一解（且不论取哪个解，前式右端积分是同一函数），且

$$\alpha = \int_{L_0}(f(t) - \mathrm{Re}(A\zeta(t) + Bt))\nu_3(t)\mathrm{d}s$$

而 β 为任意实常数，这里 K 为弗雷德霍姆算子，由式 ⑲ 左端定义.

在求解式 $㊳_1$ 之前，我们要证明另一引理.

引理 2 式 ㊲ 中的 c_{12},c_{22} 不同时为零.

证明 设若 $c_{12} = c_{22} = 0$，则当 $f(t) = 0$ 从而 $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ 时，若取 $\delta_1 = \delta_2 = 0$，则方程组 $㊳_1$ 将有一组解 $A = 0, B = 1$. 与 ㉞ 比较，这就表明 S^- 的双周期解析函数 $\Psi^-(z)$ 的迪利克雷问题

$$\mathrm{Re}(\Psi^-(t)) = \mathrm{Re}(-t), t \in L_0$$

可解，与引理 1 矛盾.

不失一般性，我们设 $c_{22} \neq 0$. 令

$$\Delta = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}$$

若 $\Delta \neq 0$，则任取 δ_1,δ_2，$㊳_1$ 对 A,B 恒唯一可解，这时 AQD 问题 ㉘ 恒可解，且一般解中含有两个任意实常数.

若 $\Delta = 0$，则必存在一复常数 $k = k_1 + \mathrm{i}R_2$，使得

$$c_{11}A + c_{12}B = k(c_{21}A + c_{22}B)$$

对任何 A,B 成立. 这样，$㊳_1$ 可改写为

$$k(c_{21}A + c_{22}B) = \gamma_1 + \mathrm{i}\delta_1$$
$$c_{21}A + c_{22}B = \gamma_2 + \mathrm{i}\delta_2 \quad ㊳_2$$

 $\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2}=0$

我们来证明 $k_2 \neq 0$. 设若不是这样，则 $k = k_1$ 是一实常数. 那么，对于 $f(t) = 0$(从而 $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$) 以及任取的 $\delta_2 \neq 0$，我们得到 $A = 0, B = \frac{i\delta_2}{c_{22}}$ 是 ㊳$_2$ 中第二个方程的一组解. 于是，若再取 $\delta_1 = k\delta_2$，则它们也是第一个方程的解. 因此，S^- 中的 DD 问题

$$\operatorname{Re}\Psi^-(t) = \operatorname{Re}\left(\frac{i\delta_2 t}{c_{22}}\right), t \in L_0 \qquad ㊴$$

可解，这与引理 1 矛盾. 这样，得知 $k_2 \neq 0$.

为要在这种情况下求解 ㊳$_2$，必须取 δ_1, δ_2 使得

$$k(\gamma_2 + i\delta_2) = \gamma_1 + i\delta_1$$

亦即

$$k_1\gamma_2 - k_2\delta_2 = \gamma_1, k_1\delta_2 + k_2\gamma_2 = \delta_1 \qquad ㊵$$

当 $f(t)$ 已给从而 γ_1, γ_2 已知时，因 $\kappa_2 \neq 0$，故 δ_1, δ_2 可由 ㊵ 一意确定. 于是 ㊳$_2$ 的解为

$$B = \frac{1}{c_{22}}(\gamma_2 + i\delta_2 - c_{21}A) \qquad ㊶$$

而 $A = \alpha_1 + i\alpha_2$ 可以任意. 因此得知，AQD 问题 ㉘ 的一般解中仍含有两个任意实常数 α_1, α_2.

定理 4 当加数 a_1, a_2 未事先指定时，AQD 问题 ㉘ 恒可解，且一般解中含有两个任意实常数.

(2) 设

$$\operatorname{Re} a_j = \varepsilon_j, j = 1,2 \qquad ㊷$$

已事先指定. 换句话说，已设 $\operatorname{Re}\Phi^-(t) = f(t)$ 双准周期也给出于 L 上

$$f(t + 2\omega_j) = f(t) + \varepsilon_j, j = 1,2, t \in L$$

当 $\Delta \neq 0$ 时，如(1)中的讨论知：A, B 是 $\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2$ 的齐次线性函数，所以令 $A = \alpha_1 + i\alpha_2, B = \beta_1 + i\beta_2$ 时，$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 将是 $\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2$ 的实线性组合，这些组合的系数是与 $f(t)$ 无关的实常数. 另一方面，易知 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 是 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 的实线性组合. 因此，可以写

$$\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\delta_1\\ \delta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\end{pmatrix} + \boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix} \qquad ㊸$$

其中，$\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ 是 2×2 实常数矩阵，其各个元与 $f(t)$ 无关. 今证 $\det \boldsymbol{P} \neq 0$. 当 $f(t) = 0$ 从而 $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ 并给定 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ 时，我们的问题成为 S^- 中 $\Phi^-(z)$ 的 AQD 问题

$$\operatorname{Re}\Phi^-(t) = 0, t \in L_0$$

且已知 $\operatorname{Re}\Phi^-(z + 2\omega_j) = \operatorname{Re}\Phi^-(z)(j = 1,2)$. 所以 $\operatorname{Re}\Phi^-(z)$ 是 S^- 中一个

在 L 上具有零边值的双周期调和函数.由最大模原理,可知 S^- 中 $\mathrm{Re}\,\Phi^-(z)=0$.因此,在 S^- 中 $\Phi^-(z)=\mathrm{i}\lambda$ 是一纯虚数.这样,$\Phi^-(z)$ 本身已是双周期的.因此,一定有 $a_1=a_2=0$.于是,$A=B=0$;再由 ㊳$_1$ 便知 $\delta_1=\delta_2=0$.这样,相应于 ㊸ 的齐次方程只有平凡解.这就证明了我们的论断.因而 ㊳$_1$ 对任意的 γ_1,γ_2,以及给定的 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 一意可解.

若 $\Delta=0$,则由 ㊵,δ_1,δ_2 是 γ_1,γ_2 的实线性组合,再由 ㊶,便知 β_1,β_2 是 α_1,$\alpha_2,\gamma_1,\gamma_2$ 的实线性组合.于是可以写

$$\boldsymbol{R}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\end{pmatrix}+\boldsymbol{S}\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix} \tag{㊹}$$

其中,$\boldsymbol{R},\boldsymbol{S}$ 也是 2×2 矩阵,与上面讲的为同种类型.如前同样推理,可证 $\det\boldsymbol{R}\neq0$.所以 ㊹ 对任意的 γ_1,γ_2 以及 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 也一意可解.

定理 5 当加数的实部 $\mathrm{Re}\,a_j(j=1,2)$ 事先指定时,AQD 问题 ㉘ 恒唯一可解.

(3) 设 a_1,a_2 都事先指定.因为如前所述,A,B 可唯一地由 γ_1,γ_2 与 $\mathrm{Re}a_1$,$\mathrm{Re}a_2$ 确定,故由 ③ 知,当且仅当下列两个实的条件

$$\mathrm{Im}a_j=\mathrm{Im}(\eta_jA+\omega_jB),j=1,2 \tag{㊺}$$

满足时,我们的 AQD 问题(唯一)可解.㊺ 实际上是间接地施加于 $f(t)$ 上的两个条件.

定理 6 当加数 a_1,a_2 事先指定时,AQD 问题 ㉘ 当且仅当 $f(t)$ 满足两个(实)可解条件时(唯一)可解.

2.乘法双准周期的齐次迪利克雷问题

我们将讨论乘法双准周期的迪利克雷问题,简记为 MQD 问题,即求 S^- 中的一乘法双准周期解析函数(简记为 MQ 函数)$\Phi^-(z)$,其乘数为 β_1,β_2

$$\Phi(z+2\omega_j)=\beta_j\Phi^-(z),\beta_j\neq0,j=1,2,z\in S^- \tag{㊻}$$

使满足边值条件

$$\mathrm{Re}\,\Phi^-(t)=f(t),t\in L_0 \tag{㊼}$$

其中 $f(t)\in H$ 已给予 L_0 上.我们以后还恒假定 β_1,β_2 是实数,以便 $f(t)$ 易于在 L 上延拓

$$f(t+2\omega_j)=\beta_jf(t),t\in L \tag{㊽}$$

且设 β_1,β_2 不同时为 1,因为否则的话,㊼ 就成为 DD 问题了.

本段将先讨论齐次问题($f(t)=0$),记为 MQD_0 问题

$$\mathrm{Re}\,\Phi^-(t)=0,t\in L_0 \tag{㊾}$$

自然此式当 $t\in L$ 时也成立.

我们知道,如果 $\Phi^-(z)$ 是双周期的,由最大模原理,立即知道 $\Phi^-(z)$ 是一

纯虚常数.此结论对MQ函数 $\Phi^-(z)$ 就不能成立,因为这时 $\Phi^-(z)$ 在 S^- 中一般无界,最大模原理失效.事实上,㊾也的确可能存在非平凡解的情况.

定理7 在 β_1,β_2 都事先指定时,齐次 MQD_0 问题㊾或者只有零解;或者有唯一的非零解(允许有一个任意实常数系数),且它根本无零点.

证明 设此问题有一个非零解 $f(z), z\in S^-$.我们来证明:$f(z)$ 在整个闭区域 $\overline{S^-}$ 上没有零点.

为此,将 L_0 所围的外域用 $z=\varphi(w)$ 保形映射到单位圆周 $l: |w|=1$ 的外域,并使无穷远点不变.于是,$f(\varphi(w))=F(w)$ 在 $|w|>1$ 中边界 l 附近全纯,且在 l 上其实部为零.可见 $F(w)$ 可解析延拓到 $|w|<1$ 的边界 l 附近,于是 $F(w)$ 在 l 上解析.由此可见,如果 $F(w)$ 在 l 上有零点,其阶数必为正整数,且个数有限.设其总数(连同阶数计算在内)为 M.

基本胞腔 S_0 的边界 Γ 和 L_0 之间所围区域 S_0^- 在映照 $z=\varphi(w)$ 之下为单位圆周 l 和 Γ 的原像 γ 之间所围区域的像.设 $F(w)$ 在这区域中零点的总数(连同阶数计算)为 N.不失一般性,可以认为 $f(z)$ 在 Γ 上无零点,于是 $F(w)$ 在 γ 上也无零点.

由推广的辐角原理知

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{l+\gamma}\frac{F'(w)}{F(w)}dw=\frac{1}{2}M+N \qquad ㊿$$

但显然

$$\int_{\gamma}\frac{F'(w)}{F(w)}dw=\int_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

而 $f'(z)/f(z)$ 已是双周期的,所以此积分等于零.

另一方面,如果在 l 上 $F(w)$ 的每一零点前后各去掉一段充分小弧长 ϵ 后余下的部分记为 l_ϵ,则有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{l}\frac{F'(w)}{F(w)}dw=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{l_\epsilon}d\log F(w) \qquad 51$$

在 l_ϵ 的每一弧段上,$F(w)\neq 0$,而其实部为0,因此其虚部不变号.这样,$\arg F(w)$ 在其上为一常数值.由此可知,51左边的积分实部必为零.再从㊿立即可知 $M=N=0$.这就证明了 $F(w)$ 在 l 和 γ 间所围的闭区域上没有零点,从而也证明了 $f(z)$ 在 $\overline{S^-}$ 上没有零点.

今若 $g(z)$ 又是原问题的一个非零解,则可知 $g(z)/f(z)$ 是 S^- 中的双周期全纯函数,且易见其虚部在 L 上恒等于零,故必为一实常数.这样,原问题的一般解为 $\Phi^-(z)=kf(z)$,其中 k 为一任意实常数.

我们现在要问:β_1,β_2 要满足怎样的条件,才能使原问题有非零解?$f(z)$ 为原问题的一非零解(并不妨设于 L 上 $\mathrm{Im}\, f(t)>0$)当且仅当 $\psi(z)=\log[-if(z)]$(取定一分支)是以 $a_j=\log\beta_j(j=1,2)$ 为加数(其中对数为某二确定值,不同时为零)的 AQD_0 问题

$$\mathrm{Re}(\mathrm{i}\psi(t)) = 0, t \in L_0 \tag{52}$$

的解. 注意,虽然 β_j 为实数, a_j 仍可为复数;一般,应允许

$$a_j = \log \beta_j = \begin{cases} \ln|\beta_j| + 2k_j\pi\mathrm{i} & ,\beta_j > 0 \\ \ln|\beta_j| + (2k_j+1)\pi\mathrm{i} & ,\beta_j < 0 \end{cases} \tag{53}$$

这里 $\ln|\beta_j|$ 已取定为实值, k_j 为整数. 记

$$A = \frac{1}{\pi\mathrm{i}}(\omega_2 a_1 - \omega_1 a_2), B = \frac{1}{\pi\mathrm{i}}(a_2\eta_1 - a_1\eta_2)$$

则由 ㊳ 知(现在 $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$),问题 ㊿ 的可解条件为

$$\mathrm{Re}(c_{11}A + c_{12}B) = \mathrm{Re}(c_{21}A + c_{22}B) = 0 \tag{54}$$

其中 $c_{jk}(j,k=1,2)$ 为只与 S^- 的形状有关而与 β_j 或 a_j 无关的复常数. 因此,原问题的可解条件为

$$\mathrm{Im}(c'_{11}\log\beta_1 + c'_{12}\log\beta_2) = \mathrm{Im}(c'_{21}\log\beta_1 + c'_{22}\log\beta_2) = 0 \tag{55}$$

其中已令 $$\begin{pmatrix} c'_{11} & c'_{12} \\ c'_{21} & c'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_2 & -\omega_1 \\ -\eta_2 & \eta_1 \end{pmatrix}$$

根据以上讨论,我们得到

定理 8 在 β_1, β_2 都事先指定时, AQD_0 问题 ㊾ 有非零解的充要条件是:可以在 (53) 中适当地选择 k_1, k_2,使得满足两个实的条件 (55).

有人举出了实例,说明确实有 ㊾ 存在非零解的情况.

下面来讨论当乘数 β_1, β_2 不事先指定的情况.

这时,在 (53) 中取定 k_1, k_2,然后求解 (55),便可得出一组 $\ln|\beta_1|, \ln|\beta_2|$,从而获得原问题的一个解. 为了说明这种情况下一般解的结构,我们进行如下讨论.

先在 (53) 中取定 $k_1 = 1, k_2 = 0$. 这时,对于 AQD_0 问题 (52) 来说,相当于已给定 a_1, a_2 的虚部,故由定理 5 知,可以求出唯一的一组实数 $\ln|\beta'_1|, \ln|\beta'_2|$ 使 (54) 或 (55) 成立,且这时 AQD_0 问题 (52) 有唯一解 $\psi_1(z)$(可相差一任意实常数项). 对于原 MQD_0 问题 ㊾ 而言,这时有唯一解(可相差一任意实常数因子)

$$f_1(z) = \mathrm{i}\exp\{\psi_1(z)\}$$

其乘数为 $$\beta_1 = -|\beta'_1|, \beta_2 = |\beta'_2|$$

同样,在 (53) 中取 $k_1 = 0, k_2 = 1$,则又可得 (55) 的唯一解组 $\ln|\beta''_1|$, $\ln|\beta''_2|$,相应的 AQD_0 问题有唯一解 $\psi_2(z)$,而原问题有唯一解

$$f_2(z) = \mathrm{i}\exp\{\psi_2(z)\}$$

其乘数为 $$\beta_1 = |\beta''_1|, \beta_2 = -|\beta''_2|$$

因此,原问题的一般解为

$$\Phi^-(z) = D\mathrm{i}\exp(k_1\psi_1(z) + k_2\psi_2(z)) \tag{56}$$

其中, k_1, k_2 为任意整数, D 为一任意实常数;这时,乘数为

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2} = 0$$

$$\begin{cases}\beta_1 = (-1)^{k_1} \mid \beta'_1 \mid^{k_1} \mid \beta''_1 \mid^{k_2} \\ \beta_2 = (-1)^{k_2} \mid \beta'_2 \mid^{k_1} \mid \beta''_2 \mid^{k_2}\end{cases} \tag{57}$$

定理9 齐次 MQD_0 问题㊾,如果对 $\Phi^-(z)$ 的乘数不事先指定,则恒可解,且其一般解由 ㊿ 给出,其中除显然有一任意实常数因子外,还依赖于两个独立的整数,而 $\Phi^-(z)$ 的乘数也依赖于这两个整数.

3. 乘法双准周期解析函数的积分表示式

前面我们曾给出双周期解析函数的积分表示式.由此出发,乘上一个适当的因子,就容易得到 MQ 函数的一个积分表示式;但它对我们以后的讨论并不适用.我们将导出它的另一种积分表示法.

设 $\Phi^-(z) = u(z) + iv(z)$ 是 S^- 中一个 MQ 函数,其乘数为 b_1, b_2,即

$$\Phi^-(z + 2\omega_j) = b_j\Phi^-(z), b_j \neq 0, j = 1,2 \tag{58}$$

我们暂不限定 b_1, b_2 为实数.

对 $\log b_1$ 与 $\log b_2$ 各取一确定值.定义二(复)常数 λ, z_0,使满足

$$2\omega_j\lambda - 2\eta_j z_0 = \log b_j, j = 1,2 \tag{59$_1$}$$

λ 与 z_0 是一意确定的.为确定起见,我们要求 $z_0 \in S_0$,当适当取定$\log b_j (j = 1, 2)$ 时,这一定可以做到.注意,λ 与z_0一般说来都是复常数,即使 b_1, b_2 为实数时也是如此.

以下分两种情况讨论.

(1) $z_0 = 0$.这时,对适当选择的 $\log b_1, \log b_2$,下式成立,即

$$\omega_2 \log b_1 = \omega_1 \log b_2 \tag{59$_2$}$$

且整函数 $e^{\lambda z}$ 是乘法双准周期的,也以 b_1, b_2 为乘数.

(2) $z_0 \neq 0$.令

$$q(z) = e^{\lambda z}\frac{\sigma(z - z_0)}{\sigma(z)} \tag{60}$$

它是以 b_1, b_2 为乘数的 MQ 函数,它在 S^- 内全纯(虽然 $z = 0 \in S_0^+$ 是其单极点),在 S_0^- 内有唯一的单零点.

我们要证明

定理 10 如果 59_2 对某一组 $\log b_1$ 和 $\log b_2$ 成立,则 S^- 中 MQ 函数 $\Phi^-(z)$(具边值 $\Phi^-(t) \in H$) 有下列积分表示式

$$\Phi^-(z) = e^{\lambda z}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\mu(t)e^{-\lambda t}(\zeta(t - z) + \zeta(z))dt + A\right), z \in S^- \tag{61}$$

其中 $\mu(t) \in H$ 是L_0上的一实函数,除一项 $\beta_0 + \mathrm{Re}(C\omega(t))$ 外一意确定,这里 β_0与 C 分别为任意的实或复常数,$\omega(z)$ 同本回开始部分所描述,而 A 是由 $\Phi^-(z)$ 唯一确定的常数.

证明 暂设存在 $\mu(t)\in H$ 于 L_0 上以及常数 A 使 ⑥1 成立. 当 $z\in S_0^+$ 时, 将此式右端的函数记为 $\Phi^+(z)$, 它在 $z=0$ 处一般有一单极点. 由普勒梅列公式

$$\Phi^{\pm}(t_0)=\pm\frac{1}{2}\mu(t_0)+$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\mu(t)e^{-\lambda(t-t_0)}(\zeta(t-t_0)+\zeta(t_0))dt+Ae^{\lambda t_0},t_0\in L_0 \quad ⑥2$$

与加法双准周期迪利克雷问题中相同推理, 可知

$$\Phi^+(t)=i(Sv)(t)+\beta_0+\mathrm{Re}(C\omega(t)) \quad ⑥3$$

其中 S 是 S_0^+ 的施瓦兹算子: $(Sv)(z)$ 在 S_0^+ 内全纯且具性质

$$\mathrm{Re}((Sv)(t))=v(t),(Sv)^+(t)=(Sv)(t),t\in L_0$$

而 β_0,C 为如定理中描述的常数. 此外, 记

$$\mu(t)=\mu_0(t)+\beta_0+\mathrm{Re}(C\omega(t)),t\in L_0 \quad ⑥4$$

其中

$$\mu_0(t)=i(Sv)(t)-\Phi^-(t)=-\mathrm{Im}((Sv)(t))-u(t) \quad ⑥5$$

由 $\Phi^-(t)$ 唯一确定. 这样, 如果前述表示式成立, 则 $\mu(t)$ 必为 ⑥4 之形. 易见 $\beta_0+\mathrm{Re}(C\omega(t))$ 不影响其中的积分值.

令

$$\Psi^-(z)=\frac{e^{\lambda z}}{2\pi i}\int_{L_0}\mu_0(t)e^{-\lambda t}(\zeta(t-z)+\zeta(z))dt,z\in S^-$$

将 ⑥5 代入, 立得

$$\Psi^-(z)=-\frac{e^{\lambda z}}{2\pi i}\int_{L_0}\Phi^-(z)e^{-\lambda t}\zeta(t-z)dt=$$
$$\Phi^-(z)-\frac{e^{\lambda z}}{2\pi i}\int_{\Gamma}\Phi^-(\tau)e^{-\lambda\tau}\xi(\tau-z)d\tau,z\in S_0^-$$

其中 Γ 为 S_0^+ 的(正向)边界. 我们要证明

$$A=e^{-\lambda z}(\Phi^-(z)-\Psi^-(z))=$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\Phi^-(\tau)e^{-\lambda\tau}\zeta(\tau-z)d\tau,z\in S_0^-$$

实际上是一常数. 事实上, 利用 $e^{-\lambda\tau}\Phi^-(z)$ 的双周期性, 易见

$$A=\frac{\eta_1}{\pi i}\int_{\gamma_2}e^{-\lambda\tau}\Phi^-(\tau)d\tau-\frac{\eta_2}{\pi i}\int_{\gamma_1}e^{-\lambda\tau}\Phi^-(\tau)d\tau \quad ⑥6$$

(2) $z_0\neq 0$, 亦即等式 ⑤9$_2$ 不成立. 我们有下面定理.

定理 11 如果 ⑤9$_2$ 对任何 $\log b_1,\log b_2$ 的选取总不成立, 则 S^- 中的 MQ 函数 $\Phi^-(z)$ 可表示为

$$\Phi^-(z)=\frac{e^{\lambda z}}{\sigma(z_0)}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\mu(t)e^{-\lambda t}\frac{\sigma(t-z+z_0)}{\sigma(t-z)}dt,z\in S^- \quad ⑰$$

其中 $\mu(t)\in H$ 为一实函数，除去一个常数项 β_0 外，由 $\Phi^-(z)$ 唯一确定.

证明 设 ⑰ 对某一 $\mu(t)\in H$ 成立. 再把其右端定义为 $\Phi^+(z),z\in S_0^+$. 则有

$$\Phi^\pm(t)=\pm\frac{1}{2}\mu(t_0)+\frac{e^{\lambda t_0}}{\sigma(t_0)}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\mu(t)e^{-\lambda t}\frac{\sigma(t-t_0+z_0)}{\sigma(t-t_0)}dt,t_0\in L_0 \quad ⑱$$

与前面同样推理，但要注意现在 $\Phi^+(z)$ 在 S_0^+ 内全纯，代替 ⑭，我们有

$$\mu(t)=\mu(t_0)+\beta_0 \quad ⑲$$

这里 β_0 又是一个实常数，而 $\mu_0(t)$ 仍以 ⑮ 给出. β_0 不影响 ⑰ 中积分的值.

我们必须证明

$$\Phi^-(z)=\frac{e^{\lambda z}}{\sigma(z_0)}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\mu_0(t)e^{-\lambda t}\frac{\sigma(t-z+z_0)}{\sigma(t-z)}dt,z\in S^- \quad ⑳$$

将 ⑮ 代入此式，可以看出它等价于

$$\Phi^-(z)=-\frac{e^{\lambda z}}{\sigma(z_0)}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\Phi^-(t)e^{-\lambda t}\frac{\sigma(t-z+z_0)}{\sigma(t-z)}dt,z\in S^-$$

当固定任意 $z\in S_0^-$，式中被积式作为 t 的函数是双周期的，在 S^- 中解析，但在 S_0^- 中以 $t=z$ 为单极点. 所以它沿 Γ 的积分必等于零. 因此，在 S_0^- 中应用留数定理，上面等式对 $z\in S_0^-$ 成立，因而对 $z\in S^-$ 也成立. 这就是说 ⑳ 成立.

4. 乘法双准周期的非齐次迪利克雷问题

现在来讨论一般的 MQD 问题：要求一个在 S^- 中的乘法双准周期函数 $\Phi^-(z)$，以二实数 β_1,β_2（不同时为 0，也不同时为 1）为乘数，满足边值条件 ⑰，其中 $f(t)\in H$ 为 L_0 上的一已知函数. 当 $f(t)\equiv 0$ 时，相应问题 MQD_0 已在乘法双准周期的齐次迪利克雷问题中讨论过. 下面设 $f(t)\not\equiv 0$.

沿用上段记号，也分两种情况讨论.

(1) 设 $z_0=0$. 这时如果 MQD 问题 ⑰ 有一个解 $\Phi^-(z)$，则它可以表示为 ⑪. 于是，由 ⑫，我们有(以下，总把 $\mu(t)$ 改为 $2\mu(t)$)

$$-\mu(t_0)+\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\pi i}\int_{L_0}\mu(t)e^{-\lambda(t-t_0)}(\zeta(t-t_0)+\zeta(t_0))dt\right)+$$
$$\operatorname{Re}(Ae^{\lambda t_0})=f(t_0),t_0\in L_0 \quad ㉑$$

易见

$$k(t_0,t)=e^{-\lambda(t-t_0)}(\zeta(t-t_0)+\zeta(t_0))-\frac{1}{t-t_0}\in H \quad ㉒$$

所以 ㉑ 可改写为

$$K_1\mu \equiv \mu(t_0) - \frac{1}{\pi}\int_{L_0}\mu(t)\frac{\cos(r,n)}{r}\mathrm{d}s + \int_{L_0}k_1(t_0,t)\mu(t)\mathrm{d}s =$$
$$-f(t_0) + \mathrm{Re}(Ae^{\lambda t_0}), t_0 \in L_0 \tag{73}$$

其中
$$k_1(t_0,t) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\pi i}k(t_0,t)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right) \in H$$
$$\frac{1}{\pi}\int_{L_0}\mu(t)\frac{\cos(r,n)}{r}\mathrm{d}s = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\mu(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t\right) \tag{74}$$

这里 $r=|t-t_0|$,(r,n) 是向量 $t-t_0$ 与 L_0 上 t 处朝内法线 n 的夹角.

⑬ 是一弗雷德霍姆方程.考虑其可解性时,又分两种子情况.

(i) 设齐次 MQD_0 问题 ㊾ 只有平凡解 $\Phi^-(z)=0$.因此,由 ㊿,$A=0$.这表明,由定理 10,$K_1\mu=0$ 有一般解 $\beta_0+\mathrm{Re}(C\omega(t))$,含三个线性无关解 ㊽.沿用那里的记号,设相联方程 $K'_1\nu=0$ 的三个解为 $\nu_j(t)(j=1,2,3)$,则方程 ⑬ 当且仅当下列条件满足时可解

$$\mathrm{Re}\left(A\int_{L_0}e^{\lambda t}\nu_j(t)\mathrm{d}s\right) = \int_{L_0}f(t)\nu_j(t)\mathrm{d}s(\text{右端记为 } f_j), j=1,2,3 \tag{75}$$

在这一子情况下,我们又可看到,如果 $f(t)=0$,$A=1$,则 ⑬ 无解.记

$$\int_{L_j}e^{\lambda t}\nu_j(t)\mathrm{d}s = I_j + iJ_j, j=1,2,3 \tag{76}$$

所以 I_1,I_2,I_3 不能同时为 0,例如 $I_3\neq 0$.我们将 $\nu_j(t)$ 正规化,使得
$$I_1=I_2=0, I_3=1$$
又记 $A=\alpha+i\beta$,则 ⑮ 成为
$$\beta J_j = -f_j, j=1,2; \alpha = f_3+\beta J_3 \tag{77}$$
J_1,J_2 不能同时为 0,因为否则的话,当 $f(t)=0$ 时 β 可以任意因而 $f_j=0(j=1,2,3)$,从而 $A=\alpha+i\beta\neq 0$,矛盾.于是,⑰ 表明一个可解条件,而 α,β 可一意确定.

注意,在这种情况下,MQD 问题 ㊿ 解的(实)广义自由度 $r=l-m=-1$(l 是其解中所含的任意实常数的个数,m 是其实可解条件的个数),这里 $l=0,m=1$.

(ii) 设 MQD_0 问题 ㊾ 有唯一的非零解 $\Phi_0^-(z)$(不计一实常数系数).记 $\Phi_0^-(z)$ 中相关的常数 $A=A_0$.又分两种情况.

a. $A_0\neq 0$.这时方程 $K_1\mu=\mathrm{Re}(Ae^{\lambda t})$ 当且仅当 $A=A_0(\neq 0)$ 时可解,所以 $K_1\mu=0$ 仍恰有三个线性无关解如前.⑬(对于 $A=\alpha+i\beta$)的可解条件仍为 ⑰.这里必定有 $J_1=J_2=0$,因为否则的话,㊾ 将有一解 $\Phi_0^-(z)$(其中 $A_0\neq 0$).这样,⑰ 成为两个可解条件 $f_1=f_2=0$,β 可以任意,而 α 由 β 唯一确定
$$\alpha = f_3+\beta J_3$$

这时，㊼ 的一般解为

$$\Phi^-(z)=\beta\Phi_0^-(z)+\Phi_1^-(z)$$

其中，β 是一任意实常数，$\Phi_1^-(z)$ 是其一特解，相应于方程 $K_1\mu=f(t)+\mathrm{Re}(f_3e^{\lambda t})$ 的解 $\mu=\mu_1(t)$ 者.

在这一情况下，仍有 $r=-1(l=1,m=2)$.

b. $A_0=0$. 在这种情况下，$K_1\mu_0=0$ 除去前述的三个解以外，存在着另一线性无关的解 $\mu_0(t)$，由它得出 ㊸ 的一个解 $\Phi_0(z)\neq0$. 这时 $K'_1\nu=0$ 有 4 个线性无关解 $\nu_j(t)$，$j=0,1,2,3$. 仍定义 I_j，J_j 如 ⑯，但 $j=0,1,2,3$. ⑬ 的可解条件仍由 ⑮ 给出，但 $j=0,1,2,3$. 我们将证明 I_j，$j=0,1,2,3$ 不能同时为零. 当 $f(t)\neq0$ 时，⑮ 成为

$$\alpha I_j-\beta J_j=0,j=0,1,2,3 \tag{78}$$

且 $K_1\mu=\mathrm{Re}(Ae^{\lambda t})$ 当且仅当 $A=0$ 亦即 $\alpha=\beta=0$ 时可解. 但是，设若 $I_j=0$，$j=0,1,2,3$，则 ⑱ 将有解 $\beta=0$，α 可任意，矛盾. 这样，我们可以把 $\nu_j(t)$ 正规化如前，使得

$$I_j=0,j=0,1,2;I_3=1$$

而 ⑮ 成为

$$J_j=-f_j,j=0,1,2;\alpha_3=f_3+\beta J_3 \tag{79}$$

同样道理，可知 J_j，$j=0,1,2$ 不能同时为 0，因此 ⑲ 降为两个可解条件，而 $A=\alpha+i\beta$ 一意确定. 当它们满足时，可得 ㊼ 的一般解

$$\Phi^-(z)=D\Phi_0^-(z)+\Phi_1^-(z) \tag{80}$$

其中，D 为任意实常数，$\Phi_1^-(z)$ 是它的一个特解，对应于 ⑬ 的特解 $\mu_1(t)$ 者.

在这种情况下，仍有 $r=-1(l=1,m=2)$.

(2) $z_0\neq0$. 如果问题有解，利用 ⑯，⑰（$\mu(t)$ 仍改为 $2\mu(t)$），我们得到

$$-\mu(t_0)+\mathrm{Re}\left(\frac{e^{\lambda t_0}}{\sigma(z_0)}\frac{1}{\pi i}\int_{L_0}\mu(t)e^{-\lambda t}\frac{\sigma(t-t_0+z_0)}{\sigma(t-t_0)}dt\right)=f(t_0),t_0\in L_0 \tag{81}$$

易证

$$\frac{e^{-\lambda(t-t_0)}}{\sigma(z_0)}\cdot\frac{\sigma(t-t_0+z_0)}{\sigma(t-t_0)}-\frac{1}{t-t_0}\in H$$

弗雷德霍姆（Fredholm, Erik Ivar, 1866—1927），瑞典数学家. 生于斯德哥尔摩，卒于同地.

如前可知，⑧ 是下形的弗雷德霍姆方程

$$K_2\mu\equiv\mu(t_0)-\frac{1}{\pi}\int_{L_0}\mu(t)\frac{\cos(r,n)}{r}ds+\int_{L_0}k_0(t_0,t)\mu(t)ds=$$
$$-f(t_0),t_0\in L_0 \tag{82}$$

其中 $k(t_0,t)\in H$.

与前一情况相仿，可证 $K_2\mu=0$ 或者只有一个线性无关解 1 或者还有另一解 $\mu_0(t)$，视 ㊾ 只有平凡解或者有一非零解 $\Phi_0^-(z)$ 而定.

在前一情况下，$K'_2\nu = 0$ 只有一个解 $\nu(t)$，而 ㉜ 当且仅当

$$\int_{L_0} f(t)\nu(t)\mathrm{d}s = 0 \qquad ㉝$$

时可解，且解唯一（虽然 $\mu(t)$ 可差一实常数项 β_0）.

这时广义自由度仍为 $r = -1(l = 0, m = 1)$.

若 $K_2\mu = 0$ 有两个解 1 与 $\mu_0(t)$，则 $K'_2\nu = 0$ 也有两个解 $\nu_1(t), \nu_2(t)$. 于是 ㉜ 当且仅当

$$f_j = \int_{L_0} f(t)\nu_j(t) = 0, j = 1,2 \qquad ㉞$$

满足时可解，而 ㉜ 有一特解 $\mu_1(t)$，相应于 ㊼ 的解 $\Phi_1^-(z)$. 其一般解由 ㉚ 给出.

这时仍有 $r = -1(l = 1, m = 2)$.

于是，我们有下一定理.

定理 12 MQD 问题解的广义自由度等于 -1，在其一般解中至多有一个实常数.

第六十六回 多复变 引入中国华罗庚[①] 泊松核 特征流形典型域

在 $\mathbf{C}^1$ 空间，若 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是全纯函数，u 和 v 都满足拉普拉斯方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial \bar{z}}=0$，$\frac{\partial^2 v}{\partial z\partial \bar{z}}=0$ 或 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$，即 u,v 为调和函数，其边值问题即所谓迪利克雷问题，在 $\mathbf{C}^1$ 上这个问题有解.

那么，对于 $\mathbf{C}^n(n>1)$ 空间又是如何呢？设 u 是域 $D\subset\mathbf{C}^n$ 上全纯函数 $f(z)$ 的实部，即 $u=\frac{1}{2}(f+\bar{f})$，于是 u 满足偏微分方程组

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_\alpha\partial \bar{z}_\beta}=0,\alpha,\beta=1,2,\cdots,n \quad ①$$

或者

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha\partial y_\beta}+\frac{\partial u^2}{\partial y_\alpha\partial y_\beta}=0,\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha\partial y_\beta}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_\beta\partial y_\alpha}=0$$
$$\alpha,\beta=1,2,\cdots,n$$

（$f(z)$ 的虚部 $v=\frac{1}{2\mathrm{i}}(f-\bar{f})$ 自然亦适合此方程组）. 我们称有二阶连续偏导数的实值函数 $u(x,y)$ 且满足 ① 者为 B 调和函数. 注意 $n=1$ 时，就是普通的调和函数. 反之，给予一域 D 的调和函数 u，是否存在另一 B 调和函数 v，使得 $u+\mathrm{i}v$ 在域 D 全纯？回答是肯定的. 实际上

$$v(x_1,y_1,\cdots,x_n,y_n)=\int_{z_0}^{z}\sum_{\alpha=1}^{n}\left(-\frac{\partial u}{\partial y_\alpha}\mathrm{d}x_\alpha+\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\mathrm{d}y_\alpha\right)$$

就是所需函数（注意 v 一般是非单值函数，除非 D 是单连通的）。一个自然的想法是偏微分方程组 ① 的边值问题应如何提出？当 $n>1$ 时，若给定一域 D 的连续边界值是否相应地存在唯一的 B 调和函数取已给的边界值呢？这个问题一般无解，例如 $n=2$ 时，偏微分方程组 ① 可写为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_1\partial \bar{z}_1}=0,\frac{\partial^2 u}{\partial z_2\partial \bar{z}_2}=0,\frac{\partial^2 u}{\partial z_2\partial \bar{z}_1}=0 \quad ②$$

今在单位双圆柱 $P_2=\{|z_1|<1,|z_2|<1\}$ 的特征流形 $L_2=\{|\xi_1|=1,|\xi_2|=1\}$ 上给定连续实值函数 $\varphi(\xi_1,\xi_2)$，则易知双重泊松积分

$$u(z_1,z_2)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-|z_1|^2}{|1-z_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_1}|^2}\cdot\frac{1-|z_2|^2}{|1-z_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_2}|^2}\varphi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1},\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2})\mathrm{d}\theta_1\mathrm{d}\theta_2$$

① 本回引自文献[83].

在 p_2 中满足 ② 中前两个方程，取极限后就可以看出泊松积分所确定的函数 $u(z_1,z_2)$ 在 p_2 上的边界值已经完全由 $\varphi(\xi_1,\xi_2)$（注意 $(\xi_1,\xi_2)\in L_2$）所确定. 由极值原理知 $u(z_1,z_2)$ 是满足 ② 前两个方程的函数，且是取已给边界值 $\varphi(\xi_1,\xi_2)$ 的唯一解. 因此满足 ② 前两个方程的函数不能在 p_2 的边界上任意给定连续的边界值. 甚至仅给出特征流形 L_2 上的连续边界值，也未必有一在 p_2 满足 ② 的函数，使得在 p_2 的边界上连续，且在 L_2 上取已给的边界值. 例如，在 L_2 上给定连续函数 $\xi_1\overline{\xi_2}+\overline{\xi_1}\xi_2$，若方程组 ② 有一解 $u(z_1,z_2)$ 取已给的边界值，则 u 必满足 ② 的头两个方程，而由上述知 ② 前两个方程的解是唯一的，于是必须 $u(z_1,z_2)=z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2$，但是 $\frac{\partial^2 u}{\partial z_1\partial \overline{z_2}}=1\neq 0$.

偏微分方程组的研究不仅对于函数论，且对于偏微分方程的理论也是十分重要的. 迄今还只有很少的结果. 华罗庚在20世纪50年代首先考虑具有特征流形的四类典型域，进而研究在特征流形上给定连续边界值后，有唯一解的偏微分方程.

关于四类典型域的泊松核各如下.

(1) 对于 R_{I}，我们有

$$p(Z,V)=\frac{\det(I-Z\overline{Z'})^n}{V(D_{\mathrm{I}})\,|\det(I-Z\overline{V'})|^{2n}}$$

此 V 在 D_{I} 上，当 $m=n$ 时可以另写为

$$p(Z,V)=\frac{\det(I-Z\overline{Z'})^n}{v(D_{\mathrm{I}})\,|\det(Z-V)|^{2n}}$$

(2) 对于 R_{II}，我们有

$$p(Z,S)=\frac{\det(I-Z\overline{Z'})^{\frac{1}{2}(n+1)}}{v(D_{\mathrm{II}})\,|\det(I-ZS)|^{n+1}}$$

此处 S 在 D_{II} 上.

(3) 对于 R_{III}，若 n 为偶数，则

$$p(Z,K)=\frac{\det(I+Z\overline{Z})^{\frac{1}{2}(n-1)}}{v(D_{\mathrm{III}})\,|\det(I+Z\overline{K})|^{n-1}}$$

若 n 为奇数，则

$$p(Z,K)=\frac{\det(I+Z\overline{Z})^{\frac{1}{2}n}}{v(D_{\mathrm{III}})\,|\det(I+Z\overline{K})|^{n}}$$

此 K 在 D_{III} 上.

(4) 对于 R_{IV}

$$p(Z,\xi)=\frac{(1+|ZZ'|^2-2Z\overline{Z}')^{\frac{1}{2}n}}{v(D_{\mathrm{IV}})\,|(Z-\xi)(Z-\xi)'|^{n}}$$

此处 ξ 在 D_{IV} 上.

第六十七回　许以超　多复变中显身手①
西格尔　正规对称齐性域

定理 1　设 $K(z,\bar{z})$ 为 C^n 中有界域 D 的伯格曼核函数，则域 D 关于伯格曼度量

伯格曼(Bergman, stefan, 1898—1927)，美国数学家.

$$ds^2 = \sum \frac{\partial^2 \log K(z,\bar{z})}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} dz_i \otimes \overline{dz_j} = dz T(z,\bar{z}) \overline{dz}' \qquad ①$$

的拉普拉斯 - 贝尔特拉米算子为

$$\Delta = \operatorname{tr} T(z,\bar{z})^{-1} \frac{\partial^2}{\partial z' \partial \bar{z}} = \sum h^{ij}(z,\bar{z}) \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \qquad ②$$

其中

$$T(z,\bar{z}) = (h_{ij}(z,\bar{z})) = \left(\frac{\partial^2 \log K(z,\bar{z})}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}\right) \qquad ③$$

为伯格曼度量方阵，又

$$T(z,\bar{z})^{-1} = (h^{ij}(z,\bar{z})) \qquad ④$$

证明　记

$$x = (\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)) = \left(\frac{1}{2}(z+\bar{z}), \frac{1}{2\sqrt{-1}}(z-\bar{z})\right)$$

则

$$dx = (1/2)(dz, \overline{dz})U$$

其中

$$\boldsymbol{U} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}^{(n)} & -\sqrt{-1}\boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} & \sqrt{-1}\boldsymbol{I} \end{pmatrix} \in \boldsymbol{U}(2n)$$

于是伯格曼度量

$$ds^2 = dz\boldsymbol{T}(z,\bar{z})\overline{dz}' = \frac{1}{2}(dz, \overline{dz})\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{T} \\ \overline{\boldsymbol{T}} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}(dz, \overline{dz})'$$

有 $ds^2 = dxG(x)dx'$，其中

$$G(x) = \overline{\boldsymbol{U}}'\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{T} \\ \overline{\boldsymbol{T}} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}\overline{\boldsymbol{U}} = (g_{ij})$$

$$G(x)^{-1} = (g^{ij}) = \boldsymbol{U}'\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \overline{\boldsymbol{T}}^{-1} \\ \boldsymbol{T}^{-1} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}\boldsymbol{U}$$

由微分几何可知，关于黎曼度量

---

① 本回引自文献[132].

$$ds^2 = dxG(x)dx'$$

的拉普拉斯－贝尔特拉米算子为

$$\Delta = \frac{1}{4}(\det G(x))^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{2n}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{i=1}^{2n}(\det G(x))^{\frac{1}{2}}g^{ik}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$$

由于 $\det G(x) = (\det \overline{U})^2(-1)^{n^2}|\det T(z,\bar{z})|^2 = (\det T)^2$

又由 $\det T > 0$ 及 $\frac{\partial}{\partial x} = \sqrt{2}(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial \bar{z}})\overline{U}$. 于是

$$\Delta = \frac{1}{2}(\det T)^{-1}(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial \bar{z}})\det U\left(\begin{pmatrix} 0 & \overline{T}^{-1} \\ T^{-1} & 0\end{pmatrix}(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial \bar{z}})'\right) =$$

$$\operatorname{tr} T(z,\bar{z})^{-1}\frac{\partial^2}{\partial z'\partial \bar{z}} + (\det T)^{-1}\operatorname{Re}\left(\frac{\partial}{\partial z}(\det T)\overline{T}^{-1}\right)\frac{\partial'}{\partial \bar{z}}$$

因此为了证明 $\Delta = \operatorname{tr} T^{-1}\frac{\partial^2}{\partial z'\partial \bar{z}}$,只要证明$\frac{\partial}{\partial z}((\det T)\overline{T}^{-1} = 0$就够了.事实上

$$(\det T)^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial z}((\det T)\overline{T}^{-1})\right)\frac{\partial'}{\partial \bar{z}} =$$

$$(\det T)^{-1}\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial z_i}(\det T)h^{ji}\right)\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} =$$

$$\sum \frac{\partial h^{ji}}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} + \sum_{i,j}\frac{\partial \log(\det T)}{\partial z_i}h^{ji}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} =$$

$$-\sum_{i,j,p,q}h^{jp}\frac{\partial h_{pq}}{\partial z_i}h^{qi}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} + \sum_{i,j}h^{ji}(\operatorname{tr} T^{-1}\frac{\partial T}{\partial z_i})\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} =$$

$$-\sum_{i,j,p,q}h^{jp}h^{qi}\frac{\partial^3\log K(z,\bar{z})}{\partial z_i\partial z_p\partial \bar{z}_p}\cdot\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} + \sum_{i,j,p,q}h^{ji}h^{pq}\frac{\partial h_{qp}}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} =$$

$$-\sum_{i,j,p,q}h^{jp}h^{qi}\frac{\partial h_{iq}}{\partial z_p}\cdot\frac{\partial}{\partial \bar{z}_q} + \sum_{i,j,p,q}h^{ji}h^{pq}\frac{\partial h_{qp}}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = 0$$

因此证明了断言.证完.

定义1 记Δ为有界域D上关于伯格曼度量ds^2的拉普拉斯－贝尔特拉米算子.域D上的实二阶连续可微函数$f(z,\bar{z})$称为关于拉普拉斯－贝尔特拉米算子Δ的调和函数,简称为调和函数,如果它适合微分方程

$$\Delta f = 0 \tag{⑤}$$

对域D上的全纯自同构群$\mathrm{Aut}(D)$中任一元素$\sigma: w = f(z)$,伯格曼度量方阵有

$$\frac{\partial w}{\partial z}T(w,\bar{w})\overline{\frac{\partial w'}{\partial z}} = T(z,\bar{z}) \tag{⑥}$$

及

$$\frac{\partial^2}{\partial z'\partial \bar{z}} = \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2}{\partial w'\partial \bar{w}}\overline{\frac{\partial w'}{\partial z}}$$

其中

$$\frac{\partial^2}{\partial z' \partial \bar{z}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial \bar{z}_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial z_n \partial \bar{z}_1} & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial z_n \partial \bar{z}_n} \end{pmatrix} \qquad ⑦$$

于是

$$\Delta_z = \operatorname{tr} T(z,\bar{z})^{-1} \frac{\partial^2}{\partial z' \partial \bar{z}} = \operatorname{tr} T(w,\bar{w})^{-1} \frac{\partial^2}{\partial w' \partial \bar{w}} = \Delta_w \qquad ⑧$$

这证明了有界域 D 上关于伯格曼度量的拉普拉斯 - 贝尔特拉米算子在全纯自同构群 $\mathrm{Aut}(D)$ 作用下不变.

在域 D 上的所有调和函数构成的集合为线性空间 $B(D)$.

令 $\sigma \in \mathrm{Aut}(D)$, $\sigma: w = f(z)$. 任取函数 $F(z,\bar{z})$, 于是有函数 $\widetilde{F}(w,\bar{w}) = \widetilde{F}(f(z),\overline{f(z)}) = F(z,\bar{z})$. 由 $F \in B(D)$, 即 $\Delta_z F(z,\bar{z}) = 0$, 则有 $\Delta_w F(z,\bar{z}) = \Delta_w \widetilde{F}(w,\bar{w}) = 0$. 这证明了 $F(z,\bar{z}) \in B(D)$, 则 $\widetilde{F}(w,\bar{w}) \in B(D)$. 在调和函数空间 $B(D)$ 上引进映射 $F \to \widetilde{F}$. 实际上, 此映射为 σ^*, 它是线性空间 $B(D)$ 上的线性同构, 即有 $\sigma^*(B(D)) = B(D)$.

利用线性同构 σ^*, 在 D 为齐性有界域时, 为了验证函数 $F \in B(D)$ 为调和函数, 问题化为计算如下关系: 任取 D 中固定点 z_0, 则

$$\operatorname{tr} T(z_0,\bar{z}_0)^{-1} \frac{\partial^2 F(\sigma^{-1}(z),\sigma^{-1}(z))}{\partial z' \partial \bar{z}} \bigg|_{z = z_0, \bar{z} = \bar{z}_0} = 0 \qquad ⑨$$

其中 σ 为全纯自同构, 它将域 D 中点 z_1 映为固定点 z_0.

熟知调和函数论中一个重要问题是给了域 D 的 Silov 边界 $S(D)$, 考虑实解析子流形 $S(D)$ 上的连续且平方可积函数类

$$C(S(D)) \cap L^2(S(D),\mu)$$

其中可积的含义为对实解析子流形 m 上的一个确定的测度 μ 而言. 且考虑拉普拉斯 - 贝尔特拉米方程

$$\Delta f = 0 \qquad ⑩$$

的迪利克雷问题, 即给定边值 $f(\xi)$, $\forall \xi \in S(D)$, 是否有适合拉普拉斯 - 贝尔特拉米方程 ⑩ 的解 F 使得

$$\lim_{z \to \xi} F(z) = f(\xi), \forall \xi \in S(D)$$

现在给出泊松核的定义.

定义 2 实值函数 $P(z,\bar{\xi})$, $\forall z \in D, \xi \in S(D)$ 称为域 D 上的泊松核函数, 如果它适合下面条件:

(1) $P(z,\bar{\xi}) > 0, \forall z \in D, \xi \in S(D)$.

(2) 记 $P(z,\overline{\xi})$ 为关于 z 及 $\overline{\xi}$ 的域 $D\times\overline{D}$ 上的全纯函数,其中 $\overline{D}$ 记作 D 的共轭点集,即 $\overline{D}=\{\overline{z}\mid z\in D\}$. 又关于 Re ξ, Im ξ 为 $D\cup S(D)$ 上的实解析函数.

(3) $\Delta_z P(z,\overline{\xi})=0,\forall z\in D,\xi\in S(D)$.

(4) 任取 $f(\xi)\in C(S(D))\cap L^2(S(D),\mu)$,则

$$f(z)=\int_{S(D)}P(z,\overline{\xi})f(\xi)\mu(\xi)$$

为域 D 上的调和函数,且 $\lim\limits_{z\to\xi}f(z)=f(\xi),\forall\xi\in S(D)$.

今任取 $\sigma\in\mathrm{Aut}(D)$,如果 σ 可开拓到域 D 的 Silov 边界 $S(D)$ 上为实解析自同构,则有泊松积分

$$f(z)=\int_{S(D)}P(z,\overline{\xi})f(\xi)\mu(\xi)=\int_{S(D)}P(z,\sigma\overline{(\xi)})f(\sigma(\xi))J_\sigma\mu(\xi)$$

其中 J_σ 为 σ 关于测度 $\mu(\xi)$ 的雅可比行列式,因此有

$$(\sigma^*f)(z)=f(\sigma(z))=\int_{S(D)}P(\sigma(z),\overline{\sigma(\xi)})f(\sigma(\xi)\mid J_\sigma\mid\mu(\xi))=$$

$$\int_{S(D)}P(z,\overline{\xi})f(\sigma(\xi))\mu(\xi)$$

这证明了

$$\int_{S(D)}(P(\sigma(z),\overline{\sigma(\xi)})\mid J_\sigma\mid-P(z,\overline{\xi})f(\sigma(\xi)))\mu(\xi)=0 \qquad ⑪$$

如果

$$P(\sigma(z),\overline{\sigma(\xi)})\mid J_\sigma\mid-P(z,\overline{\xi})\in C(S(D))\cap L^2(S(D),\mu),\forall z\in D$$

取

$$f(\sigma(\xi))=P(\sigma(z),\overline{\sigma(\xi)})\mid J_\sigma\mid-P(z,\overline{\xi})$$

因此 $f(\sigma(\xi))=P(\sigma(z),\overline{\sigma(\xi)})\mid J_\sigma\mid-P(z,\overline{\xi})$ 关于 ξ 在 m 上几乎处处等于零. 由泊松核的定义条件(2),有 $P(\sigma(z),\overline{\sigma(\xi)})\mid J_\sigma\mid=P(z,\overline{\xi})$.

引理 1 设 D 为 $\mathbf{C}^n$ 中有界域,且 $\sigma\in\mathrm{Aut}(D)$ 诱导了 Silov 边界 $S(D)$ 上的实解析自同构 σ,使得 σ 关于测度 μ 的雅可比行列式 J_σ 属于 $C(S(D))\cap L^2(S(D))$. 若在有界域 D 上有关于拉普拉斯 – 贝尔特拉米算子的泊松核 $P(z,\overline{\xi})$,则有

$$P(\sigma(z),\overline{\sigma(\xi)})\mid J_\sigma\mid=P(z,\overline{\xi}),\forall z\in D,\xi\in S(D) \qquad ⑫$$

若 D 为齐性有界域,且 Aut(D) 限制在 Silov 边界 $S(D)$ 上可微,则差一个正实常数,式 ⑫ 唯一决定泊松核.

另一方面,若 D 为 $\mathbf{C}^n$ 中有界域,$S(D)$ 为它的 Silov 边界. 若域 D 有柯西 – 舍贯核 $S(z,\overline{\xi})$,于是任取 $f(\xi)\in C(S(D))\cap L^2(S(D),\mu)$,则

舍贯(Szegö, Gabor, 1895—1985),匈牙利数学家,希尔伯特学派的代表人物.

$$\frac{\partial^2\mathscr{U}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathscr{U}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mathscr{U}}{\partial z^2}=0$$

$$f(z)=\int_{S(D)}S(z,\overline{\xi})f(\xi)\mu(\xi)$$

在域 D 上全纯，取 $g(\xi)=S(\xi,\overline{z})f(\xi)$，代入有

$$S(z,\overline{z})f(z)=\int_{S(D)}S(z,\overline{\xi})S(\xi,\overline{z})f(\xi)\mu(\xi)$$

由于柯西－舍贯核 $S(z,\overline{\xi})$ 有

$$S(z,\overline{\xi})=S(\xi,\overline{z})$$

所以有
$$S(z,\overline{z})f(z)=\int_{S(D)}|S(z,\overline{\xi})|^2f(\xi)\mu(\xi)$$

即有
$$f(z)=\int_{S(D)}\frac{|S(z,\overline{\xi})|^2}{S(z,\overline{z})}f(\xi)\mu(\xi)$$

记

$$P(z,\overline{\xi})=\frac{|S(z,\overline{\xi})|^2}{S(z,\overline{z})}$$

则 $f(\xi)\in C(S(D))\cap L^2(S(D),\mu)$ 在 Silov 边界 $S(D)$ 上有积分表达式

$$f(z)=\int_{S(D)}P(z,\overline{\xi})f(\xi)\mu(\xi)$$

定义 3 设 D 为 $\mathbf{C}^n$ 中有界域，设 D 上有柯西－舍贯核 $S(z,\overline{\xi})$，则函数

$$P(z,\xi)=\frac{|S(z,\overline{\xi})|^2}{S(z,\overline{z})},\forall z\in D,\xi\in S(D) \tag{13}$$

称为域 D 的形式泊松核.

$$f(z)=\int_{S(D)}P(z,\overline{\xi})f(\xi)\mu(\xi) \tag{14}$$

称为域 D 的形式泊松积分.

用定义 2 来检验形式泊松核是否为泊松核，这需要验证定义 2 的条件(3). 另一方面，注意到柯西－舍贯核 $S(z,\overline{\xi})$ 有关系

$$S(\sigma(z),\overline{\sigma(\xi)})J_\sigma=S(z,\overline{\xi}) \tag{15}$$

这里 J_σ 为关于测度 μ 的雅可比行列式，它是 Silov 边界 $S(D)$ 上的实解析函数，所以记作 $J_\sigma(\xi)$. 由式⑬有

$$P(\sigma(z),\sigma(\xi))=P(z,\xi)|J_\sigma(\xi)|^{-2}J_\sigma(z) \tag{16}$$

在 $J_\sigma(z)=|J_\sigma(\xi)|$ 时，式⑯改为式⑫.

华罗庚在 1958 年证明了四大类典型域的形式泊松核为泊松核，且得出了泊松核的明显表达式. 在 1965 年，Koranyi 用半单李群的工具，证明了在对称有界域时，形式泊松核为泊松核. 1976 年，Vagi 提出如下猜想：设 D 为齐性有界域，形式泊松核为泊松核当且仅当域对称. 其实在 1965 年，陆汝钤已在一个具体的非对称齐性西格尔域的情形，证明了它的形式泊松核不是泊松核. 在这里，我们给出 Vagi 猜想的肯定答案.

西格尔(Siegel, Carl Ludwig, 1896—1981)，德国数学家. 生于柏林.

现在考虑正规西格尔域 $D(V_N,F)$. 由 $D(V_N,F)$ 有柯西－舍贵核

$$S(z,u;\overline{\xi},\overline{\eta}) = c_0\prod_{j=1}^{N}\det C_j\left(\frac{1}{2\sqrt{-1}}(z-\overline{\xi})-F(u,\eta)\right)^{\lambda_j} \tag{17}$$

其中

$$\sum_{i=1}^{j}\lambda_i n_{ij} = -\frac{1}{2}(n_j+n'_j+2m_j), 1\leqslant j\leqslant N \tag{18}$$

于是形式泊松核为

$$P(z,u;\overline{\xi},\overline{\eta}) = c_0\frac{\prod_{j=1}^{N}\left|\det C_j\left(\frac{1}{2\sqrt{-1}}(z-\overline{\xi})-F(u,\eta)\right)\right|^{2\lambda_j}}{\prod_{j=1}^{N}\det C_j(\mathrm{Im}(z)-F(u,u))^{\lambda_j}} \tag{19}$$

第六十八回　四元数　汉米尔顿偶发现
构空间　迪利克雷再调和

用 $\boldsymbol{x} = x_1 + \boldsymbol{i}x_2 + \boldsymbol{j}x_3 + \boldsymbol{k}x_4$ 表示四维欧氏空间 $\mathbf{R}^4$ 中的点，称为四元数，其中 $\{1, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ 为其基，满足条件：$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = -1, \boldsymbol{ij} = -\boldsymbol{ji} = \boldsymbol{k}$，$x_1$ 叫做 $\boldsymbol{x}$ 的数量部分，$\boldsymbol{x}_6 = \boldsymbol{i}x_1 + \boldsymbol{j}x_2 + \boldsymbol{k}x_3$ 叫做 $\boldsymbol{x}$ 的向量部分．设 D 是 $\mathbf{R}^4$ 中的一个有界区域，用 $\ddot{\boldsymbol{v}} = u_1 + \boldsymbol{i}u_2 + \boldsymbol{j}u_3 + \boldsymbol{k}u_4$ 表示 D 上的四元函数．如果 $\boldsymbol{v} = v(x)$ 的每个分量在 D 内具有二阶连续偏微商，且

$$\partial_x \boldsymbol{v} = (v_{x_1} + \boldsymbol{i}v_{x_2} + \boldsymbol{j}v_{x_3} + \boldsymbol{k}v_{x_4}) = 0 \qquad ①$$

这里微分算子 $\partial x = (\ \ )_{x_1} + \boldsymbol{i}(\ \ )_{x_2} + \boldsymbol{j}(\ \ )_{x_3} + \boldsymbol{k}(\ \ )_{x_4}$，那么称 $u(x)$ 为 D 上的正则函数，① 可改写成一阶椭圆型方程组

$$\begin{cases} u_{1x_1} - u_{2x_2} - u_{3x_3} - u_{4x_4} = 0 \\ u_{1x_2} + u_{2x_1} - u_{3x_4} + u_{4x_3} = 0 \\ u_{1x_3} + u_{2x_4} + u_{3x_1} - u_{4x_2} = 0 \\ u_{1x_4} - u_{2x_3} + u_{3x_2} + u_{4x_1} = 0 \end{cases}$$

又记 $\partial\overline{x} = (\ \ )_{x_1} - \boldsymbol{i}(\ \ )_{x_2} - \boldsymbol{j}(\ \ )_{x_3} - \boldsymbol{k}(\ \ )_{x_4}$，则 $\partial x \partial\overline{x} = \partial\overline{x}\partial x = (\ \ )_{x_1^2} + (\ \ )_{x_2^2} + (\ \ )_{x_3^2} + (\ \ )_{x_4^2} = \Delta$ 为拉普拉斯算子．容易看出：正则函数 $V(x)$ 的每个分量 $u_n(x)$ 满足拉普拉斯方程，即

$$\sum_{m=1}^{4} u_n x_m^2 = 0, n = 1, \cdots, 4$$

因此称 $u_n(x)(n = 1, \cdots, 4)$ 是正则调和函数．

设 D 是 $\mathbf{R}^4$ 中的一个单连通圆柱区域，$D = G_1 \times G_2$，G_1, G_2 分别是 $z_{12} = x_1 + \mathrm{i}x_2$，$z_{34} = x_3 + \mathrm{i}x_4$ 复平面上的有界区域，其边界分别为 $\Gamma_1, \Gamma_2 \in C'_\alpha(0 < \alpha < 1)$，不妨设 $z_{12} = 0 \in G_1$，$z_{34} = 0 \in G_2$，考虑区域 D 上四元正则函数的迪利克雷边值问题，即求 D 上的正则函数 $v(x)$，在 $\overline{D}$ 上连续，且满足边界条件

$$U_{12}(x) = \varphi(x), x \in \Gamma = \partial D \qquad ②$$

其中，$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \mathrm{i}\varphi_2(x)$，$\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ 是 Γ 上的实值连续函数，且在 D 的特征边界 $\Gamma_0 = \Gamma_1 \times \Gamma_2(\Gamma_j = \partial G_j, j = 1,2)$ 上具有赫尔德连续偏微商，即 $\varphi_j(x) \in C'_\alpha(\Gamma_0)(0 < \alpha < 1, j = 1,2)$．

赫尔德（Hölder, Otto Ludwing, 1859—1937），德国数学家．生于斯图加特，卒于莱比锡．

泛函篇

第十二章

第六十九回 世纪初 希尔伯特指方向[①] 到近代 泛函分析入殿堂

希尔伯特23个数学问题的第19个问题是:正则变分问题的解必定是解析的吗?

希尔伯特说:"我认为,在解析函数论基础方面,最值得注意的事实是:存在着这样的偏微分方程,它们的所有积分必为独立变元的解析函数,简而言之,就是存在着除解析解外没有其他解的微分方程.这类偏微分方程中最著名的就是位势方程

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

还有方程

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=e^f$$

极小曲面的偏微分方程和其他的方程."这些偏微分方程大多数都有一个共同的特性,即它们都是某类变分问题也就是下述变分问题的拉格朗日微分方程

$$\iint F(p,q,z;x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\min\left(p=\frac{\partial z}{\partial x},q=\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

F 本身是一解析函数,对于所讨论的范围内变量的一切值,满足不等式

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial q^2}-\left(\frac{\partial^2 F}{\partial p\partial q}\right)^2>0$$

① 本回引自文献[79].

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2}=0$$

我们将称这类问题为正则变分问题.在几何学、力学和数学物理中起作用的,主要就是正则的变分问题;很自然会提出这样的问题:正则变分问题的一切解是否一定是解析函数.换句话说,是否每个正则变分问题的拉格朗日偏微分方程都有这样的性质:它们只容许有解析积分?甚至当函数受到限制,例如,像在位势函数的迪利克雷问题中那样取连续的但非解析的边界值时,情形是否仍是这样呢?

近代偏微分方程理论,有别于经典理论的主要标志是各种泛函分析理论与方法的引入和广泛应用.20世纪下半叶,由于作为抽象分析基础的泛函分析逐渐成熟,使得偏微分方程能以现代数学的思想、语言、理论和方法处理问题,从而扩大了解的概念和近似解的计算方法,建立了解的各种先验估计,和一些关于解的定性、定量的处理方法、如算子半群方法、近代变分方法、单调性(算子)方法、紧致方法等等.

我们先说广义解,众所周知数学物理中的偏微分方程是对物理场函数添加一定的光滑性得到的,这虽然有它的好处,比如,可以寻求用经典的数学物理方程理论和方法来求解.不过,由于提高了函数光滑性,所以这种解只能在一个相对小的函数空间里去寻找,这不仅增加了难度,有时甚至是做不到的,即在这种函数空间里无解(无经典解).然而物理过程本身是客观存在的,怎么会没有解!原因就出在归纳模型中的人为添加条件,于是人们就寻求在扩大的空间里找解,这种解就不再具有方程中的最高阶光滑度,但是它更符合物理意义,被称为广义解.因此,所谓广义解,就是不满足经典意义下的解,由于偏微分方程定解问题的多样性,因此广义解也有多种形式.

对于椭圆型方程的迪利克雷问题

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f, \Omega \qquad ①$$

$$u|_{\partial_\Omega} = 0 \qquad ②$$

其中,$\Omega \in \mathbf{R}^n$ 是有界区域,$a_{ij}(x)$ 对称,即 $a_{ij} = a_{ji}$,且满足椭圆性条件:$\exists\, a > 0$,使

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant a\sum_i |\xi_i|^2, 0 \neq \xi \in \mathbf{R}^n \qquad ③$$

当 $f \in H^{-1}(\Omega)$,$u \in H'_0(\Omega)$,有

$$(Lu - f, \varphi) = 0, \forall \varphi \in H'_0(\Omega) \qquad ④$$

称 u 为 $Lu = f$ 具有迪利克雷(齐次)边界条件的广义解.

第七十四回 新热点 泛函分析非线性[1]
古典解 强解弱解极大值

兰州大学是我国非线性泛函分析研究的重镇，陈文嶸等用泛函方法研究了二阶椭圆型偏微分方程。

设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n, n \geqslant 2$ 是有界区域. 记

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) D_{ij}u + \sum_{i=1}^{n} b^i(x) D_i u + c(x) u$$

其中，$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, D_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$，而 $a^{ij} = a^{ji}, b^i$ 以及 c 都是 Ω 上的实函数.

我们说算子 L 的 Ω 中是椭圆的，是指矩阵 $A(x) = (a^{ij}(x))$ 在每一点 $x \in \Omega$ 处都是正定的. 事实上，如果用 $\lambda(x), \Lambda(x)$ 分别表示 $A(x)$ 的最小特征值和最大特征值. 则 L 在 Ω 中是椭圆的充要条件是对任何 $x \in \Omega$ 以及任何 $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ 有

$$0 < \lambda(x) \mid \xi \mid^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \leqslant \Lambda(x) \mid \xi \mid^2$$

如果存在 $\lambda_0 > 0$ 使得当 $x \in \Omega$ 时，$\lambda(x) \geqslant \lambda_0$，则称 L 在 Ω 中是严格椭圆的；如果 L 是椭圆的，并且 $\frac{\Lambda(x)}{\lambda(x)}$ 在 Ω 上有界，则称 L 在 Ω 中是一致椭圆的.

一、古典解与绍德尔估计

绍德尔（Schauder, Juliusz Pawel, 1899—1943），波兰数学家.

在这里，我们总假定 L 的系数 b^i 满足如下条件：存在常数 $M_0 > 0$ 使得

$$\frac{\mid b^i(x) \mid}{\lambda(x)} \leqslant M_0, i = 1, \cdots, n, x \in \Omega$$

定理 1（弱极大值原理） 设 L 在 Ω 中是椭圆的，并且系数 $c = 0$. 再设 $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ 并且在 Ω 中满足

$$Lu \geqslant 0 (\leqslant 0)$$

则 u 在 $\overline{\Omega}$ 上的最大值（最小值）在 $\partial\Omega$ 上达到，即

$$\sup_{x\in\Omega} u(x) = \sup_{x\in\partial\Omega} u(x) \left(\inf_{x\in\Omega} u(x) = \inf_{x\in\partial\Omega} u(x) \right)$$

定理 2（强极大值原理） 设 L 在 Ω 中是一致椭圆的，$c \leqslant 0$ 并且 $\frac{c}{\lambda}$ 在 Ω 中

---

[1] 本回引自文献[72].

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial_x^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial_y^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial_z^2} = 0$$

有界；再设 $u \in C^2(\Omega)$ 并且在 Ω 中满足

$$Lu \geqslant 0(\leqslant 0)$$

那么，除非 u 在 Ω 中恒为常数，否则 u 在 Ω 内部不能达到非负最大值（非正最小值）.

定理3（最大模估计） 设 L 在 Ω 中是椭圆的，并且 $c \leqslant 0$，再设 $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ 并且在 Ω 中满足 $Lu \geqslant f(=f)$，则

$$\sup_{\Omega} u(|u|) \leqslant \sup_{\partial\Omega} u^+(|u|) + C\sup_{\Omega}\frac{|f^-|}{\lambda}(\frac{|f|}{\lambda})$$

其中，$u^+ = \max\{u, 0\}$，$f^- = \min\{f, 0\}$，C 是常数仅依赖于 Ω 的直径以及 M_0.

定义1 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界区域，我们称 $\partial\Omega$ 是 $C^{k,\beta}$ 的，$0 \leqslant \beta \leqslant 1$，是指对每个点 $x_0 \leqslant \partial\Omega$，存在开球 $B(x_0, r)$ 以及一一到上的映射 $\psi: B(x_0, r) \to D \subset \mathbf{R}^n$ 使得下面三个条件成立：

(1) $\psi(B(x_0, r) \cap \Omega) \subset \mathbf{R}^n_+ = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_n > 0\}$

(2) $\psi(B(x_0, r) \cap \partial\Omega) \subset \partial\mathbf{R}^n_+$；

(3) $\psi \in C^{k,\beta}(B(x_0, r))$，$\psi^{-1} \in C^{k,\beta}(D)$.

定理4（绍德尔估计） 设 $\partial\Omega$ 是 $C^{2,\beta}$ 的，L 是 Ω 中的严格椭圆型算子，并且满足：

存在常数 $M_1 > 0$ 使得 L 的系数 a^{ij}，b^i 以及 c 在 $C^{0,\beta}(\overline{\Omega})$ 中的范数

$$\| a^{ij} \|, \| b^i \|, \| c \| \leqslant M_1$$

又设 $u \in C^{2,\beta}(\overline{\Omega})$ 是迪利克雷问题

$$\begin{cases} Lu = f, \text{在 } \Omega \text{ 中} \\ u = \varphi, \text{在 } \partial\Omega \text{ 上} \end{cases}$$

的解，其中 $f \in C^{0,\beta}(\overline{\Omega})$，$\varphi \in C^{2,\beta}(\overline{\Omega})$，则

$$\| u \|_{C^{2,\beta}(\overline{\Omega})} \leqslant C(\| u \|_{C^0(\Omega)} + \| \varphi \|_{C^{2,\beta}(\overline{\Omega})} + \| f \|_{C^{0,\beta}(\overline{\Omega})})$$

其中 $C = C(n, \beta, \lambda_0, M_1, \Omega)$ 是依赖于 n, β, λ_0, M_1 以及 Ω 的常数.

定理5（存在唯一性定理） 设 $\partial\Omega$ 是 $C^{2,\beta}$ 的，L 是 Ω 中的严格椭圆型算子，并且 $c \leqslant 0$. 再设 f 以及 L 的系数属于 $C^{0,\beta}(\overline{\Omega})$ 以及 $\varphi \in C^{2,\beta}(\overline{\Omega})$，那么，迪利克雷问题

$$\begin{cases} Lu = f, \text{在 } \Omega \text{ 中} \\ u = \varphi, \text{在 } \partial\Omega \text{ 上} \end{cases}$$

有唯一的解 $u \in C^{2,\beta}(\overline{\Omega})$.

二、强解与 L^p 估计

如果 u 在 Ω 中两次弱可微，并且 $Lu = f$ 在 Ω 中几乎处处成立，则称 u 是方程 $Lu = f$ 的强解.

定理 6(最大模估计)　设 L 在 Ω 中是椭圆的，$c \leqslant 0$ 并且 $\frac{b^i}{\lambda}, \frac{f}{\lambda} \in L^n(\Omega)$，$i = 1,2,\cdots,n$. 假设 $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap W^{2,n}(\Omega)$ 并且在 Ω 中几乎处处有 $Lu \geqslant f(=f)$，则

$$\sup_{\Omega} u(|u|) \leqslant \sup_{\partial\Omega} u^+(|u|) + C\left\| \frac{f}{\lambda} \right\|_{L^n(\Omega)}$$

其中 C 是常数，仅依赖于 n, Ω 的直径以及 $\left\| \frac{b^i}{\lambda} \right\|_{L^n(\Omega)}$, $i = 1,2,\cdots,n$.

定理 7(L^p 估计)　设 $\partial\Omega$ 是 $C^{1,1}$ 的，L 是 Ω 中的严格椭圆型算子，并且假定 L 的系数 $a^{ij} \in C^0(\overline{\Omega})$, $b^i, c \in L^\infty(\Omega)$, $i,j = 1,\cdots,n$. 又设 $f \in L^p(\Omega)$, $1 < p < +\infty$, $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ 是方程 $Lu = f$ 的强解，则

$$\| u \|_{W^{2,p}(\Omega)} \leqslant C(\| u \|_{L^p(\Omega)} + \| f \|_{L^p(\Omega)})$$

其中 C 是常数，仅依赖于 n, p, λ_0, Ω 以及 a^{ij}, b^i, c 在 $L^\infty(\Omega)$ 中的范数.

定理 8(存在唯一性)　设 $\partial\Omega$ 是 $C^{1,1}$ 的，L 是 Ω 中的严格椭圆型算子，$c \leqslant 0$，并且 $a^{ij} \in C^0(\overline{\Omega})$, $b^i, c \in L^\infty(\Omega)$, $i,j = 1,\cdots,n$. 再设 $f \in L^p(\Omega)$, $\varphi \in W^{2,p}(\Omega)$, $1 < p < +\infty$，则迪利克雷问题

$$\begin{cases} Lu = f, \text{在 } \Omega \text{ 中} \\ u - \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \end{cases}$$

有唯一的解 $u \in W^{2,p}(\Omega)$.

三、弱解

弱解是针对主部为梯度型算子

$$Lu = \sum_{i=1}^n D_i\left(\sum_{j=1}^n a^{ij}(x) D_j u + b^i(x) u\right) + \sum_{i=1}^n c^i(x) D_i u + d(x) u$$

而定义一种比强解更弱的一般解，这里仅假定 L 的系数 $a^{ij}, b^i, c^i, d(i,j = 1,\cdots,n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中有界区域 Ω 上的可测函数. 我们说 Ω 上的弱可微函数 u 满足

$$Lu = 0(\geqslant 0, \leqslant 0)$$

是指对任何非负函数 $v \in C_0^1(\Omega)$，有

$$\langle Lu, v\rangle = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a^{ij}(x) D_j u + b^i u\right) D_i v - \left(\sum_{i=1}^n c^i D_i u + du\right) v\right) \mathrm{d}x = 0(\leqslant 0, \geqslant 0)$$

设 f^i, g, $i = 1,2,\cdots,n$ 是 Ω 上的可积函数，我们说 Ω 上的弱可微函数 u 是方程

$$Lu = g + \sum_{i=1}^n D_i f^i$$

的弱解，是指对任何 $v \in C_0^1(\Omega)$，有

$$\langle Lu, v\rangle = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n f^i D_i v - gv\right) \mathrm{d}x$$

定理 9(强极大值原理) 设算子 L 满足下列条件:

(1) L 在 Ω 中是严格椭圆的,即存在正常数 λ 使得当 $x \in \Omega, \xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbf{R}^n$ 时,有

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \lambda |\xi|^2$$

(2) L 的系数有界,即存在 $M_2 > 0$ 使得对任何 $x \in \Omega$,有

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |a^{ij}(x)| + |b^i(x)| + |c^i(x)|\right) + |d(x)| \leqslant M_2$$

(3) 对每一个非负函数 $v \in C_0^1(\Omega)$ 有

$$\int_\Omega (dv - b^i D_i v) \mathrm{d}x \leqslant 0$$

再设 $u \in W^{1,2}(\Omega)$ 并且在 Ω 中满足 $Lu \geqslant 0$. 如果存在某个开球 $B \subset\subset \Omega$(即 $\operatorname{dist}(B, \partial\Omega) > 0$) 使得

$$\sup_B u = \sup_\Omega u \geqslant 0$$

则 u 在 Ω 上恒为常数.

定理 10(存在唯一性) 设算子 L 满足定理 9 中的(1),(2),(3). 则当 $\varphi \in W^{1,2}(\Omega), g, f^i \in L^2(\Omega)(i = 1, \cdots, n)$ 时,迪利克雷问题

$$\begin{cases} Lu = g + D_i f^i, 在\ \Omega\ 中 \\ u - \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega) \end{cases}$$

利普希茨(Lipschitz, Rudolf Otto Sigismund, 1832—1903),德国数学家,生于柯尼斯堡,卒于波恩.

存在唯一的解 $u \in W^{1,2}(\Omega)$,并且满足

$$\| u \|_{W^{1,2}(\Omega)} \leqslant C\left(\| u \|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \| f^i \|_{L^2(\Omega)} + \| g \|_{L^2(\Omega)} + \| \varphi \|_{W^{1,2}(\Omega)}\right)$$

其中 C 是常数,只依赖于 L 与 Ω.

定理 11(正则性) 设 $\partial\Omega$ 是 C^2 的, L 是 Ω 中的严格椭圆型算子, L 的系数 $a^{ij}, b^i, i, j = 1, \cdots, n$,在 Ω 中是一致利普希茨连续的,而 $c^i, d \in L^\infty(\Omega), i = 1, \cdots, n$. 再设 $u \in W^{1,2}(\Omega)$ 是迪利克雷问题

$$\begin{cases} Lu = f, 在\ \Omega\ 中 \\ u - \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega) \end{cases}$$

的弱解,其中 $f \in L^2(\Omega), \varphi \in W^{2,2}(\Omega)$,则 $u \in W^{2,2}(\Omega)$,并且

$$\| u \|_{W^{2,2}(\Omega)} \leqslant C\left(\| u \|_{L^2(\Omega)} + \| f \|_{L^2(\Omega)} + \| \varphi \|_{W^{2,2}(\Omega)}\right)$$

其中 C 是常数,仅依赖于 $n, \lambda, \partial\Omega, a^{ij}, b^i$ 在 $C^{0,1}(\Omega)$ 中的范数以及 c^i, d 在 $L^\infty(\Omega)$ 中的范数.

第七十一回　抽象度　希尔伯特空间高
结论好　线性泛函是内积

定理　希尔伯特空间上的任何线性泛函都是一个内积.

换言之,如果 $u \to f(u)$ 是取纯量值的线性函数,并且对于某个数 c 及所有的 u,都有 $|f(u)| \leqslant c|u|$,则在 U 中必存在一个 v,使得 $f(u) = (u,v)$ 对于一切 u 都成立.为了证明这个定理,注意除了在 $f = 0$ 这种平凡的情形之外,$\ker f$ 总是 U 中的闭线性子空间 V,而且 V 不等于 U.另外,f 在 $V^{\perp}$ 上不能等于零.所以 $V^{\perp}$ 中必定包含一个 w,使得 $f(w) = 1$.因为 $u = u - f(u)w + f(u)w$,而且 $f(u - f(u)w) = f(u) - f(u) = 0$,所以由此即可推出 $(u,w) = f(u)(w,w)$.令 $v = w/(w,w)$,就得到所要的结果.

现在我们应用上面的定理来解决数学物理问题.首先,假设 u 和 v 都是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个有界开子集 I 上的光滑实函数,并考虑积分

$$D(u,v) = \int_I (\partial_1 u(x)\partial_1 v(x) + \cdots + \partial_n u(x)\partial_n v(x))\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$

其中 $\partial_k = \partial/\partial x_k$.如果 $u = v$,它就称为 u 的迪利克雷积分,用 $D[u]$ 来表示.因为 $D(u,v) = D(v,u)$ 是 u 和 v 的线性函数,所以我们有

$$D[u+v] = D(u+v,u+v) = D(u,u) + 2D(u,v) + D(v,v)$$

如果 u 和 w 都是光滑函数,而且 w 在 I 的边界 J 上等于零,则由分部积分法即得

$$D(u,w) = -\int_I w(x)\Delta u(x)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$

其中 $\Delta = \partial_1^2 + \cdots + \partial_n^2$ 是拉普拉斯算子.倘若 u 在 I 内是调和函数,也就是 Δu 在 I 内等于零,那么这个积分就等于零,从而即有

$$D[u+w] = D[u] + D[w]$$

这个公式称为迪利克雷原理.它可以粗略地表述如下:令 $v = u + w$,在所有在 I 的边界上等于已知函数 f 的函数 v 当中,调和函数具有最小的迪利克雷积分.到此,我们就被引导到迪利克雷问题的存在性和唯一性的问题.迪利克雷问题是在1840年左右提出的,问题是求一个在 I 中调和的函数 u,使得它在边界上取得给定的值.对于 $n > 1$,这个问题很不简单,但对于 $n = 1$,调和函数是次数最高为1的多项式 $u(x) = cx + d$,因此这时问题是初等的.

对于 $n = 2,3$,迪利克雷问题出现在弹性理论、电学理论以及流体力学中.

我们只举一个例子. 如果 $n = 2$,我们可以把图象 $y = v(x)$ 看成表示在平面区域 I 上一块弹性薄膜的位置. 根据基本的、在某种程度上是理想化的物理学,在这个位置的势能具有 $aD[v] + b$ 的形式,其中 $a > 0$. 这个膜在边界 J 上处于 $y = f(x)$ 的位置,它所处的平衡位置 $y = u(x)$ 使能量达到极小值,从而对应于迪利克雷问题的解,如图 1 所示.

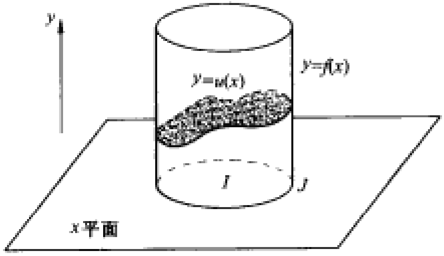


图 1

我们的解释给出了迪利克雷问题的一个物理上的存在性证明,但是我们还需要数学上的存在性证明. 现在至少有五个这样的证明,它们在数学分析中都很重要. 黎曼在他的 1851 年的博士论文中讨论了这个问题,他假定存在唯一的函数,使得迪利克雷积分达到极小值,但他没有加以讨论. 后来大家认识到这个假定必须加以证明,这个证明是希尔伯特在 1901 年给出的. 我们要给出一个用现代语言陈述的证明.

设 K 为 $\mathbf{R}^n$ 中限制于 I 上的所有二次连续可微实函数所成的空间, H 为其线性子空间,它的元素在 I 的边界上等于零,那么,积分 $(v, w) = D(v, w)$ 大体上是 H 上的一个内积,唯一的缺陷是 $(v, v) = 0$ 意味着 v 是常数而不是 v 等于零. 但是如果我们把 (v, w) 限制到 H 上,它就成为一个内积. 我们进一步假定, f 可以由 J 扩张为属于 K 的函数,这个函数仍然用 f 来表示. 于是 $w \to (f, w)$ 即为 H 上的线性泛函,从而由上面最后一个定理可知,它必定是一个内积. 换句话说, H 中有一个 g 存在,使得对于 H 中所有的 w,恒有 $(f, w) = (g, w)$. 于是函数 $u = f - g$ 在 J 上等于 f,因为 w 在 J 上等于零. 又因对于 H 中所有的 w 都有 $(u, w) = D(u, w) = 0$,故由分部积分(见上文)可以证明, u 在 H 中是调和的,即 $\Delta u = 0$. 还可以推出,对于 H 中所有的 w, u 都满足迪利克雷原理 $D[u + w] = D[u] + D[w]$. 如果 u 和 u' 是迪利克雷问题的两个解,则 $u - u'$ 属于 H,从而 $(u, u - u') = 0$, $(u', u - u') = 0$,因此 $(u - u', u - u') = 0$,所以 $u = u'$. 好像我们已经把问题解决了,但遗憾的是我们又重犯了黎曼的错误. 的确,空间 H

是线性空间并且具有内积，但它并不完备，因而就不是希尔伯特空间．另一方面，这个空间中的柯西序列的极限，至少在推广的意义之下可以表示为在 J 上等于零的函数．假如我们使用勒贝格积分，并且证明：倘若 $(u, w) = 0$ 对于 H 中所有的 w 都成立，那么便可以推知 u 是调和函数（即使 u 不是光滑函数也行），我们的证明就能行得通，但是我们不得不把细节跳过去．

第七十二回　泛函中　黎兹定理是基础[①]
解偏微　先求弱解再光滑

黎　兹
(RIesz, frigyes, 1880—1956), 匈牙利数学家，生于匈牙利杰尔一个医生的家庭，卒于布达佩斯.

张恭庆教授论述了泛函分析中的迪利克雷问题，特别是黎兹定理及其在迪利克雷问题中的应用.

设 $\mathscr{H}$ 是一个希尔伯特空间，$\forall y \in \mathscr{H}$，如果定义

$$f_y : x \mapsto (x, y), \forall x \in \mathscr{H}$$

那么 $f_y \in \mathscr{H}^*$. 事实上

$$| f_y(x) | \leqslant \| y \| \| x \|, \forall x \in \mathscr{H}$$

并因此 $\| f_y \| \leqslant \| y \|$. 特别若 $y \neq \theta$，取 $x = y$，便有

$$| f_y(y) | = (y, y) = \| y \|^2$$

总之有 $\| f_y \| = \| y \|$. 这个结论反过来也是对的，正是

定理1(黎兹)　设 f 是希尔伯特空间 $\mathscr{H}$ 上的一个连续线性泛函，则必存在唯一的 $y_f \in \mathscr{H}$，使得

$$f(x) = (x, y_f), \forall x \in \mathscr{H} \qquad ①$$

分析　在三维空间中，① 就是

$$f(x) = ax + by + cz = n \cdot x, \forall x \in \mathbf{R}^3$$

其中，$x = (x, y, z)$，$n = (a, b, c)$，要找的 y_f 现在就是 n，它是平面 $f(x) = 0$ 的法线.

证明　不妨设 f 不是 0 泛函，考察集合 $M \triangleq \{x \in \mathscr{H} | f(x) = 0\}$. 由于 f 是连续线性的，则 M 是一个真闭线性子空间，任取 $x_0 \perp M$(由正交分解定理，这个 x_0 是存在的). 不妨设 $\| x_0 \| = 1$，$\mathscr{H}$ 中任意元素 x 可以分解如下，即

$$x = ax_0 + y \qquad ②$$

其中，$y \in M$，$a = f(x)/f(x_0)$. 这是因为当令 $y = x - ax_0$ 时

$$f(y) = f(x - ax_0) = f(x) - af(x_0) = 0$$

在 ② 两边同时与 x_0 作内积，我们得

$$a = (x, x_0)$$

于是

$$f(x) = af(x_0) = (x, \overline{f(x_0)} x_0)$$

取 $y_f = \overline{f(x_0)} x_0$，这就是我们要求的.

再证唯一性. 若 $\exists y, y' \in \mathscr{H}$ 满足

---

① 本回引自文献[73].

$$f(x)=(x,y)=(x,y'),\forall x\in\mathscr{H}$$

那么
$$(x,y-y')=0,\forall x\in\mathscr{H}$$

特别取 $x=y-y'$,就推得 $y=y'$.

注 1 这个定理的几何意义如下:线性连续泛函 $f(x)$ 的等值面都是互相平行的超平面,因此每个向量 x 的泛函值$f(x)$应由 x 的垂直于这些等值面的分量所决定.

注 2 我们还知道,$\|f\|=\|y_f\|$.事实上,由 ① 得

$$|f(x)|\leqslant\|y_f\|\|x\|(\forall x\in\mathscr{H})\text{ 或 }\|f\|\leqslant\|y_f\|$$

另一方面,取 $x=y_f$,再由 ① 推得 $\|y_f\|\leqslant\|f\|$,即得 $\|f\|=\|y_f\|$.

定理 2 设 $\mathscr{H}$ 是一个希尔伯特空间,$a(x,y)$ 是 $\mathscr{H}$ 上的共轭双线性函数,并 $\exists M>0$,使得

$$|a(x,y)|\leqslant M\|x\|\|y\|,\forall x,y\in\mathscr{H}$$

则存在唯一的 $A\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$,使得

$$a(x,y)=(x,Ay),\forall x,y\in\mathscr{H}$$

且

$$\|A\|=\sup_{\substack{(x,y)\in\mathscr{H}\times\mathscr{H}\\ x\neq\theta,y\neq\theta}}|a(x,y)|/\|x\|\|y\| \tag{③}$$

证明 固定 $y\in\mathscr{H}$,$x\mapsto a(x,y)$ 是一个线性连续泛函.由黎兹定理,$\exists z=z(y)\in\mathscr{H}$使得

$$a(x,y)=(x,z),\forall x\in\mathscr{H}$$

定义映射 $A:y\mapsto z(y)$,便有

$$a(x,y)=(x,Ay),\forall x,y\in\mathscr{H}$$

又因为

$$\begin{aligned}(x,A(a_1y_1+a_2y_2))=&a(x,a_1y_1+a_2y_2)=\overline{a}_1a(x,y_1)+\overline{a}_2a(x,y_2)=\\&\overline{a}_1(x,Ay_1)+\overline{a}_2(x,Ay_2)=(x,a_1Ay_1+a_2Ay_2)\\&(\forall x,y_1,y_2\in\mathscr{H},\forall a_1,a_2\in\mathbf{K})\end{aligned}$$

所以 A 是线性的,并且

$$\|Ay\|=\sup_{x\in\mathscr{H}\setminus\{\theta\}}|a(x,y)|/\|x\|\leqslant M\|y\|$$

即得 $A\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$,并满足 ③.

应用 拉普拉斯方程 $-\Delta u=f$ 迪氏边值问题的弱解.设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 是一个有界开区域 $f\in L^2(\Omega)$,称实函数 u 是

$$\begin{cases}-\Delta u=f,\text{在 }\Omega\text{ 内} & ④\\ u|_{\partial\Omega}=0 & ⑤\end{cases}$$

的一个弱解是指 $u\in H_0^1(\Omega)$,满足

$$\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x=\int_\Omega fv\mathrm{d}x,\forall v\in H_0^1(\Omega) \tag{⑥}$$

这是因为：如果 $u \in C^2(\overline{\Omega})$，并且是 ④ 与 ⑤ 的解，那么

$$\int_\Omega -\Delta u \cdot v\mathrm{d}x = \int_\Omega fv\mathrm{d}x, \forall v \in C^2(\overline{\Omega}), v|_{\partial\Omega} = 0$$

在左边应用格林公式得

$$\int_\Omega -\Delta u \cdot v\mathrm{d}x = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} v\mathrm{d}\sigma = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\mathrm{d}x$$

即得
$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\mathrm{d}x = \int_\Omega f \cdot v\mathrm{d}x, \forall v \in C^2(\Omega), v|_{\partial\Omega} = 0$$

但集合 $\{v \in C^2(\Omega) \mid v|_{\partial\Omega} = 0\}$ 显然在 $H_0^1(\Omega)$ 中稠密，由 $u \in H_0^1(\Omega)$ 以及 $f \in L^2(\Omega)$ 立得

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\mathrm{d}x = \int_\Omega f \cdot v\mathrm{d}x, \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

历史上，人们在很长时期内直接求解 ④ 与 ⑤，但在证明一般存在性结果时遇到很大困难．于是经过近半个世纪的努力，改成先求弱解证其存在唯一，再证其光滑性，这样一种途径成为近代偏微分方程理论的基本手法，也正因为如此，泛函分析才成为研究近代偏微分方程理论所必不可少的工具．

定理3　$\forall f \in L^2(\Omega)$，方程 ④ 的0-迪利克雷问题（即以 ⑤ 为边界条件）弱解存在唯一．

证明　存在性．根据庞加莱不等式

$$(u,v)_1 \triangleq \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\mathrm{d}x, \forall u,v \in H_0^1(\Omega)$$

是 $H_0^1(\Omega)$ 上的一个内积．而

$$\left|\int_\Omega f \cdot v\mathrm{d}x\right| \leqslant \left(\int_\Omega |f|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |v|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C\|f\|\|v\|_1, \forall v \in H_0^1(\Omega) \qquad ⑦$$

其中，$\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|_1$ 分别表示 $L^2(\Omega)$ 与 $H_0^1(\Omega)$ 上的范数．⑦ 表明

$$v \mapsto \int_\Omega f \cdot v\mathrm{d}x, \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

是 $H_0^1(\Omega)$ 上的一个线性连续泛函．应用黎兹定理1，$\exists u_0 \in H_0^1(\Omega)$，使得

$$(u_0,v)_1 = \int_\Omega \nabla u_0 \cdot \nabla v\mathrm{d}x = \int_\Omega fv\mathrm{d}x, \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

从而 u_0 是一个弱解．

唯一性．假若 u_0, u'_0 都是弱解，那么

$$(u_0 - u'_0, v) = 0, \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

即得 $u_0 = u'_0$．

对于非0－迪利克雷问题，总是化到0-迪利克雷问题去做．给定$\partial\Omega$上的函数g，如果$\exists u_0 \in C^2(\overline{\Omega})$，使得$u_0|_{\partial\Omega} = g$，则非齐次边值问题可以化归齐次边值问题．事实上，设$f_0 \triangleq -\Delta u_0, v \triangleq u - u_0$．又若$v$是

$$\begin{cases} -\Delta v = f - f_0 \\ v|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad ⑧$$

的弱解，则u就是

$$\begin{cases} -\Delta u = f \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

的弱解．而问题⑧是0－迪利克雷问题．

第七十三回　稳定性　边界稍作变动后
等价于　紧集调和之逼近

M.V.Keldysh 在 1941 年发表了一篇重要的题为《关于迪利克雷问题的可解性与稳定性》的论文. 作为同 M.A.Lavrent'ev 早期合作研究的继续,M.V.Keldysh 从一个新的角度来研究迪利克雷问题,也就是在边界稍作变动之下研究解的稳定性. 确切地说,这个问题等价于紧集上调和函数一致逼近的问题,而后面这个问题早在 1929 年就引起了 J.L.Walsh 的注意.

巴拿赫(Banach,Stefan,1892—1945),波兰数学家,生于波兰克拉科夫,卒于前苏联乌克兰的利沃夫.

设 $K \subset R^d$ 为紧集,且 K^o,K^c 和 ∂K 分别表示 K 的内部、补集和边界. 我们用 $C(K)$ 表示在一致范数 $\|f\| = \sup_{x\in K}|f(x)|$ 下 K 上全体连续实值函数的巴拿赫空间;用 $C_h(K)$ 表示 K 内部的调和函数的闭子空间. 令 $H(K)$ 表示 K 的某个邻域上的调和函数之集在 $C(K)$ 的闭包,这个邻域依赖于该函数. 显然,$H(K)$ 也是 $C(K)$ 的一个闭子空间,并且 $H(K) \subset C_h(K)$. 当等式成立时,这个问题可判定.

用 Keldysh 的术语来说 $H(K) = C_h(K)$,等于说迪利克雷问题在 K 中是稳定的. 这是否正确,则要取决于一种称之为集合的优美的薄性特性.

下面 Keldysh 的主要结果实质上是下述定理.

定理 1　$H(K) = C_h(K)$ 当且仅当 K^c 为"薄"时,∂K 的子集重合于 K^{0c} 为"薄"时 ∂K 的子集.

以后我们再解释对于一个集合来说,某点是薄的意味着什么,并给出薄集的若干特性.

1968 年,V.P.Khavin 曾研究了一个类似于平面集上解析函数的 L^2 - 逼近问题. 考虑紧集 $K \subset C = R^2$,设 $L^2(K)$ 为局限于 K 的关于平面勒贝格测度的通常的复值勒贝格空间,并且令 $L_a^2(K)$ 为由 K^o 的解析函数所组成的 $L^2(K)$ 的闭子空间. 用 $R^2(K)$ 表示 K 的领域上的解析函数集合在 $L^2(K)$ 的闭包,显然,$R^2(K) \subset L_a^2(K)$. Khavin 的结果如下.

定理 2　$R^2(K) = L_a^2(K)$ 当且仅当 K^c 为薄时,∂K 的子集的容量为 0.

我们将在后面定义容量,且证明它的许多性质.

在 d 维情形下,对于具有平方可积梯度的调和函数的逼近,有一个类似的结论.

不久,人们将会发现,在定理 1 和 2 中,关于 K 的充要条件是等价的. 因而下面定理为真.

定理 3　设 $K \subset C = R^2$ 是紧的，于是 $H(K) = C_h(K)$ 当且仅当 $R^2(K) = L_a^2(K)$.

多年以前，A.A.Gonchar 曾问过 Hedberg 是否能给出定理 3 的直接证明. 由于 Hedberg 无法给出那样的直接证明，本文正是为了解释这种情况才产生的.

Keldysh 使用了优美的构造性的方法证明了他的结论，而后来 J.Deng(1950) 利用了对偶性和测度扫除的方法，又给出了一个证明. Khavin 的证明也利用了对偶性. 这样看起来理解两个逼近问题的等价性的关键就在于对对偶问题的理解. 用 H. 嘉当的基于希尔伯特空间射影的扫除理论作为工具来理解这种等价性已有了结果(1946).

在这里探讨这个问题的历史并非没有意义. 也许 J.L. 沃尔什(1929) 向美国数学会所作的报告是一个好的开端. 看起来好像第一次系统地研究了具有两个以上变元的调和函数的逼近问题. 在那篇文章中，他证明了下面的与经典的龙格逼近定理相类似的结果.

设 u 在紧集 K 的某个邻域上调和，其中 K^c 是连通的，则 u 在 K 上可用调和多项式来任意闭一致逼近.

沃尔什的定理在实际应用中很有用，如测地学中. 因此一旦实际需要，它便被重新发现，这也就是自然而然的了. 但它一直未能以使数学家满意的方法被证明. 例如可参看 T.Krarup(1969) 的那篇经常被引用的论文.

论文的结尾，沃尔什进一步提出了在具有连通补的紧集 K 上的调和多项式的一致逼近问题. 他写到："在三维情形下逼近问题的求解方法可能要借助于变域上迪利克雷问题解法的研究."

M.V.Keldysh 和 M.A.Lavrent'ev(1937) 就从事了这一方面的研究工作，可他们完全不知道沃尔什所做的工作(当时一个使人感到有趣的现象是，刊载了这篇论文的杂志也同时刊登了 J.V.Stalin 的一篇就职演说词). 他们考虑的是闭约当域 K，即一个以与球面同胚的曲面为界的域，他们又构造了一个具有这样性质的集合 K，其 ∂K 有有限面积，并且关于迪利克雷问题，集合 K 是正则的(即 $e(K^c \cap \partial K = \varnothing)$)，但 $H(K) \neq C_h(K)$. 他们还定义了"稳定边界点"的概念，并证明了一个边界点是稳定的当且仅当对于 K^c 相应的维纳级数发散，即注释中的 $a \notin e(K^c)$. 他们还证明了，若 K 关于迪利克雷问题是正则的，那么当 $e(K^c) \cup \partial K = \varnothing$，即当 K 稳定时，就有 $H(K) = C_h(K)$.

接下来，M.V.Keldysh 在更一般的集合上继续研究这个问题，并给出了早已讨论过的全解. 我们引用过的定理 1 是第一次出现在 Keldysh(1937) 的学位论文中，这篇论文是在 Lavrent'ev 的指导下写的，并于 1938 年 1 月在莫斯科通过了答辩. Keldysh(1938) 的一份没有证明的研究报告不久也出现了. Keldysh(1941) 在这个领域内终于发表了这篇论文，它是 1939 年提交的，显然可见其中大部分

H. 嘉当(Cartan, Henri, 1904—)，法国数学家，生于南锡，是著名数学家 E. 嘉当的儿子.

J.L. 沃尔什(Walsh, Joseph Leonard, 1895—1973)，美国数学家，生于华盛顿，曾任美国数学会主席.

龙格(Runge, Carl David Tolmé, 1856—1927)，德国数学家，物理学家，生于德国不来梅，卒于格丁根.

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2} = 0$$

都来自他的那篇学位论文.而令人奇怪的是在这篇论文中却只字未提他早期与 Lavrent'ev 共同的工作.

M.Brelot(1945) 和 J.Deny(1945) 重新研究了一致逼近问题,并考虑了 $e(K^{0c}) \cap \partial K = \varnothing$ 的情形,尤其是集合没有内部的情形.在斯大林时代由于缺少同外界的联系和交流,他们根本不了解 Keldysh 和 Keldysh-Lavrent'ev 的主要论文,而仅仅了解一些出现在 1936 ~ 1938 年之间的包括 Keldysh 在内(1938) 的研究简报.

Deny 以对偶性作为工具证明了他的结论.1950 年,Deny 用同样的手法处理了更一般的情形,并证明了上面所指出的许多结果.然而他当时仍然不知道 Keldysh(1941) 的工作,因为对 Keldysh 工作的英译稿只是在 1966 年才出现.

几乎就在同时,N.S.Landkof 也在研究这个问题.阅读 Landkof(1966) 的那本阐述整个理论的著作,会从中找到更完整的文献资料.

T.W.Gamelin 和 H.Rossi(1966) 在了解 Keldysh(1941) 但显然不了解 Deny(1950) 的情形下,使用泛函分析的方法也证明了 Keldysh 的主要的逼近定理.

Keldysh 通过指明在 $\partial K \setminus e(K^{0c})$ 中的每一点 a 对 $C_h(K)$ 都是巅值点的方法来证明他的定理,即 $C_h(K)$ 中存在函数 u,对 K 中所有 $x(x \neq a)$,有 $|u(x)| < u(a)$.这大概是有记录可查的最早的系统地使用巅值点的一篇论文.当 E.Bishop 在 1959 年写的那篇著名的关于巅值点的论文时,他显然也不知道上述结果.

少数几个附注也许对一致调和逼近理论的早期论述是有用的.

Keldysh 关于定理 1 的证明是直接的构造性的,但却极其复杂难懂.然而,当证明只用泛函分析时,他的证明也许是最简单的一种.(Mergelyan(1959) 用多项式一致逼近对该定理进行构造性的证明确实比已发表的,例如 Carleson(1964) 那篇用泛函分析的证明更为简洁)

Deng(1950) 给出的证明是简短的,但其中一些关键的论点被归入脚注,然而写清这些细节并非完全没有价值.

完整的理论是由 Landkof(1966) 提出的,而那些接触到迪利克雷问题的稳定性并想了解主要定理的完整证明的读者,很快就会发现他们不得不倒回来去阅读大量的书籍.

Gamelin 和 Rossi(1966) 的论文是以巅值点及 Choquet 理论的观点来研究这个课题的,对于那些还不精通位势理论而又想知道 Keldysh 定理的完整证明的读者,该文还不能令人完整满意,因为它把位势理论的关键论据看做是理所当然的.

集合是稳定的另一个充要条件是 Gamelin(1982) 在改进了 Ahern(1969) 的

一个结果后而得到的. Gamelin 的结果又由 W. Hansen(1985) 加以推广.

在所谓的细调和函数空间 $H(K)$ 的一个优美的特性是由 A. Debiard 和 B. Gaveau(1974) 给出的. J. Bliedtner 和 W. Hansen(1978) 又将上面两人的结论推广到更一般的情形. B. Fuglede(1985) 在他的一篇细调和函数的文章中研究了 Khavin 的定理.

按照要弄清一致逼近与迪利克雷范数逼近之间的联系的要求而采用我们的做法. 正如已经提到的, 我们的论述是受到 H. Cartan(1946) 的启发, 从他那篇论文中借鉴的东西如此之多, 以致不能一一指出. 然而, 一个很重要的思想出现在他那本书的第 262 页上. 不同的是 Cartan 在 Choquet 证明了他的可容性定理之前就给出了, 既定义了一个外部扫除, 又定义了一个内部扫除. 我们的扫除通常指的是它的外部扫除.

还有很多论文把该理论推广到一个更加抽象的境地, 例如, de la Pradelle(1967), (1969), Vincent-Smith(1969), Effros 和 Kazdan(1970), Gamelin 和 Lyons(1983), 以及我们已经引用过的 Bliedtner 和 Hansen 的论文.

I. Netuka(1980) 又以另一个全新的观点漂亮地处理了迪利克雷问题.

第七十四回 紧支撑 广义函数算子解 椭圆型 索伯列夫空间中

我们将考虑常系数线性偏微分方程,这是一些形如

$$P(D)u = v \qquad ①$$

的方程,其中 P 是 n 个变量的(复系数)非常数多项式,$P(D)$ 是相应的微分算子,v 是给定的函数或广义函数,而函数(或广义函数)u 是 ① 的解.

广义函数 $E \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ 称为是算子 $P(D)$ 的基本解,如果当 $v = \delta$ 是迪拉克测度时,它满足 ①,即

$$P(D)E = \delta \qquad ②$$

这里将要证明的基本结果(属于 Malgrange 和 Ehrenpreis)就是这种基本解总存在.

假若 E 满足 ②,v 具有紧支撑,令

$$u = E * v \qquad ③$$

则 u 是 ① 的解,因为

$$P(D)(E * v) = (P(D)E) * v = \delta * v = v \qquad ④$$

因此基本解的存在性导致了方程 ① 的一个一般存在性定理,同时注意 ① 的每个解与 $E * v$ 相差一个齐次方程 $P(D)u = 0$ 的解.此外 ③ 给出关于 u 的另外一些信息.例如,如果 $v \in D(\mathbf{R}^n)$,则 $u \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$.

当然也可能对某些具有非紧支撑的 v,卷积 $E * v$ 存在.这就产生了求 E 的问题,使 E 在无穷远处的性质能够很好地控制.最佳可能结果当然是求出一个具有紧支撑的 E.但这是永远做不到的.否则,$\hat{E}$ 就是一个整函数,并且 ② 蕴涵 $P\hat{E} = 1$.但是一个整函数与一个多项式的乘积不可能为 1,除非二者都是常数.

然而,有时利用方程 $P\hat{E} = 1$ 可以求出 E,即当 $1/P$ 是一个平缓广义函数时;在这种情形,$1/P$ 的傅里叶变换提供了一个基本解,它是一个平缓广义函数.

另一个有关的问题是当 v 具有紧支撑时,① 的具有紧支撑解的存在性.它的答案很清楚地表明,在这一类问题里仅研究在 $\mathbf{R}^n$ 上的 P 是不够的,而 P 在复空间 $\mathbf{C}^n$ 中的性质是非常重要的.

T^n 是环面,它由 $\mathbf{C}^n$ 中的点

$$w = (e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}) \qquad ⑤$$

组成,其中,$\theta_1, \cdots, \theta_n$ 是实数;σ_n 是 T^n 上的哈尔测度,即除以 $(2\pi)^n$ 的勒贝格测

迪拉克(Dulac, H., 1870—1955),法国数学家,生于瓦尔,主要研究微分方程的奇点和极限环理论.

哈尔(Haar, Alfréd, 1885—1933),匈牙利数学家,生于布达佩斯,卒于舍肯德.

度.

C^n 中的 N 次多项式是函数

$$P(z) = \sum_{|\alpha| \leqslant N} c(\alpha) z^{\alpha}, z \in \mathbf{C}^n \quad ⑥$$

其中 α 遍历多重指标并且 $c(\alpha) \in \mathbf{C}$. 如果 ⑥ 成立并且对于至少一个 α, $|\alpha| = N$, $c(\alpha) \neq 0$, 则称 P 是确切 N 次的.

引理　如果 P 是 C^n 中确切 N 次多项式, 则存在一常数 $A < \infty$, 它仅依赖于 P, 使得对于 C^n 中每个整函数 f, 每个 $z \in \mathbf{C}^n$ 和每个 $r > 0$

$$|f(z)| \leqslant Ar^{-N} \int_{T_n} |(fP)(z + rw)| \mathrm{d}\sigma_n(w) \quad ⑦$$

证明　首先假定 F 是单复变量整函数并且

$$Q(\lambda) = c \prod_{i=1}^{N} (\lambda + a_i), \lambda \in \mathbf{C} \quad ⑧$$

令 $Q_0(\lambda) = c \prod (1 + \overline{a}_i \lambda)$. 则 $cF(0) = (FQ_0)(0)$. 由于在单位圆周上 $|Q_0| = |Q|$, 推出

$$|cF(0)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |(FQ)(e^{i\theta})| \mathrm{d}\theta \quad ⑨$$

所给的多项式 P 可以写成 $P = P_0 + P_1 + \cdots + P_N$, 其中每个 P_j 是 j 次齐次多项式. 定义 A 为

$$\frac{1}{A} = \int_{T^n} |P_N| \mathrm{d}\sigma_n \quad ⑩$$

这个积分是正的, 因为 P 是确切 N 次的. 如果 $z \in \mathbf{C}^n$ 并且 $w \in T^n$, 定义

$$F(\lambda) = f(z + r\lambda w), Q(\lambda) = P(z + r\lambda w), \lambda \in \mathbf{C} \quad ⑪$$

Q 的首项系数是 $r^N P_N(w)$. 从而 ⑨ 意味着

$$r^N |P_N(w)| |f(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |(fP)(z + re^{i\theta} w)| \mathrm{d}\theta \quad ⑫$$

如果关于 σ_n 积分 ⑫, 我们得到

$$|f(z)| \leqslant Ar^{-N} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_{T^n} |(fP)(z + re^{i\theta} w)| \mathrm{d}\sigma_n(w) \quad ⑬$$

在变量 $w \to e^{i\theta} w$ 的变换下, 测度 σ_n 是不变的. 因此 ⑬ 的内层积分不依赖于 θ. 这给出 ⑦.

定理 1　假设 P 是 n 变量多项式, $v \in D'(\mathbf{R}^n)$, v 具有紧支撑. 则方程

$$P(D)u = v \quad ⑭$$

有具有紧支撑的解当且仅当存在 C^n 中定义的整函数 g 使得

$$P_g = \hat{v} \quad ⑮$$

当这个条件满足时, ⑦ 有唯一具有紧支撑的解 u; u 的支撑位于 v 的支撑的

凸壳中.

证明　如果 ⑦ 有具有紧支撑的解 u,说明当 $g = \hat{u}$ 时 ⑧ 成立.

反之,假设 ⑧ 对于某个整函数 g 成立.选取 $r > 0$ 使得 v 的支撑在 $rB = \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x| \leqslant r\}$ 中.根据引理,⑮ 意味着

$$|g(z)| \leqslant A\int_{T^n} |\hat{v}(z+w)|\,\mathrm{d}\sigma_n(w), z \in \mathbf{C}^n \tag{16}$$

存在 N 和 γ 使得

$$|\hat{v}(z+w)| \leqslant \gamma(1+|z+w|)^N \exp\{r|\mathrm{Im}(z+w)|\} \tag{17}$$

存在常数 c_1 和 c_2,对于所有 $z \in \mathbf{C}^n$ 和所有 $w \in T^n$ 满足

$$1+|z+w| \leqslant c_1(1+|z|) \tag{18}$$

和

$$|\mathrm{Im}(z+w)| \leqslant c_2 + |\mathrm{Im} z| \tag{19}$$

由这些不等式提出

$$|g(z)| \leqslant B(1+|z|)^N \exp\{r|\mathrm{Im}\, z|\}, z \in \mathbf{C}^n \tag{20}$$

其中 B 是另一个常数(依赖于 γ, A, N, c_1, c_2 和 r).由 ⑳,对于某个支撑在 rB 中的广义函数 u, $g = \hat{u}$.从而 ⑮ 变为 $P\hat{u} = \hat{v}$,它等价于 ⑭.

u 的唯一性是显然的,因为至多有一个整函数 $\hat{u}$ 满足 $P\hat{u} = \hat{v}$.

以上讨论说明,u 的支撑 S_u 位于每一个中心在原点并且包含 v 的支撑 S_v 的闭球中.因为 ⑭ 意味着

$$P(D)(\tau_x u) = \tau_x v, x \in \mathbf{R}^n \tag{21}$$

同样的命题对于 $x + S_u$ 和 $x + S_v$ 亦真.因此 S_u 位于包含 S_v 的所有闭球(中心在 R^n 的任何地方)的交集中,因为这个交集是 S_v 的凸包,证毕.

定理 2　如果 P 是 $\mathbf{C}^n$ 中的确切 N 次多项式并且 $r > 0$,则微分算子 $P(D)$ 有基本解 E,它满足对于每个 $\psi \in D(\mathbf{R}^n)$

$$|E(\psi)| \leqslant Ar^{-N}\int_{T^n} \mathrm{d}\sigma_n(w)\int_{\mathbf{R}^n} |\hat{\psi}(t+rw)|\,\mathrm{d}m_n(t) \tag{22}$$

这里 A 是在引理中出现的常数.这个定理的要点是基本解的存在性而不在于定理证明中产生的估计式 ㉒.

证明　固定 $r > 0$,定义

$$\|\psi\| \leqslant \int_{T^n} \mathrm{d}\sigma_n(w)\int_{\mathbf{R}^n} |\hat{\psi}(t+rw)|\,\mathrm{d}m_n(t) \tag{23}$$

为了准备证明的主要部分,让我们首先证明如果在 $D(\mathbf{R}^n)$ 中 $\psi_j \to 0$,则

$$\lim_{j\to\infty} \|\psi_j\| = 0 \tag{24}$$

注意如果 $t \in \mathbf{R}^n, w \in \mathbf{C}^n$,那么 $\hat{\psi}(t+w) = (\mathrm{e}_{-w}\psi)^\wedge(t)$.从而

$$\|\psi\| = \int_{T^n} \mathrm{d}\sigma_n(w)\int_{\mathbf{R}^n} |(\mathrm{e}_{-rw}\psi)^\wedge|\,\mathrm{d}m_n \tag{25}$$

如果在 $D(\mathbf{R}^n)$ 中，$\psi_j \to 0$，所以 ψ_i 的支撑在某个紧集 K 中．函数 $e_{rw}(w \in T^n)$ 在 K 上一致有界，由莱布尼茨公式推得

$$\| D^\alpha(e_{-rw}\psi_j) \|_\infty \leqslant C(K,\alpha) \max_{\beta \leqslant \alpha} \| D^\beta \psi_j \|_\infty \quad ㉖$$

对于每个 α，㉖ 的右边趋于 0．从而，给定 $\varepsilon > 0$，存在 j_0 使得

$$\| (I - \Delta)^n (e_{-rw}\psi_j) \|_2 < \varepsilon, j > j_0, \omega \in T^n \quad ㉗$$

其中 $\Delta = D_1^2 + \cdots + D_n^2$ 是拉普拉斯算子．由普朗谢雷尔定理，㉗ 与

$$\int_{\mathbf{R}^n} |(1 + |t|^2)^n \hat{\psi}_j(t + rw)|^2 \mathrm{d}m_n(t) < \varepsilon^2 \quad ㉘$$

一样．由此，根据许瓦兹不等式和 ㉓ 推出，对于一切 $j > j_0$，$\| \psi_j \| < C_\varepsilon$．其中

$$C^2 = \int_{\mathbf{R}^n} (1 + |t|^2)^{-2n} \mathrm{d}m_n(t) < \infty \quad ㉙$$

这证明了 ㉔．

普朗谢雷尔（Plancherel, Michael, 1885—1967），瑞士数学家，生于弗里堡，曾就学于格丁根大学及巴黎大学．

现在假定 $\phi \in D(\mathbf{R}^n)$ 并且

$$\psi = P(D)\phi \quad ㉚$$

则 $\hat{\psi} = P\hat{\phi}$，$\hat{\phi}$ 和 $\hat{\psi}$ 是整函数，从而 ψ 决定 ϕ．特别地，$\phi(0)$ 是在 $P(D)$ 的值域上定义的 ψ 的线性泛函．证明的关键在于说明这个泛函是连续的，即存在一个广义函数 $u \in D'(\mathbf{R}^n)$ 满足

$$u(P(D)\phi) = \phi(0), \phi \in D(\mathbf{R}^n) \quad ㉛$$

因为广义函数 $E = \tilde{u}$ 满足

$$(P(D)E)(\phi) = E(P(-D)\phi) = u(P(-D)\phi)^{\sim} = u(P(-D)\tilde{\phi}) = \tilde{\phi}(0) = \phi(0) = \delta(\phi)$$

故 $P(D)E = \delta$，此即所求．

引理应用于 $P\hat{\phi} = \hat{\psi}$，得到

$$|\hat{\phi}(t)| \leqslant Ar^{-N} \int_{T^n} |\hat{\psi}(t + rw)| \mathrm{d}\sigma_n(w), t \in \mathbf{R}^n \quad ㉜$$

根据反演定理，$\phi(0) = \int_{R^n} \hat{\phi} \mathrm{d}m_n$．因此 ㉜，㉓ 和 ㉚ 给出

$$|\phi(0)| \leqslant Ar^{-N} \| P(D)\phi \|, \phi \in D(\mathbf{R}^n) \quad ㉝$$

设 Y 是由函数 $P(D)\phi(\phi \in D(\mathbf{R}^n))$ 组成的 $D(\mathbf{R}^n)$ 的子空间．由 ㉝，说明在 Y 上由 $P(D)\phi \to \phi(0)$ 确定的线性泛函延拓到 $D(\mathbf{R}^n)$ 上的线性泛函 u 满足 ㉛，也满足

$$|u(\psi)| \leqslant Ar^{-N} \| (\psi) \|, \psi \in D(\mathbf{R}^n) \quad ㉞$$

由 ㉔，$u \in D'(\mathbf{R}^n)$，证毕．

椭圆型方程

引言　如果 u 是某个开集 $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ 中的二次连续可微函数并且满足拉普拉

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2} = 0$$

斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad ㉟$$

那么众所周知 u 实际上在 $C^\infty(\Omega)$ 中.这是因为 Ω 中每个实调和函数(局部地)是一个全纯函数的实部.任何这种类型的定理——其中断言某种微分方程的每个解具有比初始条件更强的光滑性质——都叫做正则性定理.

对于椭圆型偏微分方程,我们将给出一个相当一般的正则性定理的证明.下面我们将定义"椭圆型"这个术语.首先我们看到,方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0 \qquad ㊱$$

与㉟很不相同,因为它将被形如 $u(x,y)=f(y)$ 的每个函数 u 所满足,其中 f 是任何可微函数.事实上,如果㊱理解为

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0 \qquad ㊲$$

则 f 可以是完全任意的函数.

定义1 假设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的开集,N 是正整数,对于每个多重指标 α,$|\alpha|\leqslant N$,$f_\alpha\in C^\infty(\Omega)$,并且当 $|\alpha|=N$ 时至少有一个 f_α 不恒等于0,它们决定了一个线性微分算子

$$L=\sum_{|\alpha|\leqslant N}f_\alpha D_\alpha \qquad ㊳$$

当作用在广义函数 $u\in D'(\Omega)$ 上时

$$Lu=\sum_{|\alpha|\leqslant N}f_\alpha D_\alpha u \qquad ㊴$$

L 的阶是 N.算子

$$\sum_{|\alpha|=N}f_\alpha D_\alpha \qquad ㊵$$

是 L 的主部.L 的特征多项式是

$$p(x,y)=\sum_{|\alpha|=N}f_\alpha(x)y^\alpha,\ x\in\Omega,\ y\in\mathbf{R}^n \qquad ㊶$$

这是系数在 $C^\infty(\Omega)$ 中的关于变量 $y=(y_1,\cdots,y_n)$ 的 N 次齐次多项式.

算子 L 叫做是椭圆型的,如果对于每个 $x\in\Omega$ 和每个 $y\in\mathbf{R}^n$,$P(x,y)\neq 0$,当然除去 $y=0$ 以外.注意椭圆性是用 L 的主部来定义的;㊳中出现的较低阶的项不起作用.

例如,拉普拉斯算子

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \qquad ㊷$$

的特征多项式是 $p(x,y)=-(y_1^2+\cdots+y_n^2)$,因而 Δ 是椭圆型的.

另一方面,如果 $L = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}$,则 $p(x,y) = -y_1 y_2$,L 不是椭圆型的.

我们瞄准的主要结果涉及平缓广义函数的某些特殊空间,现在我们来描述它.

Sobolev 空间 把每个实数 s 通过

$$\mathrm{d}\mu_s(y) = (1 + |y|^2)^s \mathrm{d}m_n(y) \tag{43}$$

与 $\mathbf{R}^n$ 上的一个正测度 μ_s 联系起来.如果 $f \in L^2(\mu_s)$,即 $\int |f|^2 \mathrm{d}\mu_s < \infty$,则 f 是一个平缓广义函数;从而 f 是平缓广义函数 u 的傅里叶变换.如此得到的所有 u 组成的向量空间将用 H^s 表示;赋予范数

$$\| u \|_s = \left(\int_{\mathbf{R}^n} |\hat{u}|^2 \mathrm{d}\mu_s \right)^{1/2} \tag{44}$$

H^s 显然等距同构于 $L^2(\mu_s)$.

这些空间 H^s 叫做 Sobolev 空间.维数 n 将总是固定的,并且在记号中不再提到它.

根据普朗谢雷尔定理,$H^0 = L^2$.

如果 $t < s$,显然 $H^s \subset H^t$,从而所有空间 H^s 的并 X 是一个向量空间.线性算子 $\Lambda : X \to X$ 叫做 t 阶的如果 Λ 对于每个 H^s 的限制是 H^s 到 H^{s-t} 中的连续映射;注意 t 不必是整数并且每个 t 阶算子也是 t' 阶的,$t' > t$.

下面是将要用到的关于 Sobolev 空间的性质.

定理 3 (1) 每个具有紧支撑的广义函数属于某个 H^s.

(2) 如果 $-\infty < t < +\infty$,由

$$\hat{v}(y) = (1 + |y|^2)^{t/2} \hat{u}(y), \quad y \in \mathbf{R}^n$$

给出的映射 $u \to v$ 是 H^s 到 H^{s-t} 上的线性等距,因此它是 t 阶算子,其逆是 $-t$ 阶的.

(3) 如果 $b \in L^\infty(R)$,由 $\hat{v} = b\hat{u}$ 给出的映射 $u \to v$ 是一个 0 阶算子.

(4) 对于每个多重指标 α,D_α 是一个 $|\alpha|$ 阶算子.

(5) 如果 $f \in \varphi_n$,则 $u \to fu$ 是 0 阶算子.

证明 如果 $u \in D'(\mathbf{R}^n)$ 有紧支撑,说明对于某个常数 C 和 N

$$|\hat{u}(y)| \leqslant C(1 + |y|)^N, \quad y \in \mathbf{R}^n \tag{45}$$

从而,如果 $s < -N - n/2$,$u \in H^s$.这证明了(1),而(2)和(3)是显然的.关系式

$$|(D_\alpha u)^\wedge(y)| = |y^\alpha| \, |\hat{u}(y)| \leqslant (1 + |y|^2)^{|\alpha|/2} |\hat{u}(y)|$$

意味着

$$\| D_\alpha u \|_{s-|\alpha|} \leqslant \| u \|_s \tag{46}$$

因此(4)成立.

(5)的证明依赖于不等式

$$(1+|x+y|^2)^s \leqslant 2^{|s|}(1+|x|^2)^s(1+|y|^2)^{|s|} \qquad ㊼$$

$x, y \in \mathbf{R}^n$, $-\infty < s < +\infty$. 当 $s = 1$ 时 ㊼ 是显然的，由此 $s = -1$ 的情况可通过用 $x - y$ 代替 x，用 $-y$ 代替 y 得到. 由这两种情况，通过把每项升高到 $|s|$ 次幂而得到 ㊼ 的一般情况，由 ㊼ 得出对于 $\mathbf{R}^n$ 上每个可测函数 h

$$\int_{\mathbf{R}^n} |h(x-y)|^2 \mathrm{d}\mu_s(x) \leqslant 2^{|s|}(1+|y|^2)^{|s|}\int_{\mathbf{R}^n} |h|^2 \mathrm{d}\mu_s \qquad ㊽$$

现在假定 $u \in H^s$, $f \in \varphi_n$, $t > |s| + \dfrac{n}{2}$. 因为 $\hat{f} \in \varphi_n$, $\|f\|_t < \infty$. 令 $\gamma = \mu_{|s|-t}(\mathbf{R}^n)$. 则 $\gamma < \infty$. 定义 $F = |\hat{u}| * |\hat{f}|$. 由

$$|(fu)^\wedge| = |\hat{u} * \hat{f}| \leqslant |\hat{u}| * |\hat{f}| = F \qquad ㊾$$

根据施瓦兹不等式，对于每个 $x \in \mathbf{R}^n$

$$|F(x)|^2 \leqslant \int_{\mathbf{R}^n} |\hat{f}(y)|^2 \mathrm{d}\mu_t(y)\int_{\mathbf{R}^n} |\hat{u}(x-y)|^2 \mathrm{d}\mu_{-t}(y) \qquad ㊿$$

在 $\mathbf{R}^n$ 上关于 μ_s 积分 ㊿，由 ㊽ 结果是

$$\int_{\mathbf{R}^n} |F|^2 \mathrm{d}\mu_s \leqslant 2^{|s|}\gamma \|f\|_t^2 \|u\|_s^2 \qquad 51$$

从 ㊾ 和 51 推出

$$\|fu\|_s \leqslant (2^{|s|}\gamma)^{1/2} \|f\|_t \|u\|_s \qquad 52$$

这证明了(5).

定义 2 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的开集. 广义函数 $u \in D'(\Omega)$ 称为是局部 H^s 的，如果对于每个点 $x \in \Omega$ 存在广义函数 $v \in H^s$ 使得在 x 的某个领域 w 中，$u = v$.

定理 4 如果 $u \in D'(\Omega)$ 并且 $-\infty < s < +\infty$，下列两个说法是等价的.

(1) u 是局部 H^s；

(2) 对于每个 $\psi \in D(\Omega)$, $\psi u \in H^s$；

(3) 对于每个 α, $|\alpha| \leqslant s$, $D_\alpha u$ 是局部 L^2 的；

(4) 也许需要明确一下，因为 u 仅仅作用于其支撑在 Ω 中的测试函数上. 然而，ψu 是一泛函，对于每个 $\phi \in D(\mathbf{R}^n)$ 相应地有

$$(\psi u)(\phi) = u(\psi\phi)$$

注意，$\psi\phi \in D(\Omega)$，故 $u(\psi\phi)$ 是确定的.

证明 假定 u 是局部 H^s 的. 设 K 是某个 $\psi \in D(\Omega)$ 的支撑. 因为 K 是紧的，存在有限多个开集 $w_i \subset \Omega$，它们的并盖住 K，在其中 u 与某个 $v_i \in H^s$ 一致. 存在函数 $\psi_i \in D(w_i)$ 使得在 K 上，$\sum \psi_i = 1$. 如果 $\phi \in D(\mathbf{R}^n)$，由此推出

$$u(\psi\phi) = \sum u(\psi_i\psi\phi) = \sum v_i(\psi_i\psi\phi)$$

因为 $\psi_i\psi\phi \in D(w_i)$. 因此 $\psi u = \sum \psi_i\psi v_i$. 根据定理 3(5)，对于每个 i, $\psi_i\psi v_i \in H^s$. 因此 $\psi u \in H^s$，并且(1) 蕴涵(2).

如果(2)成立，$x \in \Omega$ 并且在 x 的一个领域 w 中，$\psi \in D(\Omega)$ 为1，则在 w 中，$u = \psi u$，并且由假设 $\psi u \in H^s$. 因此(2)蕴涵(1).

仍假设(2)成立. 如果 $\psi \in D(\Omega)$，则 $\psi u \in H^s$，从而由定理 3(4)，$D_\alpha(\psi u) \in H^{s-|\alpha|}$. 如果 $|\alpha| \leqslant s$，则

$$H^{s-|\alpha|} \subset H^0 = L^2(\mathbf{R}^n)$$

第十三章

第七十五回　赫尔曼　位势理论投影法
戈尔丁　泛函分析正则性

经典的迪利克雷问题可简述如下:给定一个有界开集 Ω 及其边界上的一个连续函数 f,要求 Ω 中的一个调和函数 u,使它在边界上取值 f. 对于圆盘或球,这一问题具有显式解,且可由著名的泊松公式给出. 黎曼在分析黎曼曲面上的局部解析函数时提出,对于一切在边界上等于 f 的函数来说,这个问题的解 u 使迪利克雷积分

$$\int_{\Omega}(v_x^2+v_y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

取极小值. 形式上验证这一点是很容易的,然而在几年之后,魏尔斯特拉斯对黎曼的这一想法提出了怀疑,他列举了几个不存在解的变分问题.

走出下一步的是诺伊曼,他寻找一个用 $S=\partial\Omega$ 上具有连续密度 $f(t)$ 的双层位势形式表示的迪利克雷问题的解 u

$$u(x)=\int_0^L\kappa(x,h(t))g(t)\mathrm{d}t$$

这里,$x=(x_1,x_2)$,L 是 S 的长,t 是它的弧长参数,$t\to h(t)$ 是 S 的系数,并且

$$\kappa(x,h(t))=\frac{1}{\pi}D_t\log\frac{1}{|x-h(t)|}=$$

$$\frac{1}{\pi}(x-h(t),n(t))/|x-h(t)|^2$$

其中在单位内法线方向上的微分 D_t 是在上式的第二部分中进行的. 于是, $u(x)$ 很明显是 Ω 中的一个调和函数. 若 S 具有连续曲率, 则当 x 趋近于一点 $h(s) \in S$ 时, $u(x)$ 有极限

$$f(s) + \int_0^L K(s,t)f(t)\mathrm{d}t$$

其中的核 $K(s,t) = \kappa(h(s),h(t))$ 是连续的. 因此, 迪利克雷问题就化成了一个关于 $f(s)$ 的积分方程

$$f(s) + \int_S K(s,t)f(t)\mathrm{d}t = g(s)$$

或用符号的形式, 就是 $f + Kf = g$. 当 Ω 为凸集时, 我们发现几何级数或诺伊曼级数 $(1 - K + K^2 - K^3 + \cdots)g$ 收敛, 并给出解 f. 诺伊曼之后二十年, 瑞典人弗雷德霍姆在一般情况下求解了上述积分方程. 他的主要结果是: 齐次方程 $f + Kf = 0$ 的解构成一个有限维线性空间 L, 而当 g 满足 $\dim L$ 个适当选择的线性约束条件时, 非齐次方程 $f + Kf = g$ (必定对模 L) 可解. 这一结果就是曾经非常有名的弗雷德霍姆二择性. 它还可以用以下说法来表示: 作用在连续函数上的算子 $I + K$ 具有一个零指标, 也就是说, 它的零空间维数等于其值域的余维数.

冯·诺依曼 (Von Neumann, John, 1903—1957), 匈牙利－美国数学家. 冯·诺依曼的父亲马克斯·冯·诺依曼 (Max Von Neumann) 曾受国王册封为贵族, 故姓前加上 (Von). 生于匈牙利布达佩斯, 卒于美国华盛顿.

弗雷德霍姆的工作在很长一段时间里成了大家竞相研究积分方程的出发点. 研究成果之一是关于希尔伯特空间上有界自伴算子的希尔伯特谱定理以及冯·诺依曼对无界算子的推广. 这两个定理现在都已成了一般数学教学中不特别指名的内容.

与此同时, 迪利克雷问题已由两种新的方法得到了解决. 一种是庞加莱的括去法, 其中重复地用到圆盘情况下的解; 另一种方法是由希尔伯特提出的, 他借助于适当的极小化序列为迪利克雷原理恢复了名誉. 最后, 佩龙利用上调和函数和下调和函数得到一种非常初等的解.

在求解迪利克雷问题的进程中最后一块里程碑就是外尔的论文. 这篇论文的主要论点就是外尔引理: 如果 u 在区域 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 中局部平方可积, 且对在 Ω 中具紧支集的所有光滑函数 f 成立

$$\int u(x)\Delta f(x)\mathrm{d}x = 0, x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n, \Delta = -\sum (\partial/\partial x_k)^2$$

那么, $u(x)$ 几乎处处等于一个调和函数, 特别地, 它关于变量 x 是局部解析的. 我们将给出一种简单的证法, 这种证法可将该引理推广到分布上去.

$n > 2$ 时 $\Delta u = 0$ 的标准基本解 $E(x) = C_n |x|^{2-n}$ 和 $n = 2$ 时相应的对数形式的基本解对于 $x \neq 0$ 是解析的. 设 $f(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ 在一个开集 w 中等于 1, 并对于 $x \in \omega$, 考虑积分

$$v(x) = \int u(y)w(x,y)\mathrm{d}y, w(x,y) = \Delta(1 - f(y))E(x - y), \Delta = \Delta_y \quad ①$$

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2} = 0$$

首先注意，当 $x \neq y$ 时，$\Delta E(x-y)=0$. 因此，函数 $y \to w(x,y)$ 当 $f=0$ 或 $f=1$ 时为零，且在 Ω 中必有紧支集. 此外，当 $x \in \Omega$ 时，$w(x,y)$ 无限可微. 因而，积分 $v(x)$ 为无限可微. 若 $g \in C_0^\infty(\Omega)$，则可取 $v(x)g(x)$ 的积分，得

$$\int v(x)g(x)\mathrm{d}x = \int u(y)\Delta(1-f(y))h(y)\mathrm{d}y$$

$$h(y) = \int E(x-y)g(x)\mathrm{d}x$$

由于 E 是一个基本解，右端可以写为

$$\int u(y)g(y)\mathrm{d}y - \int u(g)\Delta f(y)h(y)\mathrm{d}y$$

其中 $fh \in C_0^\infty(\Omega)$，从而第二项为零. 因此，在 Ω 中几乎处处成立 $u=v$，引理得证. 如果相应的积分被取为分布 u 的值，那么用同样的方法可证，使 $\Delta u=0$ 的分布 u 可以用一个调和函数来表示.

注 在某些条件下，公式①可以推广到其他的情况. 我们可以用具有光滑系数的微分算子 $P(x,D)$ 来代替 Δ，它具有基本解 $E(x,y)$

$$P(y,D_y)E(x,y) = \delta(x-y)$$

当 $x \neq y$ 时，$E(x,y)$ 是无限可微的. 用 $P(y,D_y)(1-f(y))E(x,y)$ 代替 $w(x,y)$，就可证明，当 f 是具紧支集的无限可微函数时，使 $u(Pf)=0$ 的分布 u 可以用一个光滑函数来表示.

这个注适用于具有光滑系数的椭圆型算子，但外尔引理有许多其他的形式. 这些形式都会用这样或那样的方法说明存在微分算子，特别是椭圆型算子，其弱解具有强正则性质. 外尔引理的主要作用是将某些微分算子的边值问题分割成两部分，第一部分涉及某种存在性，而另一部分是对解的正则性作分析. 我们将用外尔处理迪利克雷问题的方法表明这一点.

事实上，假定 Ω 有界，并设 $H_0^1(\Omega)$ 是由在 Ω 中具有紧支集的一次连续可微函数所构成的空间 $C_0^1(\Omega)$ 按内积

$$(u,v) = \int_\Omega \sum u_{x_k}\bar{v}_{x_k}\mathrm{d}x \qquad ②$$

的平方范数所作的闭包. 一个经典结果是，嵌入 $H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ 是全连续的，并且不难证明 $H_0^1(\Omega)$ 的所有元素在 Ω 的边界上按某种意义等于零.

现在将这些正则性问题放一放. 设 $w \in H^1(\Omega)$ 满足 $(w,w)<\infty$，则 $v \to (v,w)$ 是 $H_0^1(\Omega)$ 中的一个线性泛函，其形式必为 (v,w')，其中 $w' \in H_0^1(\Omega)$. 因此，$u=w-w'$ 就是上述新思路下迪利克雷问题的解：它在边界上等于 w，并且因为对所有具有紧支集的光滑函数 v，$(w-w',v) = -\int(w-w')\Delta\bar{v}\mathrm{d}x = 0$，根据外尔引理，它是 Ω 中的一调和函数. 我们可以同样方便地构造一个格林算子

$G:L^2(\Omega)\to H_0^1(\Omega)$，使得至少在弱意义下 $\Delta Gv = v$. 这一算子可用等式 $\int v\bar{w}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = (Gv,w)$ 来定义，其中 $v\in L^2(\Omega)$，$w,Gv\in H_0^1$，而左端是 w 的一个反线性泛函. 将这一等式写为弱形式

$$(v,w) = (Gv,\Delta w)$$

其中 $w\in C_0^2(\Omega)$，就可证在弱意义下 $\Delta Gv = v$.

我们甚至还可以允许有虚部和低阶项出现. 事实上，假定

$$M = \mathrm{i}\sum \partial_{x_j}a_{jk}(x)\partial_{x_k},\ L = \sum b_j\partial_{x_j} + b_0$$

其中系数为有界并正则，且 M 的系数均为实数，那么利用分部积分，有

$$\int(\Delta + M + L)u(x)\bar{v}(x)\mathrm{d}x = ((1 + \mathrm{i}A + B)u,v)$$

其中 $A:H^1(\Omega)\to H_0^1(\Omega)$ 是在 $H_0^1(\Omega)$ 上的有界自伴算子，而 $B:H^1(\Omega)\to H_0^1(\Omega)$ 是 $H_0^1(\Omega)$ 上的有界紧算子. 因此，除了一个趋于 ∞ 的特征值 t 的离散集外，算子 $1 + \mathrm{i}A + tB$ 可逆. 这样，除这些值外它是可逆的，因此给定 $w\in H^1(\Omega)$，存在一个 $w'\in H_0^1(\Omega)$，使得 $(1 + \mathrm{i}A + tB)(w - w') = 0$. 由此证得 $u = w - w'$ 是关于 $\Delta + M + tL$ 的迪利克雷问题的解，它在 $\partial\Omega$ 上与 w 有相同的边界值.

第七十六回　位势论　迪氏问题蕴其中①
吴炯圻　发展历史从头说

位势理论是数学分析领域中最早完成现代化变革的一个分支，与函数论、微分方程、概率论、物理学联系紧密，厦门大学的吴炯圻教授师承我国位势论专家张鸣镛先生并得到德国比莱佛尔特大学教授 W. Hansen W 真传，对其发展作了如下概述.

位势论起源于物理学的万有引力学说和静电学. 远在 1773 年，J. Lagrange 就注意到力场是一函数(称为牛顿位势)的梯度. 在三维欧氏空间，一个单位质点 ε_y 的引力场在点 $x(x \neq y)$ 的牛顿位势等于把一个单位质点从无穷远移到点 x 所做的功，其值为

$$\frac{1}{|x-y|}$$

因此，一个质量分布 μ 的引力场在 x 的牛顿位势是

$$U^{\mu}(x) = \int \frac{1}{|x-y|}\mathrm{d}\mu(y)$$

1772 年，拉普拉斯证明了，在不分布质量的地方，位势满足拉普拉斯方程. 这样，物理问题便化为求解偏微方程的数学问题.

从 18 世纪到 19 世纪末，位势论的研究限于 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 的牛顿位势 $(n \geqslant 3)$ 和对数位势 $(n = 2)$，即所谓经典位势论. 其中心问题之一是古典迪利克雷问题的求解. 1823 年，泊松给出了球域的积分公式；1828 年，格林对边界充分光滑的有界区域，从物理直观并借助于格林函数给出了解；1840 年，高斯利用变分法解了平衡问题并得到了迪利克雷问题的新解法. 这两个问题与扫除问题相关联，它们被称为位势论三大基本问题. 1855 年. 迪利克雷和黎曼利用所谓迪利克雷原理给出了解. 此外，还有庞加莱的扫除法，施瓦兹交错法等. 但是，由于缺乏足够的数学工具，这些解法是不严密的，需要附加条件的.

另外，在这个时期的主要成果还有：1839 年 E. Earnshaw 证明了迪利克雷解的极值原理；1850 年，黎曼把位势论与函数论做统一处理，揭示了格林函数和位势与保形映射之间的密切联系；1886 年，哈纳克建立哈纳克不等式与哈纳克收敛原理. 此外，关于 C・G・诺伊曼问题及多重调和函数的研究也有不少成果. 这样一来，到了 19 世纪末，位势论的三个基本原理，即极小值原理、收敛性质及迪利克雷问题已基本建立，它为现代位势论的发展做了很好的准备.

20 世纪以来，由于深入运用现代函数论、测度和积分理论、泛函分析、一般

① 本回引自文献[1].

拓扑学、抽象代数以及现代概率论等分支的思想方法，位势论得到了蓬勃发展，开辟了新的研究方向，创造了新的方法，成为分析领域中比较彻底地完成了现代化变革的一个分支，也促进了其他数学分支的发展.

20世纪初，一个重要发现是1909年S.Zarmba所揭示的事实："去心球体的迪利克雷问题未必可解".更有深刻意义的不可解区域的反例于1913年由勒贝格利用所谓"勒贝格刺"给出，这导致了对区域边界不正则点的研究和广义迪利克雷问题的提出.前者由凯洛格、布利冈和N.维纳等人完全解决；关于后者，佩龙于1923年提出了关于一般区域迪利克雷问题并给出新的解法，经过维纳(1925)，特别是布雷洛(1939)的改进和推广，得到了解的存在与唯一性定理的一般形式.此外，M.V.Keldysh等人20上世纪30年代还研究了迪利克雷解的稳定性.

1925年，F.里斯引进了上(下)调和函数的概念，这为位势论研究提供了新的方法；里斯分解定理建立了上调和函数与位势之间的紧密联系；而对上调和函数连续性的研究导致了细拓扑概念的引入.

20世纪20年代，瓦莱普桑用现代观点改进并发展了庞加莱扫除法；O.Frostmann发展了高斯变分法，成功解决了紧集的平衡问题和扫除问题.同期，位势论已推广到非古典核的情况，特别是M.里斯核，它对应于非局部微分积分算子，已不属于通常偏微分方程所关联的位势核了.

从20世纪40年代起，泛函分析与拓扑学的方法系统引入位势论并使它发展到一个新水平.1941年，H.嘉当利用希尔伯特空间理论研究具有有限能量的测度等，得到很大的成功；同年，R.S.马丁建立了马丁边界理论，导致了关于正上调和函数及理想边界理论的深入研究；1950年，J.Deny用施瓦兹广义函数论解决了完备化问题；1955年，C.Choquet建立了一般容量理论及可容性定理，并且紧凸集的极端点理论改进了马丁定理的证明.此外，对于更一般的空间(例如流形、LCA群)和更一般形式的位势核的位势也有了深入的探讨.

20世纪50年代后，位势论迅速发展，除了它越来越广泛地与复分析、拓扑学、几何测度论、调和分析、微分方程、微分几何、泛函分析等相邻数学分支相互结合、相互渗透且发挥着日益增加的作用外，还具有如下两个显著特点.

其一，各种公理体系的位势论不断建立和完善.为了统一处理已有的理论并加以推广，使之适用于一般椭圆和抛物型方程或随机过程，自20世纪50年代中期起，G.Tautz，J.Doob，M.Brelot，H.Bauer， J.M.Bony，C.Constantinesca和A.Cornea等人分别给出不同的公理系统，建立各种形式的调和空间位势论(最近，关于多重调和空间的公理系统也已建立起来)；而J.Deny等人则从能量和迪利克雷积分等概念出发建立了称为迪利克雷空间的公理理论.20世纪80年代，H－锥理论与扫除空间位势论把调和空间论的发展推进了一大步；当今的迪

凯洛格(Kellogg, Oliver Dimon, 1878—1932)，美国数学家.

布利冈(Bouligand, Georges Louis, 1889—)，法国数学家.

布雷洛(Brélot, Marcel Emile, 1903—)，法国数学家，生于卢瓦尔河畔新堡.

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2}=0$$

氏型(迪利克雷形式)因其与马氏过程的紧密结合而大大地超越了 Deny 等人当年的工作.与此同时,非线性公理体系也逐步发展,越来越引人注目.

其二,位势论与随机过程的内在联系逐步获得深入研究,同时促进了分析与概率论这两个在 20 世纪 40 年代前仍被视为互不相干的数学领域的发展.20 世纪 40 年代中期,S. Kakutani,M. Kac 和 J. 杜布等人先后发现经典位势论与布朗运动.20 世纪 50 年代起,杜布等人为提示二者之间的联系做了大量工作;1957 年 G. A. Hunt 进一步推广到较一般的 Markov 过程(亦称 Hunt 过程).从此,位势论的基本概念获得了明确的概率解释,而分析工具又大大促进了概率论的发展.马丁边界被翻译成概率语言并用于研究 Markov 过程,由于调和空间,迪氏型等各种公理体系位势论中都引入了 Markov 半群,因而构造相关联的 Markov 过程,公理位势论使随机过程的研究提高到一个新的水平.20 世纪 80 年代,C. P. McKean 和 S. Ito 等人在流形上用随机微分方程来建立扩散过程,提供了用概率来研究位势论的一种方法,在杜布,Hunt, P. A. Meyer, K. L. Chong(钟开莱)和 M. Fukushima 等人一系列出色工作的基础上,20 世纪 80 年代已形成了"概率位势论"这样一个把分析位势论与 Markov 过程论有机地结合在一起的新兴理论.

近几十年来,位势论的研究在中国也有很大发展,值得提及的是,国内位势论研究的先驱、长期从事这个领域的科研与教学的、已故厦门大学教授张鸣镛,云南大学卫念祖教授所做的重要的贡献;王梓坤教授等概率专家为发展概率与位势的联系所做的杰出工作以及马志明院士等在迪氏型方面的出色研究.

关于近期位势论研究状况,可以说是精彩纷呈.为便于初学者有个大体的了解,下面分五个方面来考察.

一、一般核位势论的研究仍受重视

这里指的是在 $\mathbf{R}^n$、黎曼流形(包括曲面)、$\mathbf{C}^n$ 及其中的多圆柱等具体空间上关于一般核(单核)的位势及相关联的问题的研究.这是经典位势论的直接发展.例如:

自 1965 年 L. Landkof 的名著《现代位势论基础》问世至今,前苏联一直有大批学者在从事里斯位势的研究,成果不断.法国 A. Ancona 等人从 1978 年至今对 $\mathbf{R}^n$ 上区域的马丁边界、格林函数(及其商)的边界性质、哈纳克性质等有一系列创造性工作,武汉大学章逸平 1986 年对边界的两种瘦性作了比较.英国 D. A. Armitage 与 S. J. Gardiner 等一批学者发表了许多关于 $\mathbf{R}^n$ 的超平面等一些特殊区域上的调和与上调和性质(包括平均值与积分)的研究.

关于调和与上调和函数的细边界值与角形边界值的研究曾十分引人注目,这是因为位势论名家杜布早年研究了该问题且提出一些猜想.20 世纪 80 年代

D.S.Jerison 与 C.E.Kenig 的工作非常出色,台湾黄俊雄也做了许多重要的工作,日本 Y.Mijuta 等人也有不凡的研究,厦门大学高琪仁 1986 年至 1989 年发表的论文把杜布与黄俊雄的工作推进一步.同时还有 U.Kuran,J.L.Schiff,M.Stoll 等人关于边界极限与唯一性定理的研究.

从 1974 年至 1991 年日本 M.Nakai 与 T.Tada 等关于与方程 $\Delta u = Pu$ 相关联的马丁边界与皮卡原理做了大量深入的研究;1983 年至 1989 年吴炯圻的几篇论文发展了 Nakai 等人的工作;1994 年高琪仁与邱曙熙又发展了吴的部分结果.A.Boukricha 在解决这一类问题采用了高明的方法,从 1979 年起发表多篇不凡的研究,1995 年还与 W.Hansen 一同就 P 是较一般测度的情形研究了有关该方程的皮卡原理与马丁边界.W.Hansen 等人还研究满足局限平均值性质的函数成为调和函数的条件;J.Kral 研究位势论的算子及位势的逆问题等,另辟一块天地.

皮卡(Picard,Charles Émile,1856—1941),法国数学家,生于巴黎,卒于同地.

在 1990 年国际位势论会议上,J.C.Taylor 与 K.Gowrisankaran 分别报告了《关于多圆柱的正谐底部的马丁紧致化》与《关于多圆柱的非切极限》的研究.对于多重调和函数的研究,中科院马志明等学者也做了重要工作.

此外,近期还有不少关于位势论在流体力学、静力学等方面应用的研究.

二、位势论的公理系数不断发展完善

(1) 关于调和空间位势论.1990 年 I.Netuka 报告了在 P 空间上研究迪利克雷问题的边界行为的成果,1991 年吴炯圻与高琪仁在不用限制可数基的调和空间上研究了位势延拓与广义容量;而后高琪仁关于广义容量又有新的成果并研究了广义权的正则性等问题,吴炯圻、邱曙熙也从不同角度探讨了广义权问题;从 20 世纪 70 年代起对细调和、细解析函数作出深入研究的 B.Fuglede 近年来在调和空间之间的调和映射方面获得很好的成果;J.Lukes 等学者于 1986 年发表了专著《实分析与位势论中的细拓扑方法》,近年来对调和空间的细拓扑又有新的研究.20 世纪 80 年代,日本 F.Y.Maeda 对调和空间上的迪利克雷积分有一系列研究,并发表了专著.

(2) 关于迪氏型.自 1971 年 M.Fukushima 首次由局部紧空间上的正则迪氏型构造出强 Markov 过程以来,迄今已从 Beurling 与 Deny 1959 年的、基本上局限于分析领域的迪利克雷空间发展成与 Markov 过程紧密结合的新兴迪氏型理论,并反过来对位势论与 Markov 过程的发展起到促进作用,同时在相关数学物理分支,如伪微分方程、随机微分方程、Malliavin 算法、子力学、量子场论等领域得到了应用.S.Albeverio、马志明与 M.Rockner 从 20 世纪 80 年代末到 90 年代初发表的一系列论文,解决了非正则(拟正则)迪氏型与 Markov 过程的联系.1995 年,马志明等出版了《非对称狄氏理论导引》.近年来,常有各种形式的、迪氏型

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2} = 0$$

理论的专题国际性会议或研讨会召开.

(3) 关于扫除空间与 H - 锥理论. 它们都是调和空间位势论的进一步发展. 扫除空间由 J. Bliedtner 与 W. Hansen 提出来并作了许多深刻的研究,他俩的专著《位势论 —— 扫除的分析与概率方法》1986 年出版后在国际上影响深远. 近年来时有这个方面论文问世. N. Boboc、A. Cornea 和 G. Bucur 发表了专著《位势论中的次序与凸性:H - 锥》,是他们从事这个方向研究的总结,他们及他们的学生在这个方向不断有新的成果发表.

(4) 非线性位势论公理系统. 这也是当前引人注目的研究方向之一. 1987 年的国际位势论会议上, I. Laine 作了《公理化非线性系统》的综合报告,总结他本人及 P. Lindqvist、O. Martio 和 P. Lehtola 等人的工作; 1990 年国际位势论会议上 E. M. Bertin 等人又做了关于非线性与拟线性位势论的专题研究报告, L^p 位势论是较新的一个研究课题. 1990 年 D. R. Adam 发表了《L^p 位势论方法与非线性 PDE》,瑞典人 L. I. Hedberg 报告了《非线性位势论》. 许多位势论名家都对非线性系统表示了很大的兴趣. 1993 年 J. Heinonen、T. Kilpelainen 与 O. Martio 出版了专著《关于退化椭圆方程的非线性位势论》.

三、函数论中的位势论起反哺作用

从函数论中脱胎出来的现代位势论反过来用现代的分析工具从各方面来加强函数论,促进了位势论的发展. 位势论向函数论提供的工具主要有两大类:一类是由扫除法建立起来的,关于调和测度、平衡分布等精致的存在定理和极值定理;另一类是细拓扑,马丁边界等描写函数的边界行为的、清晰的新概念.

奈望林纳 (Nevanlinna, Rolf Herman, 1895—1980), 芬兰数学家, 生于约恩苏.

从 20 世纪 20 年代奈望林纳理论产生以来,位势论方法在复函数值分布理论上的重要作用是众所周知的,目前聚值理论、黎曼曲面分类理论等等实际上已经与位势分不开了.

在研究共形映射的存在性问题上,位势论方法比古典方法优越也是显然可见的. 由格林函数、平衡位势的存在定理直接可以推出有关的各种标准的共形映射的存在定理,并且超越了关于联结重数和边界光滑性等等限制.

在几何函数论的基本原理上,用位势论也可以得到深入得多的结论. 例如,用施瓦兹引理或从属原理只能得到一个单联区域的映射半径不少于任何一个子区域的映射半径,而两个区域没有这种包含关系时,就没有有效的方法来比较它们的映射半径. 但是,用位势论方法容易证明,一个包含原点 O 的有界单联区域 D 在点 O 的映射半径 r_0 满足 $r_0 r_0^* \leqslant 1$,这里 r_0^* 表示 D 的外部关于单位圆的对称区域在点 O 的映射半径,等号成立除非 D 是以 O 为中心的圆. 因此假如 $r_0^* \geqslant r_0$,那么 $r_0 \leqslant 1$,等号成立除非 D 是个单位圆. 由上述结论可直接得到科伯定理及其推广,这一结果属于张鸣镛.

上调和函数和多重调和函数在多复变函数论中的作用也是很明显的.

1985 年美国《当代数学》杂志以黎曼曲面为题介绍了张鸣镛等中国学者在黎曼曲面位势论方面所做的工作.其中,张鸣镛的工作主要体现在共形映射与极大黎曼曲面的研究;其他方面的工作有:理想边界(吴炯圻)、黎曼曲面分类理论(邱曙熙)、广义对数位势(张洵)、下调和延拓(龚昇宗)、细解析函数与细边界极限(高琪仁、林勇)等.

日本许多学者在 M.Tsuji 的重要著作《现代函数论中的位势论》的推动下,就这一方向做了许多很好的工作.S.Sakai 对求积域有深入研究.

在拟共形映射研究中越来越多地应用位势论.特别突出的是 1987 年 D.Drasin 在研究拟共形映射的同时结合了位势论的方法,出色地解决了奈望林纳的一个猜想,在数学界影响较大.

20世纪80年代与90年代初在这个方面一个十分引人注目的课题是美籍华人吴徽眉(J.M.Wu)以及前苏联 N.G.Makorov 所进行的关于边界畸变、边界密度与格林函数、调和测度的性质等与共形映射、几何测度论有关的研究.在1990年的国际位势论会上,他们两人都作了长达 1 小时的特邀报告,受到与会者的一致关注和欢迎.

1993 年,在加拿大召开一个主题为"复位势论"的数学研讨会,涉及实与复位势论、复动力系统、巴拿赫代数与无限维全纯映射等专题.

四、概率与分析的结合发展喜人

除了上述特点二中谈及的工作外,1990 年法国 C.Dellachrie 和 G.Mokobodzki 两位很有影响的概率位势论专家分别发表了《Hunt 过程的非线性模式》和《位势论与遍历收敛定理》,对这个方向的发展产生了重大影响.

近年来,J.C.Taylor,K.Ito,B.∅ksendo等人关于布朗运动与扩散过程的研究颇引人注目.

非局部紧阿贝尔群上的位势论的研究也有新的发展.

国内概率论大家王梓坤教授 1983 年发表了专著《布朗运动与位势》,他及他的学生们的一系列出色的工作对推进国内在这个方向的研究影响深远;杨向群对离散随机过程的马丁边界有深入研究,并有专著发表;武汉大学有一批学者在这个方向也有很好的工作,厦门大学叶仰明、吴春章也发表了有关的研究.

杜布于 1983 年发表了学术水平极高的专著《Classical Potential Theory and its Probabilistic Counterpart》,已被译成中文.

严加安、何声武等概率专家在研究随机分析、鞅论时也都研究了位势论.

五、位势论与其他分支相互促进

位势论对度量拓扑(Metric topology)的影响由来已久.点集的超限直径,豪

豪斯多夫(Hausdorff, Felix, 1868—1942),德国数学家,生于布雷斯劳一个犹太商人的家族.

薛定谔(Schördinger, Erwin, 1887—1961),奥地利科学者,生于维也纳.

斯多夫测度和非整数维数等概念跟位势论的关系非常密切.Kolmogorov 定义的、函数空间的熵的概念是又一个例子.

由于几何测度论的产生和发展,位势论与同伦论的关系也得到发展,位势论方法的应用将使在微分拓扑或流形上的分析取得有意义的进展.

由于位势与它的核的关系可以用傅里叶变换来说明,位势论与调和分析的关系目前越来越多地受到注意.

在椭圆型和抛物型方程的研究中,已相当广泛地采用位势论方法,各种理想边界的概念已常被应用.1990 年国际位势论会上,美国 C.E.Kenig 的特邀报告《非光滑系数椭圆方程的迪利克雷问题与诺伊曼问题》及会上 W.Hansen 等人关于薛定谔方程(算子)的论文都集中探讨了位势论.

其他,近来关于 Sobolev 空间,希尔伯特空间,哈代空间,一般线性拓扑空间,关于积分方程和其他算子(如亥姆霍兹算子)的研究都有许多与位势论相结合的内容.1996 年,D.A.Adams 与 Hedberg 合著出版了《函数空间与位势论》,给出了泛函、位势论与方程三者一体的研究,影响之大远远超出这三个领域.

总之,从当前位势论的发展趋势来看,今后,它与相邻数学分支的相互渗透和结合必将进一步深入,这将导致此前有关领域的一些猜想与难题的解决;公理系统,特别是非线性公理系统将有新的突破;位势与概率的结合有广阔的前景,它将大大超过当前的范围.

国内杰出的函数论、位势论专家,已故张鸣镛教授 1979 年曾对位势论与函数论的关系做了一个展望.他认为"应该看到位势论面临的新的重大任务".

"位势是向量场的不定积分,在一维的情况下,不定积分跟定积分的概念是一致的,关于它的存在在各种性质的实函数中已有充分的讨论.但在高维的情况,向量场的不定积分的存在要求向量场的外微分等于 0,在二维的情况,一个向量场有自己的对偶向量场,一个外微分与反外微分都等于 0 的向量场叫做调和场.它的位势就是原调和场的位势的共轭调和函数,黎曼就是通过这个事实把函数论与位势论联系在一起的.在 $n(n\geqslant 3)$ 维的情况,仍有向量场的对偶和调和向量场的概念.并已建立了多重向量场的初步理论系统,留数定理也推广到它上面去了.但至今尚未有人把扫除法等推广到多重向量位势上去,也还没有人利用扫除法所建立的格林多重向量场来推广黎曼函数论的观点.黎曼的思想为建立单值化定理开辟了道路,这个单值化定理实际上是二维流形拓扑学的基本定理,高维流形拓扑学的基本定理是否也应该用类似方法建立?黎曼函数论的观点是否可以启发我们建立一门新的同调分析呢?" 张先生说,"希望不久能看到这个问题的解答."

第七十七回　历史久　前苏数学有传统①
立意新　开创结果数第一

前苏联数学家的许多工作都与研究解在区域近界上的性质有关.对于在三维空间薄层上的问题的解,拉夫连捷耶夫在他所引进的变分原理的基础上,得到了沿边界曲面法线方向的微商的估计,这估计依赖于边界值和区域的几何性质,埃杠斯(Л. М. Эйлус)证明了,假设在二次连续可微的曲面 S 上所给定的边界函数具有平方可积的广义微商,那么解就在 δ 上几乎处处有属于 $L^2(S)$ 的法线微商,科舍列夫(А. И. Кошелев)证明了,如果在平面区域的足够光滑的边界上,边界函数的二级微商属于 $L^p(S)(p>1)$,那么解的二级微商属于 $L^p(\Omega)$;他同时还考虑了分片光滑的边界和更一般形式的椭圆型方程.

很早以前,对于有限区域上任意连续边界条件的情形,维纳引进了关于拉普拉斯方程迪利克雷问题的广义解的概念;解在边界的所谓正规点上必定取给定的值,而在非正规点上就不一定了.科罗夫金(П. П. Коровкин)得到了边界正规性的新的特征,兰特科夫(Н.С.Ланлкоф)则指出了,对于个别边界函数考虑了适合边界条件的问题,在边界上可以找到与边界函数无关的可数集合,如果在这集合的点上,广义解取已知值,那么在其他点上也有同样的情况,而兰特科夫的工作中包含了对非正规点集合的研究.梅什基斯(А. Л. Мышкис)证明了,佩龙与维纳关于给定连续边界条件时解的存在性的古典结果,可以推广到这样的情况,即当边界函数给在"广义边界"的情况,也就是,对于从不同途径趋向边界点时,解的极限值可以是不同的,而且这些途径和这些极限值应该是事先给定的.

M.B.盖尔迪什与M.A.拉夫连捷耶夫在1937年最先研究了当边界变动时关于解的稳定性.在科罗夫金(П.П.Коровкин)与麦吉列夫斯苦(Ш.И. Мотилевский)的工作中也有稳定性的研究;后者得到了在给定边界点上解稳定性的充分与必要条件,这些条件是用所谓"容度"的专门术语与广义格林函数来表示的.在克朗贝尔克(В.А.Кронберг)的文章中,求得了解的按小参数幂次的展开式,这些小参数是用来刻画边界的变动的.

梅什基斯(А.Л.Мышкис)提出了求解的新的变分原理:在所有取给定边界值的函数中,调和函数使得作者所引进的泛函"负荷"达到极小值;对于所谓

---

① 本节引自文献[22].

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2}=0$$

变形了的("自由的")迪利克雷问题的解,这泛函取零值,在迪利克雷无穷积分情形时可以取有限值.在托波连斯基(Л.ь.Топопянский)的工作中考虑了迪利克雷积分的一些性质.

纳汤松(И.П.Натансон)证明了,当点沿半径离开圆周时,单位圆内迪利克雷问题的解与边界函数的差商不超过常数 $w((1-r)\ln(1-r))$,其中 $w(\delta)$ 为边界函数连续性的模数;吉曼(А.ф.Тиман)也讨论了这一问题.

第七十八回　椭圆型　近代进展专家述
到三维　迪氏问题解不恒

(1) 拉普拉斯方程的迪利克雷问题在两个自变数的情况下，对于任何的单连通区域(如果给定的边界上的函数是连续的) 总是可解的. 对于三维的单连通域迪利克雷问题，并不恒有解. 三维区域的每一边界点 P 称为是一个正则点，如一个以曲线

$$x_2 = f(x_1) = x_1^k$$

(其中 k 为任一正数) 为基准线绕 x_1 轴旋转而得到的锥 K 的顶点，可以从外面与此边界点相接触. 这个条件可以确切地叙述如下：在区域 G 所在的那个空间 (x_1, x_2, x_3) 内，可以选择以点 P 为原点的坐标轴，使所有在锥 K 内而有正的横坐标 x_1(不超过某一正数 η) 的诸点在区域 G 之外. 另一方面，勒贝格①以及乌勒逊②曾独立地证明：如果区域 G 的边界点 P 具有这样的一个邻域 U_P，使对于适当选择的坐标轴，这邻域的所有的那些不属于区域 G 的点，不越出一个以曲线

$$x_2 = e^{-\frac{1}{x_1}}, x_1 > 0$$

为基准线绕 x_1 轴旋转而成的锥体之外，则点 P 不是正则点. 如果这曲线用曲线

$$x_2 = F(x_1) = e^{-|\ln x_1|^{1+\varepsilon}} = x_1^{|\ln x_1|^{\varepsilon}}$$

(其中 ε 为任一正数) 来代替，上面的叙述仍旧成立.

在 $n(n > 3)$ 维空间函数 $f(x_1)$ 变成函数

$$\frac{x_1}{|\ln x_1|^{\frac{1}{n-3}}} \qquad ①$$

而函数 $F(x_1)$ 变成函数

$$\frac{x_1}{|\ln x_1|^{\frac{1}{n-3}+\varepsilon}} \qquad ②$$

其中 ε 为任一正数. 如果令表达式 ①，或 ② 等于 $\sqrt{x_2^2 + \cdots + x_n^2}$，就可以得到对应的 n 维锥面的方程.

---

① 勒贝格, Sur le problème de 迪利克雷(关于迪利克雷问题), Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo(巴雷尔谟数学会会刊)24(1907), 371-402.

② П. С. Урысон, Zur ersten Randwertaufgaben der Potential theorie. Ein Fall der Unlösbarkeit(关于位函数理论的第一类边值问题，一类不可解的情形), Math. Zeitschrift(德国数学杂志)23(1925), 155 - 158.

点 P 是一个正则点的充分条件已由维聂尔求出①.

(2) 含变系数的线性椭圆型方程

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1,\cdots,x_n)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1,\cdots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i}+ a(x_1,\cdots,x_n)u = f(x_1,\cdots,x_n) \quad ③$$

的第一类边值问题的可解性与系数 $a(x_1,\cdots,x_n)$ 的符号有很大的关系. 如果这系数取正值,那么甚至当方程 ③ 的系数都是常数的那种情形,只要区域 G 充分大,这个方程的第一类边值问题,可能无解,或不止一个解. 例如,方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2k^2 u = 0 \quad ④$$

有这样的一个解 $u_0 = \sin kx \sin ky$,它在边为

$$x = 0, y = 0, x = \frac{\pi}{k}, y = \frac{\pi}{k}$$

的正方形 Q 的边界上等于零.

而另一方面,很容易证明,如果方程 ④ 有一解 u_0,它在一个具有充分光滑边界的区域 G 的边界上等于零,而且在边界上有连续的一阶导数,那么方程 ④ 的每一个其他的充分光滑的解 u,应该在区域 G 的边界上满足关系式

$$\int \frac{\partial u_0}{\partial n} u\,\mathrm{d}s = 0 \quad ⑤$$

其中积分是展布在区域 G 的边界上. 如果对等式

$$\iint_G u_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2k^2 u\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

的左端施行分部积分,而且使积分中的 u 对 x 和对 y 的导数不出现,那就得到关系式 ⑤. 因而当区域 G 是一正方形,而给定在它的边界上的那个函数不满足关系式 ⑤ 时,方程 ④ 的第一类边值问题,就可能没有一个光滑的解.

可以证明,对于给定在区域 G 的边界上的任一连续函数,及任一右端函数 f,或者方程 ③ 的第一类边值问题有唯一解,或者这问题仅对于能满足有限个条件的那些边界函数和右端函数 f 才有解存在,而且这问题的解,不是唯一的.

一般说来,在解椭圆型方程 ③ 的第一类边值问题时,系数 a 处处小于等于 0 的那种情形,与这系数在某些点为正的那种情形,有很大的差别. 在第一种情形下,对于给定在区域 G 的边界上的任一连续函数,只要区域 G 的边界十分规则,并且系数 a_{ij}, a_i 和函数 f 连同其充分高阶的导数都连续,那么这个问题有一个唯一的解. 如果系数 a 在所论区域的某些点上取正值,那么为了保证解的存

① 参看"数学科学的进展"第 VIII 期(1941),M. B. Келдыш(凯耳德什)的论文. 在那里还登载有一系列关于椭圆型方程的论文,并且还附有文献.

在和唯一性，还须区域 G 要充分小．弗・弗・聂美赤基①证明了更一般的方程(非线性的)的第一类边值问题的解的存在和唯一性．在这里重要的是区域 G 的面积要充分小，而它的直径，则可以任意大．

奥・阿・奥列尼克曾证明：对于任一处处使 $a \leqslant 0$ 的那种区域，或对于其他的一些充分小的区域，为使对于给定在区域的边界上的每一个连续函数，其迪利克雷问题都可解而必须附加在边界上的那些条件，与拉普拉斯方程或方程③的迪利克雷问题的可解与否无关②。

斯・恩・伯恩斯坦曾证明了极广泛的一类非线性椭圆型方程的迪利克雷问题的解的存在性．这些结果的概述以及关于椭圆型方程的其他一些性质的更详细的概述，刊载于《数学科学的进展》第 VIII 期(1941)．在那一期中还载有关于椭圆型方程的一系列重要的研究结果．

(3) 椭圆型方程和椭圆型方程组的一切充分光滑的解——即那些具有充分阶数的连续导数的解——都是解析函数，如果这些方程的左端都是解析函数．我们假定这些方程的右端等于零．伯恩斯坦首先对含两个变数的二阶椭圆型方程给出过关于这一事实的证明③．

(4) 如果具有充分光滑的系数的齐次($f = 0$)椭圆型方程③，对于给定在某一有界区域 G 的边界上的每一个连续函数的第一类边值问题，在 G 内有唯一解，那么，关于解序列为一致收敛的那个定理(类似于哈尔拉克第一定理)也是成立的：如果解序列在 G 的边界上一致收敛，那么它在 G 内也一致收敛，并且一致收敛于满足同一方程③的函数 u．

(5) 关于解序列的单调性定理(类似于哈尔那克第二定理)：假定有界区域 G 是这样的一个区域，它使对于每一给定在它的边界上的连续函数，其迪利克雷问题有且仅有一解；于是只要齐次($f = 0$)方程③的解的序列 $u_n(x_1, \cdots, x_n)$，在区域 G 的某一点上收敛而在这个区域的一切点上有 $u_{n+1}(x_1, \cdots, x_n) \geqslant u_n(x_1, \cdots, x_n)$，那么序列 $u_n(x_1, \cdots, x_n)$ 在每个有限域 G^* 内一致收敛(这个有限区域 G^* 连同它自己的边界一起位于 G 内)．

(6) 如果在方程③中 $a = 0, f = 0$，那么方程③的每一解在 G 的边界上取最大值和最小值．如果在方程③中 $a \leqslant 0, f = 0$，那么方程③的每一在闭域上连续的解，在该区域内不可能取得最大的正值或最小的负值．

---

① В.В.Немыцкий(聂美赤基)．Теоремы существования и единственности решения для нелинейных интегральных уравнений(关于非线性积分方程解的存在和唯一性定理)．数学汇刊，41(1934)，438-452．

② О.А.Олейник．О задаче Дирихле для уравнений эллиптического типа(关于椭圆型方程的迪利克雷问题)．数学汇刊，24；1(1949)1-14．

③ С.Н.Бернштейн．Sur la nature analitique des solutions des équations aux derivées partielles du second ordre．Math．Annalen 59(1904)，20-76(关于二阶偏微分方程的解的解析性)数学年报；И.Г.Петровский．Об аналитичности решений систем дифференциальных уравнений(微分方程组的解的解析性)．数学汇刊，5(47)；1(1939)，3-70．

(7) 在一适当选定了度量的黎曼空间中，方程

$$\sum_{ij=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = 0 \qquad ⑥$$

的解，具有算术平均值的性质. 对于这些方程，可以构造这样的一些解，类似于点的位势，单层位势或双层位势之于含两个变数的拉普拉斯方程①. 对于某些椭圆型方程组，可以构造出类似于这种位势的所谓"基本"解组②.

(8) 关于解析函数的刘维尔定理，同样可推广到某些二阶椭圆型方程. 伯恩斯坦③证明了下面的定理.

方程

$$A(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})u_{xx} + 2B(\quad)u_{xy} + C(\quad)u_{yy} = 0$$

(其中 A, B, C 都为其全体变数的有界函数，而且 $AC - B^2 > 0$) 的每一有界解(在全平面上具有连续的一、二阶偏导数) 是一个常数.

(9) 如所有的函数 u_i，而且连同其一阶值到($n_i - 1$) 阶导数在某一($n - 1$) 维解析曲面上同时等于零，那么它们在整个区域内恒等于零.

这个结论，可以作为具有解析系数的线性方程组的柯西问题解的唯一性定理(霍耳蒙格列恩定理) 的一个推论而得到的，因为椭圆型方程组没有实特征曲面.

(10) 如果椭圆型方程 ③ 的系数 a_{ij} 在某一有限域 G 内，有着有界的 1 至 p 阶导数，而系数 a_i, a 和 f 在这区域内具有有界的 1 至($p - 1$) 阶导数，那么这方程的一切连续解，在每一连同其边界都位于 G 内的区域 G^*，有着有界的 1 至 p 阶导数.

阿·弗·波哥列洛夫曾证明：如果函数

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t)$$

关于其全体变数，可连续微分 $k > 3$ 次，那么椭圆型方程

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0$$

的所有可连续微分三次的解，至少可以微分 $k + 1$ 次④.

(11) 正如拉普拉斯方程的典型边值问题就是迪利克雷问题一样，关于"多

---

① В.Феллер(费列尔).О решениях линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка эллиптического типа(关于二阶线性椭圆型偏微分方程解的问题). 数学科学的进展. 第 VIII 期(1941), 232-248.

② Е. Е. Леви, О линейных эллиптических уравнениях в частных производных(关于线性椭圆型偏微分方程). 数学科学的进展. 第 VIII 期(1941), 249-29; . Я. Б. Лопатинский, 关于线性椭圆方程的基本解. 乌克兰数学杂志. 3, No. 1(1951), 3-8.

③ С. Н. Бернштейн, Об одной геометрической теореме и ее приложениях к уравнениям в частных производных эллиптического типа(关于一个几何定理及其应用于椭圆型偏微分方程). 数学科学的进展. 第 VIII 期(1941), 75-81.

④ А. В. Погорелов, Изгибание выпуклых поверхностей(凸曲面的弯曲). 苏联技术理论书籍出版社, 1951 年 .

重调和”方程

$$\Delta^m u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)^m u = 0$$

的典型边值问题，就是由这个方程的解，和它的 1 至 $m-1$ 阶法向导数，在某一区域 G 的边界上的值，来确定这个方程在该区域 G 内的解的问题. 当 $m=2$ 和 $n=2,3$ 时，弹性论的一些重要问题就化成这个问题. 在区域 G 的边界及给定在其上的那些函数是充分光滑的假设下，这个问题的狭义解的存在及其唯一性已经被证明. 当 $m=2$ 和 $n=2$ 时，只须要求：区域 G 是由有限条闭曲线所围成，而每一条闭曲线的坐标，是一个以弧长为自变数的三次连续可微函数，而且给定在这些曲线上的函数，连同其对弧的一阶导数都是连续的. 索波列夫曾证明，在对 G 的边界作了极广泛的一些假设以后，这个问题的广义解是存在的，并且是唯一的. 他假定这种边界是由若干个不同维数的几何基块所组成. 并且发现在维数为 $n-r$ 的几何基块上，必须给定函数 u 及其 1 至 $m-\left[\frac{r}{2}\right]-1$ 阶导数的值. 索伯列夫的广义解的意思是，函数 u 及其导数在所有的边界点上，不一定取已给值，而仅是“平均”地取已给值，至于这“平均”二字的确切定义，请参看索波列夫所著《泛函分析在数学物理中的某些应用》111 ~ 113 页，1950 年版.

(12) 对于一类称为强椭圆型方程的线性椭圆型方程，姆·伊·维舍克曾研究与二阶椭圆型方程的第一类边值问题和第二类边值问题相关的那些边值问题的可解性问题. 并且发现，和方程 ③ 一样，这样的问题或者对于任意给定的边界函数和方程组的右端有唯一解，或者解不是唯一的，而且要使解存在，边界函数和右端必须满足有限个条件，对于第一类和第二类边值问题的解的存在和唯一性，其充分条件(它们是方程组的系数所应该满足的) 已经被求出. 我们还须指出，和方程 ③ 一样，对于充分小的一些区域，其第一类边值问题的解恒存在且是唯一的. 这些问题的解在广义的意义下，满足边界条件和方程组①.

(13) 伊·恩·魏古阿研究了方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = f(x,y)$$

在区域 G 的边界上满足条件

$$\alpha(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + \beta(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + \gamma(x,y)u = \varphi$$

的解的存在和唯一性问题，其中 $a,b,c,f,\alpha,\beta,\gamma,\varphi$ 都是充分光滑的函数.

已经知道，要这个问题有解，函数 f 和 φ 应该满足的条件的个数及与其对

① М.И.Вишик, О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений(关于强椭圆型微分方程组)，数学汇刊,29(71);3(1951),615-676;О краевых задачах для систем эллиптических дифференциальных уравнений и об устойчивости их решений(关于椭圆型微分方程组的边值问题及其解的稳定性问题),苏联科学院报告,84,No4(1952).

应的齐次问题($f = 0, \varphi = 0$)的线性无关解的个数都与整数 n 有关，这个整数 n 称为该问题的指标．此问题的指标 n 等于函数$\dfrac{\alpha(x,y) - \mathrm{i}\beta(x,y)}{2\pi}$的辐角，当点$(x, y)$沿区域 G 的边界曲线的正向环绕一次所得到的增量．

为了叙述简单起见，假定 G 为一单连通域，且 $c = 0, \gamma = 0$．如 $n \geqslant 0$，则这个问题对于任何 f 和 φ 都可解，而对应的齐次问题的线性无关解的个数，等于 $2n + 2$.①如 $n < 0$，则这个问题仅对于满足某些条件的那些 f 和 φ 才可解．这些条件的个数等于 $-2n-1$，齐次问题在这种情形下仅有一解．

更一般的边值问题，也曾有人研究过②．

(14) 关于方程

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + A(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + C(x,y)u = f(x,y) \qquad ⑦$$

当参数 $\varepsilon > 0$ 的值是很小时的边值问题的解的性质也曾有人研究．

为简单起见，假定在区域 G 内 $A^2 + B^2 \neq 0$，系数 A, B, C 和 f 都是充分光滑的函数，而微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{A(x,y)} = \frac{\mathrm{d}y}{B(x,y)} \qquad ⑧$$

在每一经过区域 G 的点的积分曲线，都可以开拓到边界上去．当 ε 趋向于零时，方程⑦的第一类边值问题的解(在区域 G 的边界上取已知函数 φ 的函数值)，在区域 G 的那些不在方程⑧的与边界相切的积分曲线上的一切点上都收敛．而且在每一不包含方程⑧的与边界相切的积分曲线，又不包含区域 G 的这样的一些边界点——在那里矢量$(A(x,y), B(x,y))$指向区域内部——的闭域上，它是一致收敛的．极限函数 $u(x,y)$ 满足方程

$$A(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + C(x,y)u = f(x,y) \qquad ⑨$$

而且在 G 的那些边界点上(在那里矢量$(-A(x,y), -B(x,y))$指向区域内部)取 φ 的函数值③．

方程⑦的第二类边值问题和第三类边值问题的解，当 ε 趋向于零时，在区域 G 内一致收敛，而且一致收敛于方程⑨的解，方程⑨的解在 G 的边界的那些点上(在那里矢量$(-A(x,y), -B(x,y))$指向区域内部)满足椭圆型方程⑦的解所满足的同一个边界条件．极限函数满足方程⑨，而且在某种广义的意

---

① 参看本回第2个结果关于方程③的第一类边值问题的可解条件．

② И. Н. Векуа, Новые методы решения эллиптических уравнений(椭圆型方程的一些新解法)．苏联技术理论书籍出版社，1948年；Системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа и граничные задачи с применением к теории оболочек(一阶椭圆型微分方程组及可应用于薄壳理论的边值问题)，数学汇刊，31(73)：2(1952)，277-314．

③ N. Levinson(莱文森) The first boundary value problem for $\varepsilon\Delta u + A(x,y)u_x + B(x,y)u_y + C(x,y)u = D(x,y)$ for small ε，(关于方程 $\varepsilon\Delta u + A(x,y)u_x + B(x,y)u_y + C(x,y)u = D(x,y)$ 对于很小的 ε 的第一类边值问题) Ann. of Math.(数学年报) 51, No 2(1950), 428-445．

义下，满足边界条件①.

(15) 方程

$$y^m \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + c(x,y)u = 0 \qquad ⑩$$

在一个由 Ox 轴上的一段，和位于半平面 $y > 0$ 上的曲线 Γ 所围成的区域 G 内有唯一解，只要下列诸条件之一被满足：

(i) $m < 1$;

(ii) $m = 1$ 和 $a(x,0) < 1$;

(iii) $1 < m < 2$ 和 $a(x,0) \leqslant 0$;

(iv) $m \geqslant 2$ 和 $a(x,0) < 0$.

并且这个解在 $\overline{G}$ 上连续，它在边界上取 f 的函数值.（方程 ⑩ 的系数 a, b, c 假定都是充分光滑的函数）

曾有人发现，如果方程 ⑩ 满足下列条件之一：

(i) $m = 1$ 和 $a(x,0) \geqslant 1$;

(ii) $1 < m < 2$ 和 $a(x,0) > 0$;

(iii) $m \geqslant 2$ 和 $a(x,0) \geqslant 0$.

那么方程 ⑩ 在 $G + \Gamma$ 上的一个有界而且连续的解 $u(x,y)$，就唯一地由函数 $u(x,y)$ 在曲线 Γ 上的值所确定，即仅由在区域 G 的那部分边界上（在那里方程 ⑩ 是椭圆型的）的值所确定②. 当 $y = 0$ 时，方程 ⑩ 显然是抛物线型的.

关于方程 ⑩ 的其他的一些边值问题，特别是与椭圆型方程第二类边值问题的相类似的问题都已经有人研究过③.

---

① О.А.Олейник. Об уравнениях эллиптического типа с малым параметром при старших производных（关于最高阶导数具有很小参数作为系数的一类椭圆型方程），数学汇刊，31(73)：1(1952)，104-118；О краевых задачах для уравнений с малым параметром при старших производных（关于最高阶导数具有很小参数作为系数的一类方程的边值问题），苏联科学院报告，т.85，№ 3(1952).

② М.В.Келдыш. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области（关于椭圆型方程的区域边界上退化的某些情形），苏联科学院报告，77，№ 2(1951).

③ О.А.Олейник，Об уравнениях эллиптического типа，вырождающихся на границе области（关于在区域边界上退化的椭圆型方程），苏联科学院报告，87，№ 6(1952).

第七十九回　溯源头　有限长杆热传导①
齐民友　偏微算子讲从前

琼·博普蒂斯特·约瑟夫·傅里叶是19世纪法国数学家和数学物理学家.他的工作对数学和物理学产生了很大影响.在数学上,他迈出了19世纪第一大步,而且是真正极为重要的一步;在物理学方面,他的理论和方法几乎渗透到近代物理学的所有部门,支配了整个数学物理学的发展.开尔文勋爵威廉·汤姆森(Willium Thomso,1824—1907)称傅里叶关于热的工作影响了他在数学物理学方面的全部经历.

数学史专家拉维茨(J.R.Ravets)和格拉顿-吉尼斯(I.Grattun-Guinness)说:"由于人们仅仅只注意傅里叶级数和傅里叶积分这两个结果,并在评价它们的推导时使用了不合时代的严格性标准,所以长期把傅里叶的主要成就搞混了."我们最好把傅里叶的主要成就理解为这样两个方面:第一,把物理问题的公式化表示当做线性偏微分方程的边值问题来处理,这种处理使理论力学扩展到牛顿《原理》所规定的范围以外的领域;第二,他为这些方程的解所发明的强有力的数学工具产生了一系列派生物,并且提出了数学分析中那些激发了19世纪及其以后的许多第一流工作的问题.

1822年傅里叶发表了他的名著《热的解析理论》.自此,我们有了傅里叶级数、傅里叶积分,总之有了调和分析.它们在数学中几百年来一直充满着活力向前发展而且对数学以及其他科学发生了越来越大的影响.这样的数学分支不多,调和分析毫无疑问是一个例子(也许另一个例子是Lie群).傅里叶的著作的意义也远远超出了数学本身.

傅里叶在他的书里研究了有限长杆上的热传导方程的混合边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{1}{a^2}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\ u(t,0)=u(t,l)=0\\ u(0,x)=\varphi(x)\end{cases}$$

通过我们今天熟知的分离变量法将它的解写成了

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-(n\pi a/l)^2 t}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

这样他回答了18世纪围绕弦振动方程产生的一场争论:当时即已知道,弦振动方程的通解是$\varphi(x-ct)$,φ是任意函数,于是,什么叫任意函数?例如用两个式子在不同区间上定义的函数,如

① 本回引自文献[37].

$$\varphi(x) = \begin{cases} cx & ,0 \leqslant x \leqslant x_0 < l \\ cx_0 + A(x - x_0) & ,A = cx_0(x_0 - l)^{-1}, x_0 \leqslant x \leqslant l \end{cases}$$

算不算一个函数?而傅里叶的级数解告诉我们,刻画温度分布的函数,不论其形状如何,都同时可以用一个级数——或者说明其系数所成的序列$\{a_n\}$来表示,如果视n为自变量,并记为ξ,则$\{a_n\}$也可视为ξ的函数,但ξ限于取整数值.我们不妨记为$\hat{\varphi}(\xi)$,说明它与$\varphi(x)$有关.如果同一个物理过程可以用两个不同的式子或$\varphi(x)$或$\varphi(\xi)$来表示,则关于什么是一个函数的争论也就退居后位了.

傅里叶这本书的最后一部分讨论半无限长杆上的温度分布,得到了傅里叶积分,用我们今天的记号来写,即是

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-n}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x}\hat{\varphi}(\xi)d\xi \tag{①}$$

而

$$\hat{\varphi}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x}\varphi(x)dx \tag{②}$$

现在我们将此式,即由$\varphi(x)$到$\hat{\varphi}(\xi)$的变换称为傅里叶变换,而将前式称为逆变换.这样有了一种对偶:$\varphi \leftrightarrow \hat{\varphi}$.

多年来,傅里叶级数与傅里叶积分成了分析数学的核心之一,特别是现在称之为"硬分析"的那一部分.由它所带来的数学上的贡献有:黎曼积分、勒贝格积分,特别是集合论.从微分运算角度来看,由①有

$$\frac{1}{i}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x) = (2\pi)^{-n}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x}(\xi\hat{\varphi}(\xi))d\xi$$

即是说微分与乘法对偶.可见,对偶的概念比一般的对应乃至同构还要丰富,广义函数理论的基石也是对偶.但这是我们今天的理解.在当时,人们还只能知道"求导"也可以"看"成一种乘法.其实这是一个历史久远的思想.欧拉在研究常系数线性常微分方程时,就把它写作

$$\sum_{k=0}^{m}(a_k D^k)y = f(x) \tag{③}$$

而

$$y = f(x)/\sum_{k=0}^{m} a_k D^k \tag{④}$$

他可以对多项式$\sum_{k=0}^{m} a_k D^k$作因式分解,可以把$1/\sum_{k=0}^{m} a_k D^k$化为分项分式…….这一切我们在大学二年级课程中都已熟知,并称之为"形式解法",因为当时人们的理解确实是形式的.

20世纪20~30年代量子物理学的出现不但是科学史上而且是人类思想史

上的大革命.它的出现同时也开辟了数学上的新时期是毫无疑问的,至少,说全部经典的泛函分析都是由量子物理催生的,这不是过分之词.量子物理要求将经典的物理量量子化,即用算子(自伴的)来表示.例如 D_{x_j} 表示 x_j 方向的动量,这样,同一个物理状态可以用两种不同的方式来表示(称为表象):用 x 表示(坐标表象,x 表象)或用 ξ 表示(动量表象,ξ 表象).对偶的表象之互相转化可以用傅里叶变换来实现.所以,调和分析特别是傅里叶变换成了量子物理有效的数学工具.但在量子物理中,互相对偶的量不能同时准确地测量.如果 x 与 ξ 的测量分别有误差 $\Delta x,\Delta\xi$,则

$$\Delta x\Delta\xi \geqslant h/2\pi, h\text{ 是普朗克(Planck)常数}$$

这就叫"测不准原理".测不准关系与算子的不可变换性紧密相关.所以我们还需要将不可交换性引入调和分析.

以上所述可以说是微局部分析产生的数学和物理背景.但它作为一种系统的理论出现应该说是20世纪60年代中期的事,即以拟微分算子的出现为标志.拟微分算子的直接前身是济格蒙德、考尔德伦所建立的奇异积分算子理论.奇异积分算子理论是调和分析的重大发展,它一出现,就对解决偏微分方程的重大问题——柯西问题的唯一性作出了重大贡献.拟微分算子的出现又在椭圆算子的指标问题(阿蒂亚-辛格指标定理)的研究上起了重大作用.它归根结底是调和分析的新发展,而且确实考虑了不可交换性.微分方程的欧拉形式解法的根本局限如下.即方程的系数 a_k 是常数,所以 a_k 与 D^k 可以交换:$a_kD^k = D^ka_k$.但若 $a_k = a_k(x)$,则上式不成立.用现代的语言说即 $a_k(x)$ 与 D^k 的交换子"乘积"不为0

$$[a_k(x), D^k] \neq 0 \tag{5}$$

这时形式解法就无能为力了.所以,傅里叶变换可以用于讨论常系数偏微分方程,而对变系数方程 $\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)D^\alpha u = f$ 就需要用拟微分算子了.拟微分算子形状上就是推广的傅里叶变换

$$Au(x) = (2\pi)^{-n}\int e^{ix\xi}a(x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi \tag{6}$$

$a(x,\xi)$ 称为其象征.例如,对上述偏微分方程就有

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)\xi^\alpha = f \tag{7}$$

因此要建立算子作为一方、象征作为另一方的对应关系.适应量子物理的需要,算子的乘积应为不可交换的,与此相应,对象征需要建立一种不可交换的"乘法".又在求解③时,我们将微分算子的逆形式写为 $1/\sum_{k=0}^{m} a_kD^k$,现在要求 A 之"逆",则应考虑以 $[a(x,\xi)]^{-1}$ 为象征的拟微分算子.所有这些问题在拟微分算

济格蒙德(Zygmund, Antoni, 1900—),波兰-美国数学家,生于波兰华沙.

考尔德伦(Calderón, Alberto-Pedro, 1920—1998),美国数学家,生于阿根廷.

阿蒂亚(Atiyah, Michael Franas, 1929—),英国数学家,生于伦敦.

辛格(Singer, Isadore Manual, 1924—),美国数学家,生于底特律.

子理论中都得到了完满的解决.所以,微局部分析,特别是拟微分算子理论,不妨说是量子物理时代的调和分析.

微局部分析理论的出现告诉我们,过去我们是在 $\mathbf{R}^n$ 中的区域 Ω 上讨论偏微分方程,现在应该把 x 与 ξ 放在完全平等的地位,而在 $\Omega\times(\mathbf{R}^n\setminus 0)$ 上讨论它. $\mathbf{R}^n\setminus 0$ 是 ξ 的变化域. $\xi=0$ 总是应该排除的,这与 $\Omega\times(\mathbf{R}^n\setminus 0)$ 的几何构造大有关系,用现代语言来说,即 Ω 的余切丛除去零截面 $T^*\Omega\setminus 0$. 因此,可以说,微局部分析就是在 $T^*\Omega\setminus 0$ 上讨论偏微分算子,首先是它的代数演算.

惠更斯(Huygens Christiaan, 1629—1695),荷兰数学家、物理学家、天文学家,生于海牙,卒于同地.

在余切丛上讨论物理问题,在物理上很早就有先例.其一是光的波动学说中的惠更斯原理.这个原理简单地说,即光的传播有波前面,波前面的前方是光波影响未到之处,其后方则在光波的影响区域之内,波前的各点又成了新的光源,再产生次级波前.次级波前的包络面即下一个时刻的新波前.在这样的几何分析中,波前的法线(在现代数学的语言中应该说是余法线),起了很关键的作用.如果从某一点起沿波前面的法线追踪,即得到"射线".波前面的位置与波前面传播的方向是同样重要的,在这个意义上来说,惠更斯原理是一个微局部的原理;既要考虑波前面上各点的坐标 x,又要考虑该点处波前面的余法线向量 ξ.另一个例子是渐近解的问题.自从量子物理出现以来,即产生量子力学与经典力学的关系问题.物理学家很明白,若视 Planck 常数为一个小参数 ε,则当 $\varepsilon\to 0$ 时,量子力学就转化为经典力学.因此,将一个偏微分方程的解按小参数展开 —— 即所谓渐近展开,就成了数学物理中一个重要的方法.物理学家则称之为 WKB 方法,或几何光学近似、准经典近似等等.但是这种渐近展开时常只是局部有效.由局部性过渡到整体性有一种障碍,在光学中时常称为焦散现象. 20 世纪 60 年代中,前苏联数学家 V. P. Maslov 指出,这种障碍的出现是因为人们常局限于 x 表象.如果平等地采用 x 表象与 ξ 表象,或者用混合表象(一部分变元仍为 x,另一部分为 ξ),则问题自然解决.其后的傅里叶积分算子理论,也可以说是这个思想的展开.这种思想发展至今已成了一个重要的数学分支:半经典(或准经典)分析.

这些在物理上非常明确的思想在数学上一直到 20 世纪 60 ~ 70 年代才形成完整的数学理论,这与数学工具的发展有密切的关系,上面说过拟微分算子的直接前身是济格蒙德和他的学生考尔德伦所领导的学派,在 20 世纪 50 年代关于奇异积分算子的研究.关于准经典近似的工作则必须回到关于解析力学的近代表述,特别是辛几何理论以及相关的拓扑学的研究.还应该指出,日本数学家佐藤干夫关于超函数理论的研究,以及他所创立的学派所建立的代数分析学,是在实解析函数框架下的微局部分析,它广泛地应用了代数学的最新的发展,正因为微局部分析继承和发展了这样多数学分支的成果,所以有时给人以望而生畏的感觉.

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2}=0$$

总之,微局部分析不只是偏微分方程的一个分支,而是它发展至今的一种观点、一种思想、一种方法.有许多最新的研究工作,尽管没有说自己就是微局部分析,但实际上都恰好表现了这种观点、思想和方法.它的出现至少使整个线性偏微分方程理论改变了面貌.这方面最完整的概括是 L. Hörmander 的四卷本巨著《The analysis of partial differential equations》Ⅰ Ⅱ Ⅲ Ⅳ 卷(springer-Verlag, 1985).

齐民友教授所著的《线性偏微分算子引论》((上册).北京:科学出版社,1984)的序言中曾说过:"这个领域还在迅速发展,看不出有停下来或者放慢步伐的迹象,例如,正当我们用了很大力量来掌握微局部分析时,它却已被人称为'70年代算法',而到了80年代中期的现在,它又发展到新的水平."现在可以说,微局部分析已经成熟了.如果说在20世纪70年代,还需要建立框架,现在则是需要解决新的具体问题.这样,一方面我们会感到它比较容易掌握了.另一方面则新问题层出不穷.从目前看,越来越多地与应用数学和其他科学,如物理和力学结合,是一个明显的趋势,我们建议,读者若有可能翻阅一下1990年在日本京都召开的国际数学家大会的文集,特别注意 R. Melrose, M. Taylor, A. Majda, P. L. Lions, L. Tartar 等人的报告,若能浏览一下法国 Ecole Polytechnique 的讨论班每年一册的文集和每年一度的 Saint Jean de Mont 会议的论文集,就会对当代偏微分方程理论的这种观点、思想和方法发展的现况有深刻的印象了.

正因为微局部分析还在迅速发展之中,所以我们不可能涉及很多方面,而只挑选了两个问题进行介绍,首先是非线性微局部分析.非线性偏微分方程解具有线性方程所没有的奇性,这一点首先是黎曼指出的,他在1860年研究有限振幅的声波的传播时,第一次提出了"激波"这一名词.激波是一种强奇性,但甚至在弱奇性范围内,无论是从几何角度或从分析角度来看,非线性问题都表现出更为丰富的内容.近年来的事实表明,微局部分析用于非线性偏微分方程是卓有成效的.首先需要提出研究的框架,这就是 Sobolev 空间,而所谓奇性即是指解 u 是属于某个 Sobolev 空间 $H^s_{loc}(\mathbf{R}^n)$ 的广义函数,而 s 比较小.但是 Sobolev 空间之元均为 $\mathscr{S}'$ 广义函数,它的奇性可以通过傅里叶变换表现出来,即 x 域中的非光滑性的点(不妨称为"坏"点,其集合即奇支集 sing supp u),可以用 ξ 域中 $\hat{u}(\xi)$ 的增长性(即缺少急减性质)来刻画,而急减性质的破坏发生在某些我们称之为"坏"的方向上.把"坏"点与"坏"方向结合起来,就得到很重要的波前集的概念.把这种作法与惠更斯原理作一个比较是很有趣的.在讨论非线性偏微分方程解的奇性时,还不能只停留在波前集的一般概念上,而要着重研究这样一类解,它们是某个 Sobolev 空间的元素 u,而且有一个确定的子流形,使 u 在该流形的切向上相对地比较光滑,奇异性则发生在它的余法线方向上.这种广义函数称为余法分布,其奇性相应地称为余法奇性,这个概念的物理

背景是显而易见的.

为了处理这类问题,拟微分算子理论需要进一步发展.一个途径是研究只有有限光滑性(而不是 C^∞)的象征.另一个则是 J.M.Bony 提出的仿微分算子理论.产生困难的根源仍在广义函数的奇性.以最简单的非线性运算乘法为例,两个广义函数 u_1, u_2 一般不能相乘,就是因为各个因子的奇性导致的,因此只要对其波前集作一定的限制,就可以合理地定义其乘积.但现在我们可以更有系统地处理非线性运算.我们可以在 ξ 域中将 u_1 与 u_2 之奇性分离出来,并对其较"好"的成分进行运算.这种将 ξ 域中的奇性分离出来的方法早在 20 世纪 30 年代利特尔伍德与佩利的工作中即已提供了.利用这个工具,J.M.Bony 和他的学生们建立了仿乘积、仿复合,以及一般的仿微分算子理论.同时还适应边值问题研究的需要,建立了对某一子流形的切向的仿微分算子理论.

利特尔伍德 (LittleWood, John Edensor, 1885—1977),英国数学家.

佩利 (Paley, Raymon E.A.C., 1907—1933),美国数学家.

赫尔曼德 (Hörmander, Lars Valtter, 1931—),瑞典数学家,生于隆德.

与线性方程情况不同,非线性奇性在相互作用下会产生新的奇性.举例来说,讨论一个双曲型方程的两解 u_1 与 u_2,它们在 (x_1, ξ_1) 与 (x_2, ξ_2) 附近微局部地属于 H^{σ_1} 与 H^{σ_2},这些奇性将沿过 $(x_j, \xi_j), j = 1,2$ 的次特征传播,而可能在 (x_0, ξ) 相遇.在相遇后这两个奇性很可能并不相消,而在该点附近成为微局部的 σ 阶奇性,而

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 - \frac{n}{2}$$

若 (x_0, ξ) 恰好又是特征点,则这个 H^σ 奇性将沿着过 (x_0, ξ) 的次特征传播,这样解就出现了新的奇性.这个领域中至今仍存在大量未解决的问题.

从微局部分析观点来论述非线性问题的,可以参看赫尔曼德 1986 年 ~ 1987 年在 Lund 大学的一个讲义,对非线性双曲型方程近年来许多重要工作做出了新的概括.还可以看 M.Taylor 的有关著作,这本书论述的范围则超过了赫尔曼德的讲义.

第二个问题是关于椭圆性问题.在整个偏微分方程理论中,椭圆型方程(线性和非线性的)理论是发展得最好的.自 20 世纪 50 年代末,开始了退化椭圆方程的研究.这是由于不论在物理、力学或其他数学分支(复分析和微分几何)中都出现了重要的退化椭圆算子.其中一个重要的例子是赫尔曼德的平方和算子

$$A = \sum_{j=1}^{m} X_j^2(x) + X_0(x) + C(x) \qquad ⑧$$

这里 $X_0, X_1, \cdots, X_m$ 是 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 上的实的 C^∞ 向量场.这类算子不但包含了椭圆算子,还包括抛物型算子.赫尔曼德的经典结果表明:当 $X_0, X_1, \cdots, X_m$ 满足所谓赫尔曼德条件时,A 是亚椭圆算子.其中就有不少退化的椭圆算子.例如

$$X_j = \partial_{x_j}, 1 \leqslant j \leqslant n-1, X_n = x_1 \partial_{x_n}$$

它们是满足赫尔曼德条件的.但 $\sum_{j=1}^{n} X_j^2(x) = \partial_{x_1}^2 + \cdots + \partial_{x_n}^2 + x_1^2 \partial_{x_n}^2$ 是一个具有

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2} = 0$$

很强退化性质的退化椭圆算子.

赫尔曼德指出,这种算子是次椭圆(Sub-elliptic)算子,说 m 阶算子 L 是一个次椭圆算子,即对它有以下的所谓次椭圆估计成立

$$\| u \|_{m-\varepsilon} \leqslant C_1 \| Lu \|_0 + C_2 \| u \|_0$$
$$u \in C_0^{\infty}(\Omega), 0 < \varepsilon < 1 \qquad ⑨$$

即发生光滑性的损失.如果 L 是椭圆算子,则式⑨对 $\varepsilon = 0$ 成立.式⑨这种估计(在不同空间中)是研究椭圆方程的基本工具,最早的是绍德尔估计.现在的问题是,若算子 L 适合式⑨而 $\varepsilon = 0$,L 是否一定是椭圆算子?答案是肯定的.

次椭圆算子是一个很重要的类别,可以说它是仅次于椭圆算子的一大类.因此,自然想把它推广到非线性情况上,如果 A 是拟线性的,即有

$$Au = \sum_{i,j=1}^{m} A_{ij}(x, u, Xu) X_i X_j u + B(x, u, Xu) = 0$$

则我们可以用 Bony 的仿微分算子将它线性化.如果经过仿线性化后的方程适合赫尔曼德条件,则 A 仍然是亚椭圆算子.

退化椭圆算子的研究需要对拟微分算子作一个推广,就是应用另一种算子演算(后来赫尔曼德称之为外尔演算).定义拟微分算子形如

$$a^w(x, D)u = (2\pi)^{-n} \iint e^{i(x-y)\xi} a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y) \mathrm{d}y \mathrm{d}\xi$$

提出这种算子是为了量子力学的需要,因为它对 x 与 y 有明显的对称性,如果 $a(\cdot, \xi)$ 是实值函数,则 $a^w(x, D)$ 将是自伴算子,这当然使它在量子力学上特别方便,因为量子化的物理量都应该用自伴算子来表现.它还有许多其他的优点,例如利用它来求逆,将可得到准确逆而非拟逆等等.

J. M. Bony 与 N. Lerner 在非线性微局部分析中引入外尔演算,是为了提出二次微局部化(以至高次微局部化)理论.但是我们可以从另一个角度来看待它,即可发现它对退化椭圆算子乃至次椭圆性的研究是很有好处的.为此,我们重新来看赫尔曼德的象征类 $S_{1,0}^m$,其中的元适合估计式

$$| \partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x, \xi) | \leqslant C(1 + |\xi|)^{m-|\alpha|} \text{ 或 } \leqslant C((1 + |\xi|^2)^{1/2})^{m-|\alpha|}$$

左方的向量场 $\{\partial_x, \partial_\xi\}$ 构成 $T(T^*\Omega)$ 的一个"典则"的基底,与它对偶的 $T^*\Omega$ 上的度量是

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{d}x_i^2 + \mathrm{d}\xi_i^2)$$

这是欧几里得度量.如果我们改用另一个度量

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{d}x_i^2 + \mathrm{d}\xi_i^2 / (1 + |\xi|^2))$$

则与它对偶的向量场是

$$|\partial_x, \partial'_\xi| = |\partial_x, (1+|\xi|^2)^{1/2}\partial_\xi|$$

如果用这样的向量场，则 $S^m_{1,0}$ 的基本估计式成为

$$|\partial_x^\beta \partial'^\alpha_\xi a(x,\xi)| \leqslant C(1+|\xi|^2)^{m/2}$$

同样，$S^m_{\rho,\delta}$ 类相应于度量

$$ds^2 = \sum_{i=1}^n ((1+|\xi|^2)^\delta dx_i^2 + (1+|\xi|^2)^{-\rho} d\xi_i^2)$$

我们要注意，$|\xi|^2$ 是一个最典型的椭圆算子 —— 拉普拉斯算子 Δ 的象征. 从几何上看拉普拉斯算子的特点是：对点 x 的均匀性 以及各向同性，我们称为齐性(Homogeneity) 而与齐次函数的齐次相区别. 实际上，一致椭圆的二阶偏微分算子

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x)\partial_{x_i} + c(x)$$

即是系数充分规则，且存在两个正常数 $c>0$ 与 $C>0$ 使

$$c|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant C|\xi|^2$$

成立的算子，这个定义也是以拉普拉斯算子的象征 $|\xi|$ 为标准的.

进一步我们看到 Sobolev 空间的定义也是以拉普拉斯算子为基础的.

但是，退化的椭圆算子所对应的度量恰好是非齐性的(Nonhomogeneous). 所以，研究退化椭圆算子的一个途径就是找到一个适用的度量，并且应用外尔演算，对于

$$p(x,D) = D_{x_1}^2 + x_1^{2k} D_{x_2}^2$$

相应的度量就是

$$ds^2 = M^{-1/k}(x,\xi)\langle\xi\rangle^{2/\xi}dx_1^2 + dx_2^2 + M^{-1/k}(x,\xi)\langle\xi\rangle^{-2\delta(1-1/k)}d\xi_1^2 + \langle\xi\rangle^{-2}d\xi_2^2$$

其中

$$\langle\xi\rangle^2 = 1+|\xi|^2, M(x,\xi) = \xi_1^2 + x_1^{2k}\xi_2^2 + \langle\xi\rangle^{2\delta}, \delta = (1+k)^{-1}$$

这样，次椭圆性的研究涉及一种新的几何. 其实，很早就有人看到了这一点，例如，A. Nagel(纳格尔)，E. M. Stein(斯坦) 和 S. Wainger，我们不妨说将会有一种新的“次椭圆几何”，这当然都要等待今后的研究工作.

附带还要提到，R. Melrose 曾从几何角度讨论过一般的边值问题，而与外尔演算不同，后者需要的是余切丛上的度量.

至此，我们再回到引言开始时所说的“70 年代算法” 问题，这是费弗曼说的. 这是一篇很重要的文章，主旨是讨论如何在余切丛 $T^*\Omega\setminus 0$ 中局部化，并用以将一个一般的拟微分算子对角化，由此解决了许多重要问题. 若与利特尔伍德－佩利比较，则 L-P 只是在 ξ 域中局部化. 同时在 x 域和 ξ 域中局部化是不可能的，因为这与量子物理的根本原理“测不准原理” 矛盾. 外尔演算中也会提到

费弗曼 (Fefferman, charles, 1949—)，美国数学家，生于华盛顿.

测不准原理，还应该提到现在引起人们极大关注的小波理论也是围绕着这个思想而来的，也可以说是一种“微局部”理论．这样说来，“70 年代算法”应该是指微局部分析的初创时期形成的理论，我们不妨称之为“经典的微局部分析”，后来的发展不妨称为“精密的微局部分析”(Analyse microlocale precis)．

第八十四回　世纪初　希尔伯特指方向
回头看　谁言庞氏颓废派

1900 年在第二届国际数学家大会上，如日中天的德国数学家希尔伯特提出了著名的"23 个数学问题"，此后它成为了二十世纪的数学研究的路标，我们感兴趣的是下面的几个问题.

一、希尔伯特的第 19 和第 20 问题与椭圆偏微分方程理论

"我认为，在解析函数理论基础中，最值得注意的情况之一是存在着这样的偏微分方程，它们的所有积分必为其本身的独立变量的解析函数；简言之，这些方程只允许有解析解."—— 第 19 问题用这些话作为开始.

希尔伯特继续说："这类偏微分方程中最著名的就是位势方程

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

以及皮卡所研究过的某些微分方程，此外，还有微分方程

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^f$$

极小曲面的偏微分方程和其他微分方程. 类似的微分方程都具有一个共同的特性，即它们都是某类变分问题也就是下列变分问题的拉格朗日微分方程

$$\iint F(p,q,z;x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \min\left(p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

F 是一解析函数，对于所讨论范围内变量的一切值，满足不等式

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q}\right)^2 > 0$$

我们将这类问题称为正则变分问题. 在几何学、力学和数学物理中起一定作用的变分问题主要就是正则变分问题. 很自然就会提出这样的问题：正则变分问题的所有解是否一定是解析函数，即是否每一个正则变分问题的拉格朗日偏微分方程都具有这样的性质：它们只允许有解析积分？并且当函数受到限制，例如像在位势函数迪利克雷问题中那样取连续的但非解析的边界值时，情形是否仍然是这样呢？"

第 20 问题与第 19 问题紧密相连，希尔伯特用以下方式提出："每个正则变分问题是否总有一个解，假定所给定边界条件满足某些假设，例如，在这些边界条件中，有函数的连续性和分段的一定阶数的可微性，并且如果必要的话，假定

解的概念可适当地被加以推广."

从现代偏微分方程理论所面临的问题中,希尔伯特选择了两个椭圆型方程的理论问题.

为了评述这种选择,就得在那个时期的偏微分方程理论上花费一些笔墨.

在19世纪,有两类问题和两类理论 —— 要是现在我们就会把它们都划归到偏微分方程理论中 —— 是有区别的:偏微分方程的一般解析论和数学物理方程论.就像叶戈洛夫在自己硕士论文的前言中写的那样:"由于求已知方程的积分问题的提法的原则区别:根据它是独立的还是由物理问题确定的方程,二阶偏微分方程的一般解析论有别于数学物理.的确,所有的物理问题都会导出一个不仅是满足偏微分而且还有初始和边界条件的方程,在这些条件下,问题可以完全确定;求解函数可以用那样或者这样的方法(级数展开、定积分)求出,而且在它的表达式中不含任何自由量.与此同时,既然确定仅仅满足已知偏微分方程的函数是我们的任务,那么,在这个函数的表达式中必须含有一些自由量,并且要求确定通解的自由量的阶次,同时尽可能地确定这个解本身."

那样的区别是大家公认的,并且还保持到了20世纪的第一个10年,在德国的数学百科全书中,有特定的著作、特定的文章都提到过这两种理论.但是一般情况渐渐发生了变化.

杜布瓦 - 雷蒙(Du Bois - Reymond, Paul David Gustav, 1831.12.2—1889.4.7),德国数学家.生于柏林,卒于弗赖堡.

还在1864年,杜布瓦 - 雷蒙就写到:"如果通积分是理解为包含所有特别积分的解析表达式,那么,我认为,一般来说,不存在那样的解析表达式 …… 相反,偏微分方程就得与边界值一起作为一个整体而不能分割开来研究."

自从1889年杜布瓦 - 雷蒙给出了现在普遍公认的按椭圆型、抛物线型和双曲线型进行的方程分类之后,偏微分方程新的一般理论 —— 对于那些类型(以及混合型)的方程的边界值理论 —— 建立起来了.皮卡是新方法的奠基人之一,我们可以清楚地从往事回顾中辨别出来这一过程的变化,但是在19世纪末至20世纪初并没有看清.因此,伯恩斯坦回忆起1913年在哈尔科夫市论文答辩会上自己的发言:"偏微分方程理论中解析方向是不久前确立的.还在7年前,已经去世的科尔金在与我的谈话中轻视地评论庞加莱的'颓废派'研究.但是由于新思想日复一日的卓越成就,它们的成效和生命力毋庸怀疑,并且现在谁也不会去反对它,有限积分理论失去了独立的意义,而成为微分方程的迅速发展的一般或解析理论的一部分."成为一个部分,我们要跟着伯恩斯坦重复这句话,我们自己还要补充:这一部分逐渐成为一种过渡,直到最近它开始又进入数学研究的最前沿.

当然不奇怪,受希尔伯特影响的年轻数学家们正确地捕捉到了偏微分方程理论发展的现代趋势,从希尔伯特问题中选择了那个属于新"颓废"问题的分支.最令人惊奇的是问题本身选择的准确性.因为第19和第20这些问题是极有

前景的问题.显然,沿着偏微分方程理论领域中大专家们的指引,他们确定了20世纪拟线性椭圆方程理论发展的基本道路.

希尔伯特所选问题 的顺序本身是出色的.如果开始就提出椭圆方程边界值问题解的存在性问题(第20个问题),然后,再提出关于这个解的光滑性问题(第19个问题),就显得更逻辑.希尔伯特选择的顺序指明,问题的提出使解的先验性质脱离了它们的存在性问题,那样的方法显示出了今后的巨大的成效并且最终产生现代先验估计理论,这种先验估计理论包括允许从解的一些法规的先验估计的存在中得出了关于解本身的存在性结论.希尔伯特的第20个问题的现代提法就是这样:如果边值问题的所有可能解的随便什么样的弱范数具有先验的有限性(例如,它们的模数的极大值),则也具有可解性.

对于椭圆方程边值问题解的存在性问题的提法也是出色的,希尔伯特说的不是经典解,而是广义解(如果在必要的情况下使解本身的概念具有广义的解释),广义解的概念还未曾引进到数学中.在解的概念推广的可能性上,希尔伯特所做的是数学史上初创性的(如果不是第一个!),虽然,事实上那种解出现得更早一些.当研究以弦的初步形式给出的函数时,欧拉研究了任意的连续函数(按照他的术语叫"间断的"),就其实质说,是研究了广义解.实际上,1851年,黎曼在他自己的著名的学位论文《单复变量函数的一般理论基础》中研究了拉普拉斯方程的广义解.已经很有意义的是,作为一个新的数学概念,博歇(Bôcher)(1905 ~ 1906)、埃文斯(G.C.Evans)(1920)、维纳(N.Wiener)(1926 ~ 1927)、弗里德里希斯(K.Friedrichs)(1934)、勒雷(J.Leray)(1934)、索博列夫(1935 ~ 1936)都应用了广义解.

希尔伯特以第19和20问题提出了一些研究椭圆偏微分方程的程序.在这种情况下,如果第20问题看做完全是传统的、是证明充分一般形式的方程的边值问题解的存在性定理的话(只有对解本身分类说明是广义解,是非传统的),那么,第19问题就看做是一个假设.让我们试着从希尔伯特提出问题的前提出发去理解.

二、第19问题的前提

在20世纪初以前,研究非线性的椭圆型方程刚刚开始.除了有一些方程

$$\Delta u = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

的结果之外,可以列出的只有为数不多的、具体的非线性方程的研究工作,例如,有关方程 $\Delta u = e^u$ 在皮卡、庞加莱的工作中.因此,为了像第19问题那样以很强的统一性提出问题,对希尔伯特来说,能够成为出发点的前提的问题是特别有趣的问题.

还在大会召开前的一段时间，希尔伯特就开始从事与迪利克雷原理有关的问题研究，我们来回忆一个他在1899年德国数学会会议上的报告，在报告中他开始进行第一个尝试："回到迪利克雷原则的实际中."因而，第19和20问题是希尔伯特对椭圆型方程解的性质思考的总结.

关于由第19问题的内容所组成的假设，在它提出之前，就有了一些结果，这些结果是希尔伯特提出第19问题的基础.那时已经认识到了许多方程解的解析性，希尔伯特本人在报告中提到了一些那样的方程.

从其他希尔伯特熟悉的结果中，也使我们注意到以下情况.

在1890年，皮卡在工作中指出，在 x,y 平面的区域 D 上研究方程 $\Delta u = F(u,x,y)$，如果这时 D 上的函数 $F(u,x,y)$ 具有直到 $(n-1)$ 阶的偏导数，那么，这个方程的解 u 同样可以微分 n 次.当 F 是解析函数时，那么解可微分无穷次.产生了一个命题，采用皮卡运用过的连续的逼近方法，就可以证明解 u 的解析性.至少，佐默费尔德也在自己的综述性的论文中那样写到："显然，这种证明方法可以充分证明解 u 的解析性质."当希尔伯特在自己的学生吕特克梅耶尔(G. Lütkemeyer)面前，对更一般的方程

佐默费尔德(Sommerfeld, Arnold Johannes Wilhelm, 1868—1951)，德国物理学家、数学家.生于柯尼斯堡，卒于慕尼黑.

$$\Delta u = F(u_x, u_y, u, x, y)$$

提出解析问题时，大概也那样认为.此学生后来成功地解决了这个问题.

除此之外，希尔伯特的想法具有哲学特征，关于这一点后来伯恩斯坦回忆道："当我问起希尔伯特，被我后来证明的'正则变分问题的所有解是解析的'这一命题，他提出这问题的根据是什么.这位著名的几何学家回答说，他认为，所有自然而然地提炼的问题，其解应该是解析的."

这样一来，关于包含在第19问题中假设的提出，希尔伯特遵循了在这个直觉经验(数学的和哲学的)基础上的个人体验，最后，依据了对有关问题的数学文献的透彻理解，即共同的综合体验.

三、第19和第20问题与20世纪的数学

我们已经提到，希尔伯特的第19和20问题确立了20世纪拟线性椭圆微分方程所有理论发展方向的基础.这个领域是100年来最活跃和最富研究成效的数学分支之一.德国和美国的数学家(希尔伯特的学生——霍普夫(E. Hopf)、诺伊格鲍尔(O. Neugebauer)、莫里(C. Morrey))，前苏联学派(伯恩斯坦、彼得罗夫斯基、拉德热斯卡娅)和意大利学派(托内里(L. Tonelli)、乔吉(de Giorgi E)、朱斯提(E. Guisti)、米拉达(M. Miranda))都积极地参与了这一研究.这一段研究的历史需要大量的书籍，我们在这里只谈它的一些基本事件之概括.

在1903年，伯恩斯坦就给出了第19问题的第一个解答，他解决了具有三次连续可微解 $u \in \mathbf{C}^3(\Omega)$ 的情况.

后来这一结果又得到改进和推广，逐渐将其解的先验的光滑性降低到 C^2：$u \in C^2(\Omega)$（诺伊格鲍尔，1953）. 其结果推广到多变量的情况（霍普夫，1931）和椭圆型方程组中（彼得罗夫斯基，1937）.

关于第 20 问题，对于拟线性椭圆微分方程的边界问题，情况如下：如果已有解的一些弱范数的先验估计，那么由此就可以推出这个问题的可解性. 有关它的解答与伯恩斯坦、托内里、莫里的名字相连.

如果谈到正则变分问题研究的关于第 19 问题的结果，那么先验的光滑性对于它已经成功地降到 C^1（莫里，1954）.

于是，正则变分问题解的存在性定理（第 20 问题）中达到的解的光滑性与那种解的解析性所要求的先验光滑性之间产生了缝隙. 在第 19 与第 20 问题的结论的结合处，产生了新的问题. 对于形如 $\int_{\Omega} f(u_x)\,\mathrm{d}x$ 的正则泛函，乔吉在 1957 年得到了那样的结果. 1960 年，拉德热斯卡娅和乌拉丽采娃将这个结论推广到多维泛函上.

最后，在 1968 年，莫里证明多维情形下任意次椭圆型方程解析系统的广义解在存在域上任意点的邻域除去由零维闭集组成的点之外是解析的. 在乔吉、朱斯提、米拉达、玛兹亚几乎同时构造的实例中可以看出，在一定意义下，莫里的结果不能改进，因此第 19 与 20 问题的结论不能统一.

从我们对与第 19 和 20 问题的解决有关结论的（不得不很表面的）概述中很容易看出，希尔伯特正确地猜到了（或者说是比较好地预测到了）20 世纪分析的重要分支之一——可以并入 20 世纪数学发展巨大成就之列的拟线性椭圆偏微分方程理论——发展的基本方向. 他们所选择问题的顺序将方程解的先验性质引到重要位置. "解的概念大大地拓广"，这是 100 年以来方程理论中的主要进展之一.

仅仅局限在两个独立变量的情况下的表达应该看成是这些希尔伯特问题提法上的缺陷. 19 世纪末数学家（显然包括希尔伯特）认为，将得到的结果过渡到多变量的状况仅仅是一个技术问题，但是，后来的事实说明完全不是那么回事.

附

录

第八十一回　搞类比　微分方程变积分
再拓广　奇异取代非奇异

经典迪利克雷问题是关于微分方程的边值问题，数学家的思维特点是推广，所以在积分方程中也提出类似问题，并且还推广到了奇异情形．N.I. Muskhelishvil 在 1946 年所著的《奇异积分方程》(Singular Integral equations)是这方面的代表著作，下面是它的节选．

这本书的获取颇费周折．由于年代较早所以难以找到，最后编者在新西兰的一个旧书店找到了它．为此编者专程跑了三趟．前两趟由于是法定假日——闭店，第三次才获此至宝．6 年前在同一店编者还找到了《保罗·图兰文集》，颇有戏剧性．因为那毕竟是一个仅有 417 万人口的农牧业小国．

THE DIRICHLET PROBLEM

§ 1. Statement of the Dirichlet and the modified Dirichlet problems. Uniqueness theorems

Let S^+ be a connected region, bounded by simple smooth nonintersecting contours $L_0, L_1, \ldots, L_p$ the first of which contains all the others. By L will be understood the union of these contours; as usual, the positive direction on L will be taken such that S^+ remains on the left. The contour L_0 may be absent in which case S^+ is infinite. The union of the finite regions $S_1^-, \ldots, S_p^-$, contained in $L_1, \ldots, L_p$ respectively, and (in the presence of L_0) the infinite region S_0^-, consisting of the points outside L_0, will be denoted by S^-.

The following condition will also be imposed on the contours $L_0, \ldots, L_p$: the angle between the tangent to L_j and some constant direction satisfies the H condition.

The classical Dirichlet problem for the region S^+ will be formulated as follows.

A. THE DIRICHLET PROBLEM: *To find the (real) function $u(x,y)$, harmonic in S^+, continuous in $S^+ + L$ and satisfying the boundary condition*

$$u = f(t) \text{ on } L \qquad ①$$

where $f(t)$ is a (real) continuous function given on L; in the case in which S^+ is in finite, $u(x,y)$ is also required to be bounded at infinity.

The last condition regarding the boundedness of u at infinity is equivalent to the condition that u tends to a certain limit as z tends to infinity.

It will be recalled that every function $u(x,y)$, harmonic outside the circle $|z| > R_0$ and bounded at infinity, may be developed for $|z| > R_0$ into a series

$$u(x,y) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), z = re^{i\theta}$$

which is absolutely and uniformly convergent outside any circle of radius $R > R_0$. Therefore $u \to a_0$ as $r \to \infty$.

B. THE MODIFIED DIRICHLET PROBLEM: *To find the function $u(x,y)$, harmonic in S^+, continuous in $S^+ + L$ and satisfying the follwing conditions:*

1°. *The function $u(x,y)$ is the real part of some function $\Phi(z)$, holomorphic in S^+.*

2°. *It satisfies the boundary condition*

$$u = f(t) + a(t) \text{ on } L \qquad ②$$

where $f(t)$ is a (real) continuous function given on L and

$$a(t) = a_j \text{ on } L_j, j = 0, 1, \cdots, p \qquad ③$$

where the a_j are real constants which have to be determinel; in the case of the infinite region the condition $u = f + a_0$ on L_0 is replaced by the condition that $u(x,y)$ is bounded at infinity.

It will be shown later that the constants a_j are uniquely defined by the conditions of the problem provided one of them is, fixed (arbitrarily). In the sequel, unless stated otherwise, a_0 will be assumed equal to zero (in the absence of L_0 this will be replaced by $u = 0$ at infinity).

The case in which L is a single contour win be considered separately. Here two cases must be distinguished:

a) $p = 0$. Then S^+ is a finite part of the plane bounded by L_0.

b) p = 1, and the contour L_0 is absent. Then S^+ is an infinite part of the plane

bounded by L_1.

Obviously the problems A and B coincide in the case a) (if one assumes $a_0 = 0$). In the case b) these problems lead directly to each other; e.g. if $u(x, y)$ is the solution of B (vanishing at infinity), then $u(x, y) - a_1$ will be the solution of A.

Next, the general case of arbitrary p will be considered. The difference between the problems A and B, i.e., between the classical and modified Dirichlet problems is as follows:

If $u(x, y)$ is the solution of A, then the function v, conjugate complex to u, may be found to be (and in general will be) multivalued. The condition 1° in the statement of the problem B excludes this possibility and hence restricts the class of unknown harmonic functions; but, on the other hand, the condition 2° of Problem B requires only that u takes on the L_j values, given apart from additive constant terms.

Each of the problems A and B cannot have more than one solution (if it is agreed to put $a_0 = 0$ in B; instead of $a_0 = 0$, one can also take $a_k = 0$, where a_k is one of the constants $a_1, a_2, \cdots, a_p$). In the case of the problem A this propoeition leads to the result that a function, harmonic in S^+, continuous in $S^+ + L$ and zero on L, is zero throughout the region. The last result follows from the well known theorem that a harmonic function which is not constant attains its maximum and minimum values only on the boundary of a region. [The case in which the region is infinite, i.e., in which L_0 is absent, is reduced to the finite case by means of a simple inversion].

Next, the proof will be given of the same proposition for Problem B. In this case the statement is as follows:

If the function $u(x, y)$, harmonic in S^+ and continuous in $S^+ + L$, is the real part of $\Phi(z) = u + iv$, holomorphic in S^+, and if $u(x, y)$ takes the constant values a_j on L_j and if $a_0 = 0$, then necessarily $u = 0, a_1 = a_2 = \ldots = a_p = 0$ (if S is infinite, the condition $a_0 = 0$ is replaced by the condition $u = 0$ at infinity).

The idea of the proof given here is taken from J. Plemelj' book [3]. Another simple proof will be outlined before proceeding to the above-mentioned proof. From a well known theorem

$$\int_L u \frac{\partial u}{\partial n} ds = \iint_{S^+} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

(still assuming S^+ to be a finite region), where n is the outward normal. But the left side of this equation is zero, since

$$\int_L u \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int_L u \frac{\partial v}{\partial s} ds = \sum_{j=0}^{p} a_j \int_{L_j} dv = 0$$

as, by supposition, v is single-valued. Consequently, from the first of the above equations, u = const. in S^+. But $u = 0$ on L_0, hence $u = 0$ is S^+. Similarly for the case of an infinite region. However, this proof is not complete, as the assumption of the existence of $\frac{\partial u}{\partial n}, \frac{\partial v}{\partial s}$ and the relation $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial s}$ on L (which does really hold under the assumed conditions) require justification.

Assume S^+ to be finite and denote by a_m the least of the constants $a_0, a_1, \ldots, a_p$ (if there are several of these constants, choose any one of them). Assume that $u(x, y)$ is not constant in S^+. Since $u = a_m$ on L_m, a_m is the minimum value of u in $S^+ + L$. Consequently $u > a_m$ everywhere in S^+, for, by assumption, the function u is not constant. Therefore, as is easily seen, one can always construct in S^+ two smooth contours L'_m, L''_m, near L_m on which $u(x, y)$ assumes the constant values $a_m + \varepsilon', a_m + \varepsilon''$, $0 < \varepsilon' < \varepsilon''$.

For this purpose, take on the (with respect to S^+) inward normal to L_m at t a segment tM of a sufficiently small constant length δ such that it lies entirely in S^+ for every t on L. When t describes L_m, the point M describes a continuous closed curve (the curve may intersect itself, but this is not important). Clearly on all these curves $u \geqq a_m + \varepsilon_0$, where ε_0 is some positive constant. Therefore, if the numbers ε_1 and ε_2 are chosen such that $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_0$, points t_1 and t_2 can be found on tM at which $u(x, y)$ takes the values $a_m + \varepsilon_1$ and $a_m + \varepsilon_2$. When t moves along L_m, the points t_1 an t_2 describe continuous closed curves $L_m^{(1)}$ and $L_m^{(2)}$. These curves have no points in common, since u assumes different values along them. Further, neither of these curves intersects itself, because, if, for example, $L_m^{(1)}$ formed a loop, then the harmonic function u, having the constant value $a_m + \varepsilon_1$ on the loop, would be constant throughout the region bounded by it, and hence constant throughout S^+. The curves $L_m^{(1)}$ and $L_m^{(2)}$, satisfying conditions of the form $u(x, y)$ = const, can only have a finite number of singular points, i.e, points at which $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$. In fact, at such points $\Phi'(z) = 0$, but the number of zeros of the functions $\Phi'(z)$, holomorphic in S^+, lying at finite distances from the boundaries of S^+, is finite, because $\Phi'(z)$ is not identically zero (otherwise one would have: $\Phi(z)$ = const. in S^+). Consequently, since $u(x, y)$ is analytic, $L_m^{(1)}$ and $L_m^{(2)}$ consist of a finite number of arcs of analytic curves. The contours $L_m^{(1)}$ and $L_m^{(2)}$ bound some annular region Σ entirely in S^+. The number of points z_j in Σ, where $\Phi'(z) = 0$, is finite. On the other hand, if ε is any number such that $\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2$, one can similary construct a contour L_m^0, entirely in Σ, such that $u = a_m + \varepsilon$ on L_m^0. Since

there is only a finite number of points z_j, there is an infinity of values ε such that L_m^0 does not pass through these points, and hence there is a smooth analytic contour without singular points. By giving ε two values ε' and ε'', satisfying these conditions, the required contours L'_m and L''_m are obtained.

Denoting by Σ the annular region between L'_m and L''_m and by $\Lambda = L'_m + L''_m$ its boundary and using the well-known formula

$$\int_\Lambda u\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}s = \iint_\Sigma\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{*}$$

where n is the normal to Λ directed outwards from Σ, it is seen, since

$$\int_{L'_m} u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s = \int_{L'_m} u\frac{\partial u}{\partial s}\mathrm{d}s = (a_m + \varepsilon')\int_{L'_m}\mathrm{d}v = 0$$

and similarly for the integral taken over L''_m, that the left side of (*) is zero; hence u = const. in Σ, and hence in the entire region S^+. But since $u = a_0 = 0$ on L_0, $u = 0$ *in* S^+.

Thus the theorem is proved for the finite region.

When S^+ is an infinite region, the proof is quite similar; in this case one must understand by a_m the smallest of the constants $a_1, a_2, \dots, a_p$ (or, it there are several, anyone of them).

NOTE. As before, suppose that $u = a_j$ on L_j, but omit the condition $a_0 = 0$. Then obviously $u = \text{const.} = a_0 = a_1 = \cdots = a_p$.

Therefore, when the condition $a_0 = 0$ does not hold, two solutions of the problem B can differ by a constant.

§ 2. Solution of the modified Dirichlet problem by means of the potential of a double layer

Firstly, the solution of the modified Dirichlet problem will be considered. In addition to the conditions and notation of the last section, the given function $f(t)$ will be assumed to satisfy the H condition (it is not difficult to dispose of this assumption (cf. Note 1 at the end of this section)). The function $\Phi(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ will be sought in the form

$$u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y) = \Phi(z) = \frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{\mu(t)\mathrm{d}t}{t - z} \tag{4}$$

where $\mu(t)$ is an unknown real function satisfying the H condition.

Putting $t - z = r\mathrm{e}^{i\theta}$ and separating the real part, one obtains

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\pi}\mu(t)\frac{\cos(r,n)}{r}\mathrm{d}s \tag{5}$$

where n is the normal at t, directed towards the left of L, and (r, n) is the angle be-

tween n and $\overrightarrow{tz}$.

Thus $u(x,y)$ is in the form of the potential of a double layer.

Passing in ④ to the limit $z \to t_0$ and separating the real part, one obtains the boundary value of $u(x,y)$ (using the first of the Plemelj formulae (17.2))

$$u = \mathscr{R}\Phi^+(t_0) = \mu(t_0) + \mathscr{R}\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\mu(t)dt}{t-t_0} = \mu(t_0) + \frac{1}{\pi}\int_L \mu d\nu =$$

$$\mu(t_0) + \frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)\frac{\cos(r,n)}{r}ds \qquad ⑥$$

where $\theta = \theta(t_0, t)$ is the angle between the vector $\overrightarrow{t_0 t}$ and the Ox axis, $r = |t - t_0|$ and (r, n) is the angle between $\overrightarrow{tt_0}$ and n.

Hence the boundary condition ④ takes the form

$$\mu(t_0) + \frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)d\theta = f(t_0) + a(t_0) \qquad ⑦$$

or

$$\mu(t_0) + \frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)\frac{\cos(r,n)}{r}ds = f(t_0) + a(t_0) \qquad ⑦a$$

The last equation is a Fredholm equation (this is even so, if one does not consider the term $a(t)$ which, as a rule, is used for the solution of the Dirichlet problem) with the kernel

$$K(t_0, t) = \frac{1}{\pi}\frac{\cos(r,n)}{r}$$

which, by the assumed conditions, is of the form

$$K(t_0,t) = \frac{K_0(t_0,t)}{|t-t_0|^{\alpha}} = \frac{K_0(t_0,t)}{r^{\alpha}} \qquad ⑧$$

where $0 \leqslant \alpha < 1$ and $K_0(t_0, t)$ satisfies the H condition with respect to both variables.

Consequently every (continuous) solution of the equation ⑦ also satisfies the H condition, because the function $f(t)$ was assumed to satisfy this condition. It can also be shown that $\mu(t)$ satisfies the H condition with the same index as the function $f(t)$ (cf. J. Sehauder [1], p.633).

The homogeneous equation

$$\mu(t_0) + \frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)d\theta = 0 \qquad ⑨$$

corresponding to the equation ⑦, will now be considered. By direct verification it is seen to have the following solution (where the last of the equalities must be omitted in the case of an infinite region)

$$\mu = C_k \text{ on } L_k (k = 1, 2, \cdots, p), \mu = 0 \text{ on } L_0 \qquad ⑩$$

where the C_k are arbitrary constants. The equation ⑨ has no other solutions. In fact, let μ be any of its solutions. Then the real part of the function

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\mu(t)\mathrm{d}t}{t - z}$$

holomorphic in S^+, is zero on L. Hence $\Gamma\Phi(z) = 0$ in S^+ and the statement follows.

The general solution ⑩ of the homogeneous equation is a linear combination of the p linearly independent solutions $\mu_1(t), \ldots, \mu_p(t)$, where

$$\mu_j(t) = \begin{cases} 1 & \textit{for } t \in L_j (j = 1, 2, \cdots, p) \\ 0 & \textit{on the remaining contours} \end{cases} \qquad ⑪$$

By the general theory of the Fredholm integral equation the nonhomogeneous equation ⑦ is soluble, if and only if its right side satisfies the known p integral conditions. For the solution of the problem the constants a_j must be selected such that these conditions are satisfied.

However, the establishment of the above-mentioned conditions is, at least in practice, rather complicated, since one has to find all linearly independent solutions of the homogeneous equation, adjoint to ⑨. Moreover, the presence of non-zero solutions of ⑨ considerably complicates the solution of the original equation ⑦, even if the constants a_j have already been properly selected.

All these difficulties can be avoided by means of a very simple method which replaces the equation ⑦ by an equivalent equation, no longer containing the indeterminate constants a_j and having the property that its corresponding homogeneous equation has no nonzero solutions.

In fact, consider instead of ⑦ the different Fredholm integral equation

$$\mu(t_0) + \frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)\mathrm{d}\theta - \int_L k(t_0, t)\mu(t)\mathrm{d}s = f(t_0) \qquad ⑫$$

where s is the arc coordinate of the point t and the (real) function $k(t_0, t)$ is defined on L in the following manner:

$$k(t_0, t) = \begin{cases} \rho_j(t) \text{ for } t_0, t \in L_j, j = 1, \ldots, p \\ 0 \text{ on all other contours} \end{cases} \qquad ⑬$$

the $\rho_j(t)$ are real continuous functions, given on $L_j (j = 1, \ldots, p)$, satisfying the conditions

$$\int_{L_j} \rho_j(t)\mathrm{d}s \neq 0 \qquad ⑭$$

and otherwise quite arbitrary. For example, one can take

$$\rho_j(t) = 1, j = 1, \ldots, p$$

The expression

$$\int_L k(t_0,t)\mu(t)\mathrm{d}s$$

on the left of ⑫ has on each of the contours L_j the constantvalues

$$\int_L k(t_0,t)\mu(t)\mathrm{d}s = c_j \text{ for } t_0 \text{ on } L_j, j = 0,1,\ldots,p \qquad ⑮$$

where the c_j are constant, i.e.

$$c_j = \int_{L_j} \rho_j \mu \mathrm{d}s$$

and $c_0 = 0$ (which has to be omitted for an infinite region, so that one must take then $j = 1,\ldots,p$ in ⑮).

The equation ⑫ will now be shown to have the required property, i.e, that the homogeneous equation

$$\mu(t_0) + \frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)\mathrm{d}\theta - \int_L k(t_0,t)\mu(t)\mathrm{d}s = 0 \qquad ⑯$$

has no solutions different from zero.

Let μ be any solution of ⑯. By ⑮ an ⑯ the real part of the function

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{\mu \mathrm{d}t}{t - z} \qquad (*)$$

holomorphic in S^+, assumes on the contours L_j the constant values c_j, while $c_0 = 0$. Hence, by the result in the last section, $\mathscr{R}\Phi(z) = 0$ in S^+. Therefore $\mu(t) = b_j$ on L_j, where the b_j are constants, while $b_0 = 0$. Substituting these values of $\mu(t)$ in ⑯, one obtains

$$b_j\int_{L_j} \rho_j \mathrm{d}s = 0, j = 1,\ldots,p$$

i.e., by ⑭, all $b_j = 0$, and the statement is proved.

It follows from the above that *the non-homogeneous equation ⑫ always has a (unique) solution*.

The solution $\mu(t)$ of ⑫ gives the solution of the original equation ⑦, since from ⑮

$$\mu(t_0) + \frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)\mathrm{d}\theta = f(t_0) + c_j \text{ on } L_j$$

For the constants a_j in ⑦ one obtains the definte values

$$a_j = c_j = \int_{L_j} \rho_j \mu \mathrm{d}s \qquad ⑰$$

Thus the problem is completely solved.

The method stated was given by the Author in note [4]; for some additional consequences see note [5]. A generalization to a mixed problem was given in note [6], while the extension to three dimensional space appears in the paper [7].

NOTE 1. The function $\mu(t)$ was subjected to the H condition so that use could be made of the Plemelj formula for the passage to the limit $z \to t_0$ in ④. However, if one separates in ④ the real part before passing to the limit and makes use of the known properties of the potential of a double layer, one obtains the result ⑥, provided the function $\mu(t)$ is continuous.

Therefore all the above conclusions remain ture, if the given function $f(t)$ and the unkonwn function $\mu(t)$ are only assumed to continuous.

Note 2. The choice of the auxiliary kernel $k(t_0, t)$, of course, influences the solution $\mu(t)$ of the integral equation ⑫. However, it is ealisy seen that a change of the kernel $k(t_0, t)$ entails only the replacement of $\mu(t)$ by $\mu(t) + \alpha(t)$, where $\alpha(t)$ has a constant value on the different contours L_j, while $\alpha(t) = 0$ on L_0. In fact, if $\mu_1(t)$ and $\mu_2(t)$ are solutions, corresponding to the two different auxiliary kernels $k_1(t_0, t)$ and $k_2(t_0, t)$, then the difference $\mu(t) = \mu_2(t) - \mu_1(t)$ will obviously satisfy an equation of the form ⑦ for $f(t_0) = 0$, and as previously, the conclusion follows that $\Gamma\Phi(z) = 0$ in S^+, where $\Phi(z)$ is a function connected with $\mu(t)$ by (*), and hence, as before, $\mu(t) = a_j = \text{const.}$ on L_j, while $a_0 = 0$.

From the uniqueness theorem of the modified Dirichlet problem proved in § 1 it it, in addition, clear that *the constants a_j in ⑰ do not depend on the choice of the kernel $k(t_0, t)$*.

§ 3. Some corollaries

Let $\Psi(z)$ be a function, holomorphic in S^+, such that $\mathscr{R}\Psi(z)$ is continuous from the left on L; then the function $[\mathscr{R}\Psi(t)]^+$ is known to be continuous on L. For the present, the contour L_0 will be assumed to exist. If the function $[\mathscr{R}\Psi(t)]^+$ is given the value $f(t)$ in the boundary condition ② of the modified Dirichlet problem, this problem clearly has the solution $u(x, y) = \mathscr{R}\Psi(z)$, while $a_1 = a_2 = \ldots = a_p = 0$ (and also, by hypothesis, $a_0 = 0$). By the uniqueness theorem the problem has no other solutions.

On the other hand, the solution of the problem is given by

$$u(x, y) = \mathscr{R}\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\mu(t)\mathrm{d}t}{t - z}$$

where $\mu(t)$ is a real continuous function. determined from the integral equation ⑫ with $f(t) = [\mathscr{R}\Psi(t)]^+$. Here the statement in of the last section is used; if it is desired to

limit consideration to what has been said in the main part of § 2, it is sufficient to assume that $[\mathscr{R}\Psi(t)]^+$ satisfies the H condition.

Hence

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi}\int_L \frac{\mu(t)\mathrm{d}t}{t-z} + C\mathrm{i} \qquad ⑬$$

where C is a real constant, and *the result follows that*:

Every function $\Psi(z)$, holomorphic in the finite region S^+ and such that its real part is continuous on L from the left, is of the form ⑬, where $\mu(t)$ is a real continuous function and C is a real constant.

From this result it is clear that for a given function $\Psi(z)$ the function $\mu(t)$ is defined, apart from arbitrary (real) constants, on the inner contours $L_1, \ldots, L_p$, and uniquely on L_0; the constant C is completely defined.

In the case of an infinite region S^+, i.e., when L_0 is at infinity, it is easily seen that

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{\mu(t)\mathrm{d}t}{t-z} + \Psi(\infty) \qquad ⑬\mathrm{a}$$

holds under the same conditions relating to $\Psi(z)$, where $\mu(t)$ is a real continuous function defined on the contours L_j apart from arbitrary constants.

Now assume $[\mathscr{R}\Psi(t)]^+$ to satisfy the H condition on L. Then, by the results of the last section, the function $\mu(t)$, defined by the integral equation ⑫ for $f(t) = [\mathscr{R}\Psi(t)]^+$, will also satisfy the H condition.

Consequently, the limiting value $\Psi^+(t)$ exists (remembering that $\Psi^+(t)$ referred to the case when the limit is attained by any path remaining in S^+) and satisfies the H condition. Thus one obtains the following result (Theorem of I. I. Privalov [2]; the theorem is proved there for the circle, but the generalization to the case of an arbitrary region of the type considered here can be directly obtained by means of conformal transformation):

If the real part of a function $\Psi(z)$, holomorphic in S^+, assumes on L a given boundary value satisfying the H condition, then also its imaginary part will have this property.

It is easily seen that, if $[\mathscr{R}\Psi(t)]^+$ satisfies the $H(\alpha)$ condition, then also $[\mathscr{R}\Phi(t)]^+$ satisfies the $H(\alpha)$ condition, if $\alpha < 1$, and the $H(1-\epsilon)$ condition, if $\alpha = 1$, where ϵ is any arbitrarily small positive number.

§ 4. Solution of the Dirichlet problem

After the solution of the modified Dirichlet problem the solution of the classical

Dirichlet problem ① presents no difficulty; it can be reduced to the former by many methods (and in the case of a finite simply connected region both problems coincide).

One of the simplest methods of reduction will be given here. Let $z_1, z_2, \ldots, z_p$ be arbitrarily fixed points in the regions $S_1^-, S_2^-, \ldots, S_p^-$ respectively. Write the unknown harmonic function in the form

$$u(x, y) = U(x, y) + \sum_{k=1}^{p} A_k \log | z - z_k | \qquad ⑲$$

where $U(x, y)$ is a new unknown harmonic function and the A_k are real constants, for the present not defined. When the contour L_0 is at infinity, assume

$$\sum_{k=1}^{p} A_k = 0 \qquad ⑳$$

this condition ensures that $\Sigma A_k \log|z - z_k|$ is zero at infinity, since for large $|z|$

$$\log | z - z_k | = \log | z | + \log | 1 - \frac{z_k}{z} | = \log | z | + O(\frac{1}{| z |})$$

and hence

$$\sum_{k=1}^{p} A_k \log | z - z_k | = \log | z | \sum_{k=1}^{p} A_k + O(\frac{1}{| z |})$$

By ① the function U satisfies the boundary condition

$$U = f(t) - \sum_{k=1}^{p} A_k \log | t - z_k | \text{ on } L \qquad ㉑$$

If the constants A_j are assumed arbitrarily fixed and if the function U is required to be the real part of a function holomorphic in S^+ and, in the absence of L_0, to vanish at infinity, then the problem ㉑is, in general, insoluble, but there will always be a solution of the modified Dirichlet problem with the boundary condition

$$U = f(t) - \sum_{k=1}^{p} A_k \log | t - z_k | + a_j \text{ on } L_j \qquad ㉒$$

$$j = 0, 1, \ldots, p, a_0 = 0$$

where, in the absence of L_0, the condition $a_0 = 0$ must be omitted and $j = 1, 2, \ldots, p$.

The solution of this latter problem gives $U(x, y)$ and also determines the constants $a_1, \ldots, a_p$. These are easily obtained in the form

$$a_j = f_j + \sum_{k=1}^{p} \gamma_{jk} A_k \qquad ㉓$$

where the γ_{jk} are certain constants, independent of the function $f(t)$, and the $f_j (j = 1, \ldots, p)$ are also constants which depend on $f(t)$ and are zero for $f(t) \equiv 0$.

In order that the function u, given by ⑲, is the solution of the Dirichlet problem,

it is necessary and sufficient that the $a_j = 0 (j = 1, \ldots, p)$, i.e., that the A_k satisfy the system of linear equations

$$\sum_{k=1}^{p} \gamma_{jk} A_k + f_j = 0, j = 1, \ldots, p \quad ㉔$$

Firstly consider the case of a finite region. The determinant formed by the γ_{jk} is different from zero. In fact, if this determinant were zero, the homogeneous system, obtained from ㉔ for $f(t) \equiv 0$ (i.e., when $f_j = 0, j = 1, \ldots, p$) would have the solutions $A_1, \ldots, A_p$ different from zero. But then one would obtain the function

$$u = U + \sum_{k=1}^{p} A_k \log | z - z_k |$$

harmonic and not identically zero in S^+, but zero on L, which is impossible.

Furthermore, this expression cannot be identically zero in S^+, unless all the A_k are zero, since otherwise the function

$$u + \mathrm{i}V + \sum_{k=1}^{p} A_k \log(z - z_k)$$

where V is the function conjugate to U, would be constant. But this is impossible, since, by hypothesis, $U + \mathrm{i}V$ is a one-valued function.

Hence the system ㉔ is always soluble; having determined the A_k the solution of the original problem is obtained.

In the case of an infinite region the equation ㉓ must be added to ㉔. This new system will, in general, be incompatible; it is not difficult to understand this, since the function u, presented in the form ⑲, vanishes at infinity, if ㉓ holds, and, in general, there is no such solution of the Dirichlet problem (as in the statement of this problem the unknown function was only required to be bounded at infinity).

At first the boundary condition will be satisfied apart from a constant (which is the same on all L_j), i.e., replace the condition $a_1 = a_2 = \ldots = a_p = 0$ by $a_1 = A, A_2 = A, \ldots, A_p = A$, where A is some constant. Then one arrives at the system

$$\sum_{k=1}^{p} \gamma_{jk} A_k - A + f_j = 0 \quad (j = 1, \ldots, p)$$

$$\sum_{k=1}^{p} A_k = 0 \quad ㉕$$

instead of ㉔, i.e., one obtains $(p + 1)$ equations with the $(p + 1)$ unknowns $A, A_1, \ldots, A_p$. Similarly as above, it can be shown that the determinant of this system is different from zero and that therefore it is always soluble. Thus a harmonic function u has been found, vanishing at infinity and taking the value $f(t) + A$ on L. Hence, the function

$$u - A \tag{㉖}$$

will be the solution of the original problem.

NOTE. *It can be shown by a different method that the above results* (concerning the uniqueness of the solution, but not its representation as the potential of a double layer) also hold under much more general assumptions with regard to the boundary of the region (the results can be considerably generalized in these directions as it was done e.g. by J. Radon[1]. For example, it is sufficient to assume that the contours forming the boundary are Jordan curves (so that they need not even be rectifiable). Such a region can always be mapped conformally (and continuously up to the boundary) on a region bounded, for instance, by analytic curves (or even merely by circles; cf. any detailed treatment of complex function theory).

§ 5. Solution of the modified Dirichlet problem, using the modified potential of a simple layer

The modified Dirichlet problem was solved in § 2 by use of the potential of a double layer. But in some cases, important from the point of view of applications, one has to introduce the solution in the form of the modified potential of a simple layer. This problem will be treated in full, partly with a view to giving one of the simplest and most direct applications of the theory of singular integral equations.

The modified Dirichlet problem was stated in § 1; now the additional condition $a_0 = 0$, used in the preceding sections, will be abandoned, and hence it will be assumed that none of the constants $a_0, a_1, \ldots, a_p$, appearing in the statement of the problem, are given beforehand.

The solution of the problem will be sought in the form

$$u(x, y) = \mathscr{R}\Phi(z) \tag{㉗}$$

where this time

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi}\int_L \frac{\mu(t)\mathrm{d}t}{t - z} = \frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{\mathrm{i}\mu(t)\mathrm{d}t}{t - z} \tag{㉘}$$

and $\mu(t)$ is again an unknown real function satisfying the H condition.

Thus $u(x, y)$ will have the form

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)\frac{\mathrm{d}r}{r(z, t)} \tag{㉙}$$

where $r(z, t) = |z - t|$. The integral on the right is the modified potential of a simple layer.

It is easily seen that this problem cannot have two different solutions of the form ㉗, ㉘. In fact, as shown in the Note at the end of § 1, if $[\mathscr{R}\Phi]^+ = a_j$ on $L_j (j = 0,$

$1, \ldots, p$), where the a_j are constants, then u = const. $= a_0 = a_1 = \ldots = a_p$. But here, by the Plemelj formula, $[\mathscr{R}\Phi]^+ = [\mathscr{R}\Phi]^-$. Hence it may also be concluded that $\mathscr{R}\Phi(z)$ = const. $= a_0 = \ldots = a_p$ in S^-. But $\Phi(\infty) = 0$; hence $a_0 = a_1 = \ldots = a_p = 0$, $\mathscr{R}\Phi(z) \equiv 0$, the reasoning also being true in the absence of L_0, when one has to consider $j = 1, 2, \ldots, p$.

Substituting ㉙ in the boundary condition ② and noting that

$$\mathscr{R}\Phi^+(t) = \frac{1}{\pi}\int_L \frac{\mu(t)\mathrm{d}r}{r(t_0, t)}$$

one obtains the integral equation

$$\frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)\frac{\mathrm{d}r}{r(t_0, t)} = f(t_0) + a(t_0) \qquad ㉚$$

where, as in § 2, $f(t_0)$ is a given real function, satisfying the H condition, and $a(t_0) = a_j$ = const. on L_j, where $j = 0, 1, \ldots, p$ in the presence of L_0 and $j = 1, \ldots, p$ when L_0 is at infinity; in contrast to § 2, as has been mentioned already, a_0 will not be assumed to be zero.

The expression on the left of ㉚

$$\frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)\frac{\mathrm{d}r}{r(t_0, t)} = \frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)\frac{\cos\alpha(t_0, t)}{r(t_0, t)}\mathrm{d}s \qquad ㉛$$

where $\alpha(t_0, t)$ is the angle between the positive tangent at t and the vector $\overrightarrow{t_0 t}$, is a singular operator of the Cauchy type. Actually, if

$$\theta = \theta(t_0, t) = \arg(t - t_0), \textit{then} \log r = \log(t - t_0) - \mathrm{i}\theta$$

so that

$$\frac{\mathrm{d}r}{r(t_0, t)} = \frac{\mathrm{d}t}{t - i_0} - \mathrm{i}\mathrm{d}\theta(t_0, t)$$

and therefore

$$\frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)\frac{\mathrm{d}r}{r(t_0, t)} = \frac{1}{\pi}\int_L \frac{\mu(t)\mathrm{d}t}{t - t_0} + \frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \mu(t)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s \qquad ㉜$$

It is known that

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = \frac{\sin\alpha(t_0, t)}{r} = \frac{\cos(r, n)}{r} = \frac{K_0(t_0, t)}{r^\alpha}, 0 \leq \alpha < 1$$

Singular Integral Equations

where $K_0(t_0, t)$ satisfies the H condition. Therefore the first term on the right of ㉜ is the dominant part of the operator. Thus the index of the equation ㉚ is seen to be zero, i.e., it is quasi-Fredholm equation . This fact greatly facilitates the investigation (in particular, the equation ㉚ is easily reduced to an equivalent Fredholm equation by any of the methods given in Part Ⅱ).

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2} = 0$$

Since this singular equation is real, one need only consider the case of real functions $\mu(t)$.

The homogeneous equation, corresponding to ㉜, viz.

$$\frac{1}{\pi}\int\frac{\mu(t)\mathrm{d}r}{r(t_0,t)}=0 \qquad ㉝$$

has the solution

$$\mu(t)=\mathrm{C_j}\ on\ \mathrm{L_j} \qquad ㉞$$

$$j=0,1,\ldots,p\ \text{(in the presence of } L_0\text{)}$$

$$j=1,\ldots,p\ \text{(when } L_0 \text{ is at infinity)}$$

where the C_j are arbitrary (real) constants. There are no other solutions. For, let $\mu(\mathrm{t})$ be any solution of ㉝, the $0=\mathscr{R}\Phi^+(t)=\mathscr{R}\Psi^+(t)$, where

$$\Psi(z)=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\mu(t)\mathrm{d}t}{t-z}=\frac{1}{\mathrm{i}}\Phi(z)$$

and therefore $\mu=C_j$ on L_j, thus proving the statement. (Also note that here $\mathscr{R}\Psi^+=\mathscr{R}\Psi^-$ and therefore $\mathscr{R}\Psi(z)\equiv 0$ is S^+ as well as in S^-)

The singular equation will now be treated in a similar manner as the Fredholm equation in, i.e., it will be replaced by the equation

$$\frac{1}{\pi}\int_L\mu(t)\frac{\mathrm{d}r}{r(t_0,t)}-\int_L k(t_0,t)\mu(t)\mathrm{d}s=f(t_0) \qquad ㉟$$

where $k(t_0,t)$ is defined in the following manner

$$k(t_0,t)=\begin{cases}\rho_j \text{ for } t_0,t\in L_j\\ 0 \text{ in all other cases}\end{cases} \qquad ㊱$$

the $\rho_j(t)$ being arbitrarily chosen (real) functions, subject only to the conditions

$$\int_{L_j}\rho_j\mathrm{d}s\neq 0 \qquad ㊲$$

with $j=0,1,\ldots,p$ and $j=1,\ldots,p$ respectively, when L_0 is present or absent.

This differs from § 2 only in the fact that here $k(t_0,\ t)$ is not assumed zero when t_0 and t lie on L_0; but in § 2 something similar could have been done, thereby leading to some more general integral equation (cf. I.I. Muskhelishvili [5] and [7]).

Reasoning as in § 2, one arrives at the conclusion that the homogeneous equation corresponding to ㉟ has no solutions different from zero. Hence the adjoint of this homogeneous equation also has no solutions different from zero (since here the index is zero) and ㉟ is therefore always soluble.

Having solved ㉟, the definite function $\mu(t)$ can be found and the constants a_j will be given by

$$a_j = \int_{L_j} \rho_j \mu \, \mathrm{d}s \tag{38}$$

$j = 0, 1, \ldots, p$ (in the presence of L_0)

$j = 1, \ldots, p$ (when L_0 is absent)

Thus the problem is solved. In the case of an infinite region the solution clearly vanishes at infinity. If for a finite region one requires $\mu = f$ on L_0, it is sufficient to replace u by $u - a_0$.

NOTE 1. Similarly, the result in Note 2 at the end of § 2 is easily established, namely, that, although the choice of the auxiliary kernel $k(t_0, t)$ influences the solution $\mu(t)$ of the integral equation, a change of the kernel can only alter $\mu(t)$ by a value, constant of each of the L_j.

The constants a_j do not depend on the choice of the auxiliary kernel; this follows directly from the uniqueness theorem proved at the beginning of this section.

NOTE 2. Reasoning similarly as in § 62, the conclusion is easily reached that, if $\Psi(z)$ is a function holomorphic in S^+ such that $[\mathscr{R}\Psi(z)]^+$ exists and satisfies the H condition, then

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi}\int_L \frac{v(t)\mathrm{d}t}{t-z} + C + \mathrm{i}C'$$

where $v(t)$ is a real function satisfying the H condition and C and C' are real constants. The constant C is fully determined, while the function $v(t)$ is defined on every contour L_j apart from a constant term.

In the case of a finite region S^+, i.e., when L_0 is present, addition of a suitable real constant to $v(t)$ on L_0 will give $C' = 0$, and hence

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi}\int_L \frac{v(t)\mathrm{d}t}{t-z} + C \tag{39}$$

In this way, $v(t)$ is completely determined on L_0 and, apart from constant terms, on $L_j (j = 1, \ldots, p)$.

When S^+ is infinite, i.e. when the contour L_0 is absent, one will have $C + \mathrm{i}C' = \Psi(\infty)$ and therefore

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi}\int_L \frac{v(t)\mathrm{d}t}{t-z} + \Psi(\infty) \tag{40}$$

and $v(t)$ is again determined on the L_j apart from constant terms.

These results (even in a somewhat more general form) can also be obtained directly from the results of § 3 by the simple substitution of Ψ for $\mathrm{i}\Psi$.

§ 6. **Solution of the Dirichlet problem by the potential of a simple layer. Fundamental problem of electrostatics**

From the solution of the modified Dirichlet problem, obtained in the last section, it is not difficult to arrive by a method, entirely analogous to that used in § 4, at the solution of the classical Dirichlet problem. In order to avoid repetition this will not be done here, but instead the Dirichlet problem will be solved directly by two methods: with the help of the modified potential of a simple layer and by means of the ordinary potential of a simple layer; as a byproduct the solution of the so-called fundamental problem of electrostatics will be obtained.

The object being to give a simple application of the method of singular equations, only the case will be considered in which L is a single contour L_0 bounding the finite region S^+. The assumption made in § 1 regarding the properties of the tangent to L will be retained.

Thus let it be required to find the function $u(x, y)$, harmonic in S^+ and continuous in $S^+ + L$, satisfying on L the boundary condition

$$u = f(t) \tag{41}$$

where $f(t)$ is a real function given on L; as before, $f(t)$ will be assumed to satisfy the H condition.

1°. SOLUTION BY MEANS OF THE MODIFIED POTENTIAL OF A SIMPLE LAYER.

The solution of the problem will be written in the form

$$u(x, y) = \mathscr{R}\Phi(z), \Phi(z) = \frac{1}{\pi}\int_L \frac{\mu(t)\,dt}{t - z} \tag{42}$$

where $\mu(t)$ is an unknown real function satisfying the H condition.

As in the last section, substituting (42) in (41), one obtains the integral equation

$$\frac{1}{\pi}\int_L \frac{\mu(t)\,dt}{r(t_0, t)} = \frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)\,\frac{\cos\alpha(t_0, t)}{r(t_0, t)}\,ds = f(t_0) \tag{43}$$

This is a real singular integral equation with index zero. The entire investigation will be carried through in the field of real functions. The homogeneous equation, correspondint to (43)

$$\frac{1}{\pi}\int_L \frac{\cos\alpha(t_0, t)}{r(t_0, t)}\,ds = 0 \tag{44}$$

has the obvious solution $\mu(t) = C$, where C is an arbitrary constant; it has no other solutions . Hence also the adjoint equation to (44)

$$\frac{1}{\pi}\int_L v(t)\,\frac{\cos\alpha(t, t_0)}{r(t, t_0)}\,ds = 0 \tag{45}$$

has one and only one linearly independent solution (because the index $\varkappa = 0$), so that, if $v_0(t)$ is any definite solution of (45) not identically zero, then all other solutions are given by $v(t) = Cv_0(t)$, where C is an arbitrary constant (again restricting consideration to real solutions).

From the general theory of singular equations the original equation (43) has a solution, if and only if

$$\int_L v_0(t) f(t) \mathrm{d}s = 0 \tag{46}$$

provided this condition is satisfied, the general solution of (43) has the form

$$\mu(t) = \mu_0(t) + C \tag{47}$$

where $\mu_0(t)$ is any particular solution and C is an arbitrary constant.

The character of the condition (46) will be studied more closely. (46) is equivalent to the following equatiion:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s_0}\int_L v(t) \log r(t_0, t) \mathrm{d}s = 0$$

or

$$\int_L v(t) \log r(t_0, t) \mathrm{d}s = \text{const} \tag{48}$$

It will be shown that

$$m_0 = \int_L v_0(t) \mathrm{d}s \neq 0 \tag{49}$$

In fact, if this were not so, the potential of a simple layer

$$U(x, y) = -\int_L v_0(t) \log |t - z| \mathrm{d}s = \int_L v_0(t) \log \frac{1}{r(t, z)} \mathrm{d}s \tag{50}$$

would be a function harmonic in S^- including the point at infinity; this means that $U(x, y)$ takes a definite finite value at infinity; in the present case this value is zero, since for large $|z|$

$$U(x, y) = -\int_L v_0(t) \log |t - z| \mathrm{d}s = -\log |z| \int_L v_0(t) \mathrm{d}s -$$

$$\int_L v_0(t) \log \left|1 - \frac{t}{z}\right| \mathrm{d}s = -\log |z| \int_L v_0(t) \mathrm{d}s + 0\left(\frac{1}{|z|}\right)$$

Furthermore, since by (48) $U^- = U^+ = U = \text{const.}$ on L, one would have that $U(x, y) = \text{const.}$ in S^+ as well as in S^-. Here use is made of a known property of the potential of a simple layer, namely, that it remains continuous for the passage through L, and for this to be so it is sufficient that the density $v_0(t)$ is bounded and integrable. But by a known formula of potential theory

$$-2\pi v_0(t_0) = \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)^+ - \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)^- \quad ⑤①$$

where n is the normal to L at t_0, directed to the left; in order that ⑤① will hold true, it is sufficient that the density $v_0(t)$ be continuous. Hence, in the present case, one would obtain $v_0(t) = 0$ on L, and this contradicts the condition.

It follows from ④⑨ that one can always choose the constant a_0 such that

$$\int_L (f + a_0) v_0 \mathrm{d}s = \int_L f v_0 \mathrm{d}s + a_0 \int_L v_0 \mathrm{d}s = 0 \quad ⑤②$$

which is the condition of solubility of the equation

$$\frac{1}{\pi}\int_L \mu(t) \frac{\cos\alpha(t_0, t)}{r(t_0, t)} \mathrm{d}s = f(t_0) + a_0 \quad ⑤③$$

If $\mu(t)$ is any of the solutions of ⑤③ (all the other solutions being obtaind from the formula μ + const.), then

$$u(x, y) = \mathscr{R}\frac{1}{\pi}\int_L \frac{\mu(t)\mathrm{d}t}{t - z} - a_0 = \frac{1}{\pi}\int_L \frac{\mu(t)\mathrm{d}r}{r(z, t)} - a_0 \quad ⑤④$$

is the solution of the original Dirichlet problem.

2°. THE FUNDAMENTAL PROBLEM OF ELECTROSTATICS

The following problem of the theory of the logarithmic potential has been solved.

To find the density $v(t)$ of a mass distribution, on he boundary L of the region S^+ such that the corresponding potential

$$U(x, y) = \int_L v(t) \log\frac{1}{r} \mathrm{d}s \quad ⑤⑤$$

remains constant in S^+. Here $r = r(t, z) = |t - z|$.

This Problem is the two-dimensional analogue of the fundamental problem of electrostatics dealing with the distribution of charge on the boundary L of a conductor S^+. It corresponds approximately to the problem of distribution of charge over a long cylindrical conductor with the cross-section S^+.

If U = const. in S^+, then U = const. on L, and vice versa. Hence the problem leads to the Fredholm integral equation of the first kind

$$\int_L v(t) \log r(t_0, t) \mathrm{d}s = \text{const}$$

and thus, by differentiation with respect to s_0, the homogeneous singular equation ④⑤ is obtained.

This was seen to have non-zero solutions. If $v_0(t)$ was one solution, then all others were obtainable from the formula $v(t) = Cv_0(t)$. The corresponding potential is given by

$$U(x,y) = CU_0(x,y) \quad ⑯$$

where

$$U_0(x,y) = \int_L v_0(t)\log\frac{1}{r}\,ds \quad ⑰$$

The potential $U_0(x, y)$ has a constant value in $S^+ + L$; this value will be denoted by k_0, i.e.

$$U_0(x,y) = k_0 \text{ in } S^+ + L \quad ⑱$$

It may happen that $k_0 = 0$; such a case will be called particular.

The general solution ⑯ of the present problem is seen to contain the arbitrary constant C. The problem becomes determinate, if one superimposes simultaneously a distribution of "masses" or "charges" m on L such that

$$m = \int_L v(t)\,ds = C\int_L v_0\,ds = Cm_0 \quad ⑲$$

This relation determines C, since by ⑲ $m_0 \neq 0$.

Instead of giving m, one may give the value k of the potential $U(x, y)$ on $S^+ + L$. Then one has the equation $k = k_0 C$ for the determination of C which gives C in all cases, except when $k_0 = 0$ in which case $U(x, y) = 0$ on $S^+ + L$ for all C. This particular case has no analogue in three dimensional space, i.e., for the Newtonian potential.

3°. SOLUTION OF THE DIRICHLET PROBLEM BY MEANS OF THE POTENTIAL OF A SIMPLE LAYER.

A direct generalization of the above result is the determination of the potential of a simple layer ⑮ under the condition $U = f(t)$ on L; this is the Dirichlet problem, it being required to find the solution by means of the potential of a simple layer. The problem leads to the Fredholm integral equation of the first kind

$$-\int_L v(t)\log r(t_0, t)\,ds = f(t_0) \quad ⑳$$

If the unknown solution $v(t)$ is to satisfy the H condition, then the given function $f(t_0)$ must be assumed to have a derivative with respect to s_0, satisfying the H condition, because the left side of ⑳ is easily seen to have that property.

Differentiating both sides of ⑳ with respect to s_0, one obtains the singular integral equation

$$-\int_L v(t)\,\frac{\cos\alpha(t,t_0)}{r(t,t_0)}\,ds = \frac{df}{ds_0} \quad ㉑$$

This equation is adjoint to ⑬ which has been obtained, when solving the Dirichlet prob-

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2} = 0$$

lem by means of the modified potential of a simple layer.

The homogeneous equation, adjoint to ⑥①, will be ④④ which is known to have the unique linearly independent solution $\mu_0(t) = 1$.

The condition of solubility of ⑥① is always fulfilled, because

$$\int_L \mu_0(t)\frac{df}{ds}ds = \int_L \frac{df}{ds}ds = 0 \quad ⑥②$$

Hence ⑥① is always soluble. Its general solution has the form

$$v(t) = v^*(t) + Cv_0(t) \quad ⑥③$$

where $v^*(t)$ is any particular solution, $v_0(t)$ a solution of the corresponding homogeneous equation ④⑤ and C an arbitrary constant.

Let $v(t)$ be any solution of ⑥①. Then the potential $U(x, y)$ defined by ⑤⑤ will obviously satisfy the boundary condition

$$U = f(t_0) - k \text{ on } L \quad ⑥④$$

where k is a certain constant. Thus, the function

$$u(x,y) = U(x,y) + k \quad ⑥⑤$$

is the solution of the Dirichlet problem ④①, so that the solution is in the form of a sum of the potential of a simple layer and some constant k. If, however, one requires to present the solution by means of the potential of a simple layer, one has still to find the potential of a simple layer, having the constant value k on L and hence in $S^+ + L$. This was seen to be always possible with the exception of the particular case when $k_0 = 0$ in ⑤⑧.

NOTE. It follows directly from the result of 3° that, if the particular case $k_0 = 0$ is excluded, then each function $U(x, y)$, harmonic in S^+, bounded on L and having a derivative with respect to s satisfying the H condition, is of the form

$$U(x,y) = \int_L v(t)\log\frac{1}{r(t,z)}ds \quad ⑥⑥$$

where $v(t)$ is a real function satisfying the H condition. Such a representation is easily seen to be unique; this follows from the fact that, if $U(x, y) \equiv 0$ in S^+ and hence on L, then necessarily $v(t) \equiv 0$.

However, in the particular case, one is easily seen to have instead

$$U(x,y) = \int_L v(t)\log\frac{a}{r(t,z)}ds \quad ⑥⑦$$

where a is an arbitrarily fixed positive constant, different from unity. For fixed a ⑥⑦ defines $v(t)$ completely, when the function $U(x, y)$ is given.

Furthermore, in all cases, every harmonic function, satisfying the above-mentioned conditions, is seen to be expressible in the form ⑥⑦, if a is any fixed positive constant such that

$$\int_L v_0(t)\log\frac{a}{r(t_0,t)}\mathrm{d}s = m_0\log a + k_0 \neq 0 \qquad (68)$$

where m_0 and k_0 are determined by (49) and (58) respectively. Thus the choice of a depends only on the region S^+ and not on the represented harmonic function.

Hence it is seen that the particular case ($k_0 = 0$) is not essentially a special case; it can be avoided by a simple change in scale.

It also follows from the above that, if the real part $U(x, y)$ of the function $\Psi(z)$ holomorphic in S^+ satisfies the above conditions, then the function $\Psi(z)$ can be written in the form

$$\Psi(z) = \int_L v(t)\log\frac{a}{t-z}\mathrm{d}s + \mathrm{i}C \qquad (69)$$

where $v(t)$ is a real function satisfying the H condition, a is a certain positive constant which satisfies the condition (68) and can be fixed once and for all for a given region S^+, and C is a real constant (depending on the represented function). Of course, it has been assumed that the value of the logarithm has been fixed in a suitable manner; it is left to the reader to ascertain how this is done.

For a fixed and a definite choice of the logarithm the function $\Psi(z)$ is completely determined by the function $v(t)$ and the constant C.

参考文献

[1] 吴炯圻.现代位势理论导引[M].厦门:厦门大学出版社,1998.

[2] 亚历山大洛夫 A Л,等.数学——它的内容、方法和意义:第二卷[M].秦元勋,译.北京:科学出版社,1984.

[3] 彼得罗夫斯基 N Г.偏微分方程讲义[M].段虞荣,译.萧树铁,朱德威,校.北京:人民教育出版社,1956.

[4] 克莱因 M.古今数学思想:第二、三册[M].北京大学数学系数学史翻译组,译.冷生明,张理京,校.上海:上海科学技术出版社,1980.

[5] 邱曙熙.Riemann 曲面及其上的位势理论[M].厦门:厦门大学出版社,1998.

[6] 吴新谋,等.数学物理方程:第一册[M].北京:科学出版社,1958.

[7] 张鸣镛.北京大学数学丛书:位势论[M].北京:北京大学出版社,1998.

[8] 杜布 J L.经典位势论与概率位势论:上册[M].周性伟,刘嘉焜,杨振明,等译.吴荣,校.北京:科学出版社,1993.

[9] 路见可.武汉大学学术丛书:解析函数边值问题[M].第 2 版.武汉:武汉大学出版社,2004.

[10] 陈祖墀.偏微分方程[M].合肥:中国科学技术大学出版社,1993.

[11] 苗长兴.现代数学基础丛书:调和分析及其在偏微分方程中的应用[M].北京:科学出版社,1999.

[12] 路见可.解析函数和奇异积分方程论文选集[M].武汉:武汉大学出版社,1998.

[13] 李文林.数学珍宝——历史文献精选[M].北京:科学出版社,1998.

[14] 卢建新,朱栋培.超弦/M 理论导论[M].合肥:中国科学技术大学出版社,2006.

[15] 吴崇试.北京大学物理学丛书:数学物理方法[M].北京:北京大学出版社,1999.

[16] 宋文淼.矢量偏微分算子[M].北京:科学出版社,1999.

[17] SERGE LANG.大学生数学专题讲座[M].马进喜,译.北京:机械工业出版社,2002.

[18] 王元明,管平.线性偏微分方程引论[M].南京:东南大学出版社,2002.

[19] 亚当斯 C,哈斯 J,汤普森 A.微积分之倚天宝剑——打遍泰勒级数、

多重积分、偏导数、向量微积分[M].张菽,译.长沙:湖南科学技术出版社,2005.

[20] 莫叶.勒让德函数论[M].济南:山东大学出版社,1988.

[21] 姜礼尚,孙和生,陈志浩,等.偏微分方程选讲[M].北京:高等教育出版社,1997.

[22] 维希克 M N,构什基斯 A JI,奥列伊尼克 O A .1917—1957,四十年来的苏联数学——偏微分方程[M].周毓麟,译.北京:科学出版社,1961.

[23] 李亚宾涅基 B C ,菲垦波夫 A Φ.差分方程的稳定性[M].吴文达,王宗皓,译.北京:科学出版社,1961.

[24] 吉洪诺夫 A H,萨马尔斯基 A A.数学的理方程[M].黄克欧,等译.北京:人民教育出版社,1961.

[25] HEDBERG L I.调和函数的逼近与迪利克雷问题的稳定性[J].数学译林,1994(2).

[26] BRAUN M.微分方程及其应用:下册[M].张鸿林,译.北京:人民教育出版社,1980.

[27] 李大潜,泰铁虎.物理学与偏微分方程:上册[M].北京:高等教育出版社,1997.

[28] 艾利斯哥尔兹 Л A.微分方程[M].南开大学数学系编译中队,译.崔士英,校.北京:人民教育出版社,1959.

[29] 梁昆淼.数学物理方法[M].北京:人民教育出版社,1979.

[30] 路见可.双周期解析函数的变态迪利克雷问题[J].数学物理学报,1984,4(1):1-9

[31] 陈庆乔.偏数分方程的某些研究动向[J].数学研究与评论,1983(3).

[32] 谷超豪.偏微分方程应当有多少边界条件?[J].自然杂志,1979(3).

[33]《数学百科全书》编译委员会.数学百科全书:第二卷[M].北京:科学出版社,1995.

[34] 日本数学会.数学百科辞典[M].马忠林,译.北京:科学出版社,1984.

[35] 白艳萍,陆平,薛亚奎.数学物理方程[M].北京:北京理工大学出版社,2006.

[36] 黄大奎,舒慕曾.数学物理方法[M].北京:高等教育出版社,2005.

[37] 齐民友,徐超江,王维克.现代偏微分方程引论[M].武汉:武汉大学出版社,1994.

[38] 周蜀林.偏微分方程[M].北京:北京大学出版社,2005.

[39] 王明新.数学物理方程[M].北京:清华大学出版社,2005.

[40] G ZILL DENNIS, R CULLEN MICHAEL. 微分方程与边界值问题[M]. 第5版. 陈启宏, 张凡, 郭凯旋, 译. 北京: 机械工业出版社, 2005.
[41] 陈湘能. 国际最佳数学征解问题分析[M]. 彭肇藩, 校. 长沙: 湖南科学技术出版社, 1983.
[42] STAMPFLI JOSEPH, VICTOR GOODMAN. 金融数学[M]. 蔡明超, 译. 北京: 机械工业出版社, 2004.
[43] 伊林斯基 卡里尔. 金融物理学——非均衡定价中的测量建模[M]. 殷剑峰, 李彦, 译. 北京: 机械工业出版社, 2003.
[44] 史树中. 金融经济学十讲[M]. 上海: 上海人民出版社, 2004.
[45] 马利亚里斯 A G, 布罗克 W A. 经济学和金融学中的随机方法[M]. 陈守东, 李小军, 李无, 译. 上海: 上海人民出版社, 2003.
[46] 叶中行, 林建忠. 数理金融——资产定价与金融决策理论[M]. 北京: 科学出版社, 2000.
[47] 王一鸣. 数理金融经济学[M]. 北京: 北京大学出版社, 2000.
[48] 赫尔 约翰. 期权、期货和衍生证券[M]. 张陶伟, 译. 北京: 华夏出版社, 1997.
[49] 邵宇. 微观金融学及其数学基础[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003.
[50] 傅立叶 约瑟夫. 热的解析理论[M]. 桂质亮, 译. 武汉: 武汉出版社, 1993.
[51] 苏芳霞. 科学技术百科全书: 数学卷[M]. 北京: 科学出版社, 1980.
[52] 华罗庚, 苏步青. 中国大百科全书: 数学卷[M]. 北京: 科学出版社, 1988.
[53] 龚异. 微积分五讲[M]. 北京: 科学出版社, 2005.
[54] 张奠宙, 朱成杰. 现代数学思想讲话[M]. 南京: 江苏教育出版社, 1989.
[55] 陈建功. 陈建功文集[M]. 北京: 科学出版社, 1981.
[56] 邱曙熙. 现代分析引论[M]. 厦门: 厦门大学出版社, 2002.
[57] 布里斯 埃里克, 贝莱拉赫 蒙齐尔, 马伊 胡 明, 等. 期权、期货和特种衍生证券理论、应用和实践[M]. 史树中, 等译. 北京: 机械工业出版社, 2002.
[58] 伯杰 M S. 非线性及泛函分析——数学分析中的非线性问题讲义[M]. 罗亮生, 林鹏, 译. 北京: 科学出版社, 2005.
[59] MORTON K W, MAYERS D F. 偏微分方程数值解[M]. 李治平, 等译. 北京: 人民邮电出版社, 2006.
[60] 李荣华. 边值问题的 Galerkin 有限元法[M]. 北京: 科学出版社, 2005.

[61] 陈恕行.现代偏微分方程导论[M].北京:科学出版社,2005.
[62] 华罗庚.从单位圆谈起[M].北京:科学出版社,1977.
[63] 冯康.冯康文集[M].北京:国防工业出版社,1994.
[64] 姜礼尚.期权定价的数学模型和方法[M].北京:高等教育出版社,2003.
[65] 赵为礼,张卿,杨有发.δ——函数及其应用[M].长春:吉林科学技术出版社,1992.
[66] M STEIN ELIAS, WEISS CUIDO.欧氏空间上的付立叶分析引论[M].张阳春,译.上海:上海科学技术出版社,1987.
[67] 庄圻泰,杨重骏,何育赞,等.单复变函数论中的几个论题[M].北京:科学出版社,1995.
[68] 闻国椿.非线性偏微分复方程[M].北京:科学出版社,1999.
[69] F LUCAS WILLIAM.微分方程模型[M].朱煜民,周宇虹,译.长沙:国防科技大学出版社,1998.
[70] 阎贵卿,阎毅.近代数学物理理论与可视化技术[M].长沙:国防科技大学出版社,2000.
[71] 华罗庚,王元.数论在近似分析中的应用[M].北京:科学出版社,1978.
[72] 钟承奎,范先令,陈文嶸.非线性泛函分析引论[M].兰州:兰州大学出版社,1998.
[73] 张恭庆,林源渠.泛函分析讲义:上册[M].北京:北京大学出版社,1987.
[74] 李金柱.边界元法[J].应用数学与计算数学,1983(4).
[75] 德苏泽 P,席尔瓦 J.伯克利数学问题集[M].包雪松,杯应举,译.北京:科学出版社,2003.
[76] 赵学雷,王梓坤.高阶偏微分方程与概率方法[J].数学进展,1996(10).
[77] 柯朗 R.数学物理方法:第一卷[M].钱敏,郭敦仁,译.北京:科学出版社,1958.
[78] 柯朗 R.数学物理方法:第二卷[M].熊振翔,杨应辰,译.北京:科学出版社,1977.
[79] 希尔伯特 大卫.数学问题[M].数学史译文集.李文林,译.上海:上海科学技术出版社,1981.
[80] 普劳特 M H,温柏格 H F.偏微分方程的最大值原理[M].影印版.北京:科学出版社,1985.

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2}=0$$

[81] 梯茨玛希 E C.按二阶微分算子的固有函数展开[M].牛津:英国牛津大学克拉伦教出版社,1946(第一卷),1958(第二卷).
[82] 阿达玛 J.线性双曲型偏微分方程的柯西问题[M].纽黑文:耶鲁大学出版社,1932.
[83] 华罗庚.多复变函数论中的典型域的调和分析[M].北京:科学出版社,1957.
[84] 嘉涅特 约 比.有界解析函数[M].纽约:美国纽约大学出版社,1981.
[85] 斯特朗 G,克斯 G J.有限元法分析[M].崔俊芝,译.北京:科学出版社,1983.
[86] L. LOVÁSZ.离散与连续:一物之两面?[J].数学译林,2004,23(4).
[87] 迈耶 Y.小波与算子:第二卷[M].王耀东,译.邓东皋,龙瑞麟,校.北京:世界图书出版公司,1995.
[88] 功力金二郎.复变函数论[M].刘书琴,译.上海:上海科学技术出版社,1963.
[89] THOMSON BRIAN S, BRUCKNER JUDITH B, BRUCKNER ANDREW M.实分析基础[M].北京:高等教育出版社,2006.
[90] ARIEH, LSERLES.微分方程数值分析基础教程[M].刘晓艳,刘学深,等译.丁培柱,洪桂林,校.北京:清华大学出版社,2005.
[91] 莫嘉琪.高阶半线性椭圆型方程奇摄动广义 Dirichlet 边值问题[J].数学进展,2006,35(1).
[92] WANG KUNY, LI LUOQING.球面上的调和分析与逼近[M].北京:科学出版社,2000.
[93] 陈立成.层析成像的数学方法与应用[M].成都:西南交通大学出版社,1994.
[94] 维库阿 И Н.椭圆型方程的新解法[M].侯宗义,译.上海:上海科学技术出版社,1963.
[95] 索伯列夫 C Л.泛函分析在数学物理中的应用[M].王柔怀,童勤谟,陈诗华,等译.北京:科学出版社,1959.
[96] LOUKAS, GRAFAKOS.傅里叶分析[M].影印版.北京:机械工业出版社,2006.
[97] MATS, ANDERSSON .复分析中的若干论题[M].影印版.北京:清华大学出版社,2005.
[98] 任福尧.应用复分析[M].上海:复旦大学出版社,1993.
[99] LEBESGUE.关于迪利克雷问题[J]. Palermo(巴雷尔谟)数学会会刊,1907,(24):371-402.

[100] ЛЕЦНПК О А О. 关于椭圆型方程的迪利克雷问题[J]. 数学汇刊, 1949,(24):1-14.

[101] УРЫСОН С. 关于位势函数理论的第一类边值问题,一类不可解的情形[J]. 德国数学杂志,1925(23):155-158.

[102] 张南岳,陈怀惠. 复变函数论选讲[M]. 北京:北京大学出版社,1995.

[103] 方企勤. 复变函数教程[M]. 北京:北京大学出版社,1996.

[104] 余家荣,路见可. 复变函数专题选讲[M]. 北京:高等教育出版社, 1993.

[105] 莫叶. 亚纯函数论[M]. 济南:山东大学出版社,1997.

[106] CARATHÉODORY C. 复变函数论:第一卷[M]. 赵彦达,译. 谢庭藩,校. 北京:高等教育出版社,1985.

[107] Ravets J R, Grattan - Guinness. Jeseph Fourier: 1768—1830[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1972.

[108] 郑建华. 复分析[M]. 北京:清华大学出版社,2000.

[109] CONWAY J B. Functions of one complex variables[J]. 2nd ed. New York, Spring - Verlag, 1978,(11).

[110] 陈叔瑾. 多复变函数论(积分表示及其应用)[M]. 厦门:厦门大学出版社,1989.

[111] 斯铎尔 维尔海姆. 多复变函数值分布论[M]. 济南:山东科学技术出版社,1995.

[112] 杨乐,仪洪勋. 有限维与无限维复分析[M]. 济南:山东科学技术出版社,2001.

[113] MARSDEN JERROLD E, RATIU TUDOR S. 力学和对称性导论——经典力学系统初探[M]. 王丽瑾,刘学深,译. 北京:清华大学出版社, 2006.

[114] 康威 J B. 单复变函数[M]. 吕以辇,张南岳,译. 张顺燕,校. 上海:上海科学技术出版社,1985.

[115] 南云道夫. 偏微分方程[M]. 钱端状,译. 上海:上海科学技术出版社, 1962.

[116] 犬井铁郎. 偏微分方程的应用[M]. 杨永芳,译. 上海:上海科学技术出版社,1962.

[117] 陈立成. 层析成像的数学方法与应用[M]. 成都:西南交通大学出版社,1994.

[118] LAX PETER D. 泛函分析[M]. 影印版. 北京:高等教育出版社,2007.

[119] JEFFREY, RAUCH. 偏微分方程[M]. 北京:世界图书出版公司,1991.

[120] 李心灿,季文铎,余仁胜,等.大学生数学竞赛试题研究生入学数学考试试题解析选编[M].北京:高等教育出版社,2000.
[121] 叶扬波.模形式与迹公式[M].北京:北京大学出版社,2001.
[122] 黄劲松.李群的表示论[M].长沙:湖南教育出版社,2000.
[123] 宾尼 詹姆斯,特里梅因 斯科特.星系动力学[M].宋国玄,译.赵君亮,校.上海:上海科学技术出版社,2005.
[124] 沃尔科维斯基 L.复变函数论习题集[M].宋国栋,黄珏,张庆德,译.李锐夫,校.上海:上海科学技术出版社,1981.
[125] 华罗庚.华罗庚科普著作选集[M].上海:上海教育出版社,1984.
[126] 拉夫连季耶夫 M A,沙巴特 Б Б.复变函数论方法[M].施祥林,夏定中,吕乃刚,译.北京:高等教育出版社,2006.
[127] RUDIN WALTER.泛函分析[M].刘培德,译.北京:机械工业出版社,2004.
[128] 刘书琴.单叶函数[M].西安:西北大学出版社,1988.
[129] 陆善镇,泰勃尔森 M H,怀斯 G.由块生成的空间[M].影印版.长沙:湖南教育出版社,1996.
[130] 冯康,秦孟兆.哈密尔顿系统的辛几何算法[M].杭州:浙江科学技术出版社,2003.
[131] 帕格曼 施梯芬.核函数和共形映照[M].龚升,陈希孺,译.北京:科学出版社,1958.
[132] 许以超.C^n 中的齐次有界域理论[M].北京:科学出版社,2000.
[133] 任德麟.积分几何学引论[M].上海:上海科学技术出版社,1988.
[134] RUBINSTEIN I,RUBINSTEIN L.经典数学物理中的偏微分方程[M].影印版.北京:世界图书出版公司,1998.
[135] GROEMER H.傅立叶级数和球面调和函数的几何应用[M].影印版.北京:世界图书出版公司,1996.
[136] LIN FANGHUA,YANG XIAOPING.几何测度引论[M].影印版.北京:科学出版社,2002.
[137] ITÔ K, MCKEEAN,JR H P. Diffusion Processes and Their Sample Paths[M].纽约:斯普林格出版公司,1970.
[138] 陈省身.陈省身文集[M].上海:华东师范大学出版社,2002.
[139] 马传渔.黎曼流形的谱[M].南京:南京大学出版社,1993.
[140] 丘成桐,孙理察.微分几何讲义[M].北京:高等教育出版社,2004.
[141] MCOWEN ROBERT.偏微分方程方法及应用[M].北京:清华大学出版社,2004.

[142] 江晓原.多元文化中的科学史[M].上海:上海交通大学出版社,2005.
[143] 西蒙斯 约翰.科学家100人[M].王首燕,姜栋,译.北京:当代世界出版社,2006.
[144] 阿西摩夫 I.古今科技名人辞典[M].潘纺博,译.北京:科学出版社,1988.
[145] 杜瑞芝,王青建,孙宏安,等.简明数学史辞典[M].济南:山东教育出版社,1991.
[146] 解思泽,徐本顺.世界数学家思想方法[M].济南:山东教育出版社,1994.
[147] BREBBIA C A. Topics in Boundary Element Research[M]. New York: Springer-Verlag,1989.
[148] 丹尼尔·拉佩兹(Daaiel,N. Lapedes).科学技术百科全书:数学卷[M].纽约:麦格劳-希尔图书公司,1977.
[149] 沈尧天,严树森.拟线性椭圆型方程的变分方法[M].广州:华南理工大学出版社,1995.

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2}=0$$

◎后记

图书的出版离不开选题的策划，选题的确定有两种风格：一种是宏大叙事，一种是着眼细节。如何取舍呢？举一个数学之外的例子，如果不是过分较真的话，陈寅恪应该算是中国最顶级的历史学家，在众多有关他的评传中，都有这样一段记载：说陈寅恪有一次给学生讲《琵琶行》，讲到"移船相近邀相见，添酒回灯重开宴。"时，陈寅恪讲了如下细节，移船相近到底是白居易的船靠向了歌女的，还是歌女的船靠向白居易的？到底是谁上了谁的船？这个歌女到底是长安城几流的歌女？这样的讲法有人说充满了低级趣味，根本不像一个大学教授所为，更令人惊奇的是陈先生不是偶尔涉足如此细节而是一贯如此，我们翻开陈先生的著作目录便会发现每一项论及的都是非常琐细的题目。上海交通大学人文学院院长江晓原先生在跟他的学生讲怎样做选题时说：这就是史学大师的题目，史学大师的名望是靠这些题目建立起来的，而不是靠"论中国当代的……"这样的题目。选题之道在于将一个小的题目做深做透，而不是做一个浮光掠影式的大题目。本书的编写思路就是尽可能收集一切与迪利克雷问题有关的素材，使之有机溶合。当然限于能力，可能读后会有机械排列之感。哈耶克说："所谓专家就是对越来越少的部分知道得越来越多。"而大众则是对越来越多的部分知道的越来越少。数学特别是近代数学有一个迫切的需求就是扩散与漂移，向那些对越发展越庞杂的数学知道得越来越少的普通人渗透，

让整个社会文化空间中到处弥漫着诱人的数学气息，激活上帝赋予每个人的数学细胞，以对抗现实中逐渐蔓延的数学沙漠化。

在西方，一些有识之士已经开始对类似于当年文盲一样的数学盲的出现产生了警惕。在这方面有两篇著名文献：道格拉斯. R. 霍夫斯塔特(Douglas R. Hofstadter)，曾在《科学美国人》中的 Metam agical Themas 专栏发表了《数学麻痹症》(On Number Numbness)，约翰·艾伦·保洛斯(John Allen Paulos)发表了《数学盲：数学方面的文盲及其后果》(《Innumeracy: Mathematical Illiteracy and Its Consequences》)(纽约：希尔一王出版社，1988 年)，据考证霍夫斯塔特并不是第一个使用"数学盲"这个词的人。《牛津英语辞典》将第一个使用该单词的殊荣授予给了 1959 年有关英国教育制度的一篇报道。数学盲的名词足以唤醒我们对数学薪火失传的忧患意识，我们有理由相信将来的世界一定会像今天用文盲率来衡量国家现代化程度一样用数学盲率来评价一个国家的发展潜力。

信息时代，人们每天面对大量的信息，有些人采用快速阅读的方式去处理，如所谓的对角线阅读法，用目光在文本上打一个 × 即算读过，而其反面则是"文本细读"的方式。本书即是对网上那篇关于维斯卡尔迪的报道的"细读"，目地之一是供那些好奇心重，求知欲强的青年学生进行深度阅读，提供相关链接，窥现代数学全豹于此迪氏问题之一斑，从这个狭窄门缝挤进近代数学之殿堂；第二是通过全面介绍迪氏问题的来龙去脉及全景式的鸟瞰，吓退那些"民间数学家"，因为简略必片面，过多的科普式文学描述必误导一些追名逐利的"证明者"，只有用连续的推理与铁面的数学方程式才能使其视为畏途，这对其"证明者"本人及数学都是幸事。

在本书的第一部分，我们借维斯卡尔迪获大奖事件，对数学教育、数学竞赛、教育环境等发表了一系列"极端"言论，过激的背后有些发酸，据心理学专家分析这是一种渴望成功而未果的正常反应，学数学和哲学的人大多有这样的倾向。洪晃说："在任何行业里相对而言聪明，但是又没有得到承认的人，基本上会变成这样(酸)。有才气，但是运气不好。一般笨人还不会这样，都挺乐呵呵的。成功的，他狂，但是不会酸。"(阿城，陈村，等著. 我们拿爱情没办法. 上海：上海社会科学出版社，2006)文字编辑在读了书稿之后曾表示了这样的担心，这种文字会引起共鸣吗？更进一步担心：会有人读吗？台湾城邦集团前任董事长詹宏志曾对阅读有一个一针见血的观察，即"生活感受痛苦指数愈高的，愈容易畅销。"德国著名哲学家瓦尔特·舒尔茨(Walter Schulz, 1912—)在读了施韦策的《基督教与世界宗教》后，深切感受到：生活就是痛苦，人的真正的任务就是减轻痛苦，这一基本思想在我看来是对生活意义问题惟一恰当的回答。([德]L. J. 庞格拉茨，主编. G. 京特，等著. 德国著名哲学家自述. 中册. 张慎，等译. 北京：东方出版社)

$$\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial z^2}=0$$

我们中国社会目前还没有到达那种后工业化时期的充满痛苦层次。多数家长的痛苦是望子成龙而不能，相夫教子而无法实现，如何选择正确的教育途径，使儿童能够健康发展与成材，是人们所关注的，涉及此类的图书也应是有其价值的。

这是对读者的分析，对作者而言，应该是“酸”的指数越高越可能有人读，心平气和者均属功成名就之辈，对一切只有感激没有挑剔，“糖”指数偏高。想一下，当今阅读量，最大者当首推手机段子。但没有一条是出自官员和企业家甚至“白骨精”(白领、骨干、精英)之手，当然一个原因是他们时间成本高，但更重要的是他们没有创作的动机和心态，对这一点中国古人早有定论。所谓言由心生。

“故有志深轩冕，而泛咏皋壤，心缠幾务，而虚述人外。真宰弗存，翩其反矣。”

(刘勰《文心雕龙》)

相反短信写手多半来自于边缘化的草根阶层，他们通过调侃发泄心中愁闷。郭德纲在解释为什么他所代表的天津相声听众多，而北京相声长期低迷的原因时说，天津相声往往低姿态，以自嘲、自讽、自残为主，使听众有高高在上，智力超群的优越感，所以爱听。而北京相声则往往高调登场，以道德导师自居，针贬时弊，使观众很没面子。总之，全面的媚俗时代已经到来，草根即主流，总揣着优越感并不是总有人买账。

借此需说明，全书除议论文字即全部文字叙述外，一切数学推导及论述皆为书后所引文献作者所给(除进行了必要的订正及注释外)，除部分章节全部指出了原著述人及出处，如有引用不当或不规范之处请及时通知并批评，特别感谢香港大学文强先生亲复电邮同意引用他那篇关于中国古代数学教育的大作。因为本书的肇始就是2006年“五·一”黄金周期间编者到网上浏览看到维斯卡尔迪获奖消息的一个“文本细读”，从好奇到开始查了一些有助理解其背景的资料，不料越积越多，最后在朋友们的鼓动之下，索性汇集成册，历时一年半，虽不是什么高文大册，但以自己的感受推及人群中还应有些同好，所以不揣浅薄，并配以章回标题以不土不洋之形式，不伦不类之内容，不高不低之定位推了出来。如遇知音，纯属偶然，遭到不屑也属必然，因为我们一贯信奉做书在人，成书在天。但我们相信凡真心的作品必能打动一些人，如刘勰所言：“赞曰：言以文远，诚哉斯验。心求既形，英华乃赡。吴锦好渝，舜英徒艳。繁采寡情，味之必厌。”(刘勰《文心雕龙》)

国际数论界至今都流传着美国数论学家柯尔1903年分解$2^{67}-1$为两整数乘积之后的答辞，当有人问他得到这一结果，用了多长时间时，他答道：用了3

年内的全部星期天。本书的编写经历大致相同，用了从2006年5月1日至2007年10月7日间的全部双休日和节假日。时间短且散，内容深且杂，错误在所难免。数学博士郭梦书审校了全书，订正了许多细节错误，新西兰奥克兰理工大学Johg翻译并审校了英文部分，王勇钢、李广鑫两位编辑对书稿进行了细致的加工，一并表示感谢。

一部篇幅相对巨大的数学读物，难免会充斥着各种各样的错误，对此一个有效的办法是“悬赏缉拿”。

美国斯坦福大学教授、《计算机程序设计艺术》丛书作者、现代计算复杂度研究的奠基人高德纳(Donald E. Kunth，1938—)曾对他书中的每个错误，承诺给予第一个发现者2.56美元，对每个有意义的建议，他付0.32美元，如果你寄给他一封信指出一个错误(你只能寄普通信件，因为他已经放弃阅读电子邮件)，他最终会通知你，你是否是第一个告诉他这一错误的人，要耐心等待，因为他收到的邮件太多。贝尔实验室的罗森(kenneth H. Rosen)博士曾寄给高德纳一封报告错误的信，几年以后才收到回信，他告诉罗森博士，他的信比首先报告这一错误的信晚到了好几个月，奖金可想而知了。

鉴于中国的具体国情，出版逐渐式微，出版业几近微利产业，编者断无此现金奖励之能力，谨以感谢代替。

如果非要用一句名人名言概括编此书的感受：按塞林格《麦田守望者》的主角霍尔登·考尔菲尔德(Holden Ganlfield)(此人喜欢帮大家定义人生大小事)的说法——是崇高的折磨，也是庄严的负担。

刘培杰

2007.11.2